
()

080407

--	--

精打細算

摘要

本研究旨在探討圓錐表面積與圓錐體積的關係，期能找到最佳圓心角，使得不浪費紙板材料（圓錐表面積）的情況下，可以得到最大的圓錐體積。本結果之應用可以提供圓錐甜筒、圓錐型帳篷、漏斗等產品製造商的參考，在節省材料以及經濟效益的考慮前提下，建議製造圓錐造型廠商可以針對不同的考量，選擇圓心角的角度介於 222 度和 294 度之間。

壹、 研究動機

數學課時，老師介紹了圓錐構成的基本要素，以及圓錐表面積和圓錐體積的算法。在美勞課中，我們利用紙板製作立體圓錐模型，引發了我們探討圓錐底面的圓形半徑、圓錐側面展開的扇形半徑、扇形圓心角以及圓錐表面積、圓錐體積的關係。久智提出一個問題：「如何在不浪費紙板材料的情況下，可以找到最大的圓錐體積呢？」這個問題激發我們研究的興趣，於是我們以圓錐模型為例，展開以下的研究。

貳、 研究目的

- (一) 探討圓形半徑、扇形半徑、扇形圓心角與圓錐表面積的關係。
- (二) 探討圓形半徑、扇形半徑、扇形圓心角與圓錐體積的關係。
- (三) 分析圓錐表面積與圓錐體積的變化關係。
- (四) 以經濟效益的觀點，找出最佳的角度提供具體的建議。

參、 研究設備及器材

紙筆、硬紙板、剪刀、量角器、尺、計算機

肆、研究過程或方法

我們以 r 代表底面圓形半徑， R 代表側面扇形半徑，而扇形的圓心角以 θ 表示。

【探討一】 r 、 R 、 θ 與圓錐表面積 A 、圓錐體積 V 的關係

【情形一】底面的圓形半徑 r 固定時

扇形圓心角 θ 越小，那麼側面的扇形半徑 R 就越長，所以圓錐的表面積 A 也會越大，此時圓錐的高 h 也越高，所以圓錐的體積 V 也會越大；反之， θ 越大， R 就越短， h 也越低，因此圓錐的表面積 A 和體積 V 也會越小。

【情形二】扇形的圓心角 θ 固定時

側面的扇形半徑 R 越長，底面的圓形半徑 r 也越長，所以圓錐的表面積 A 也會越大，此時圓錐的高 h 也越高，所以圓錐的體積 V 也會越大；反之， R 越短， r 也越短， h 也越低，因此圓錐的表面積 A 和體積 V 也會越小。

【情形三】側面的扇形半徑 R 固定時

扇形的圓心角 θ 越大，底面的圓形半徑 r 也越長，所以圓錐的表面積 A 也會越大；反之， θ 越小， r 也越短，因此圓錐的表面積 A 也會越小。

當側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 越大，底面的圓形半徑 r 也越長，但是圓錐的高 h 卻越低；反之， R 固定時， θ 越小， r 也越短，然而圓錐的高 h 卻越高。

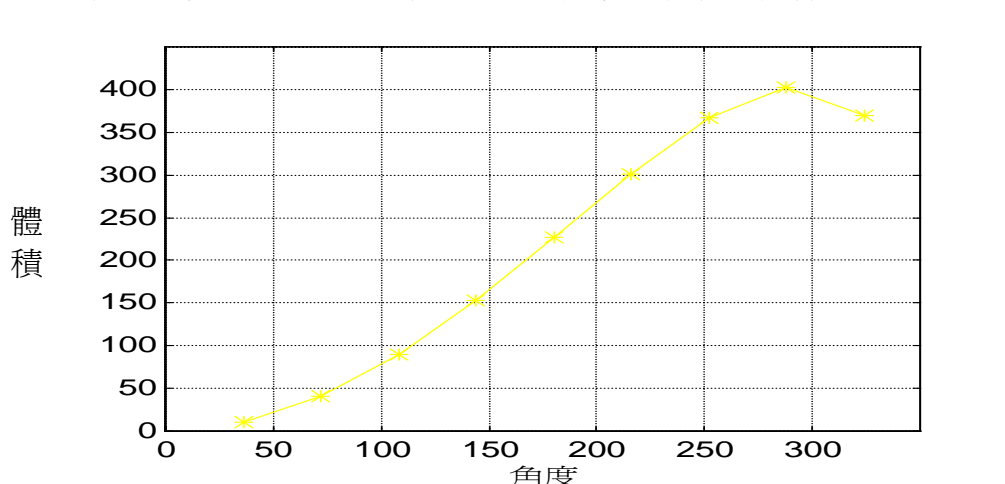
由於圓錐的體積 V 與底面的圓形半徑 r 、圓錐的高 h 均有密切的關係，因此我們再作以下深入的探究。

我們考慮計算出每一種扇形圓心角的變化情形，然而從 1 度到 360 度的範圍太大了，於是每隔 36 度先找出最大圓錐體積的可能落點處，我們以 R 等於 10 為例，如表 1。

表 1

R	10	10	10	10	10	10	10	10	10
θ	36	72	108	144	180	216	252	288	324
r	1	2	3	4	5	6	7	8	9
H	9.95	9.8	9.54	9.17	8.66	8	7.14	6	4.36
V	10.41	41.03	89.87	153.57	226.6	301.44	366.19	401.92	369.64

根據上表 1 的數據，我們可以畫出角度與體積的關係圖 I，如圖一。



角度

圖一 角度與體積的關係圖 I

我們發現最大圓錐體積在角度 288 度附近，於是將扇形圓心角的範圍縮小，從 281 度到 298 度作一細分探討，以 R 等於 10 為例進行分析。

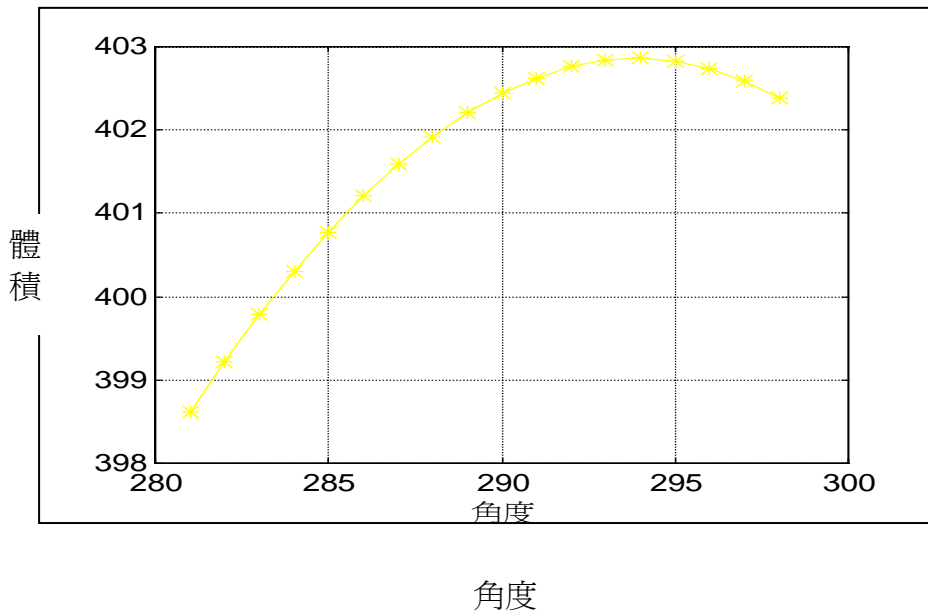
表 2-1

θ	281	282	283	284	285	286	287	288	289
r	7.8056	7.8333	7.8611	7.8889	7.9167	7.9444	7.9722	8.0000	8.0278
H	6.2509	6.2160	6.1809	6.1454	6.1095	6.0734	6.0369	6.0000	5.9628
V	398.62	399.22	399.78	400.30	400.78	401.20	401.59	401.92	402.21

表 2-2

θ	290	291	292	293	294	295	296	297	298
r	8.0556	8.0833	8.1111	8.1389	8.1667	8.1944	8.2222	8.2500	8.2778
H	5.9252	5.8873	5.8102	5.8102	5.7711	5.7316	5.6917	5.6513	5.6106
V	402.44	402.63	402.76	402.84	402.86	402.83	402.74	402.59	402.39

根據表 2-1 和 2-2 的數據，我們可以畫出角度與體積的關係圖 II，如圖二。



圖二 角度與體積的關係圖 II

我們可以清楚的發現當扇形圓心角的角度是 294 度時，圓錐的體積最大。

【探討二】圓錐表面積與圓錐體積的變化關係

在【探討一】中，我們發現側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 越大，底面的圓形半徑 r 也越長，所以圓錐的表面積 A 也會越大。然而側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 是 294 度時，圓錐的體積才會最大。

我們以 R 等於 10 為例進行討論：

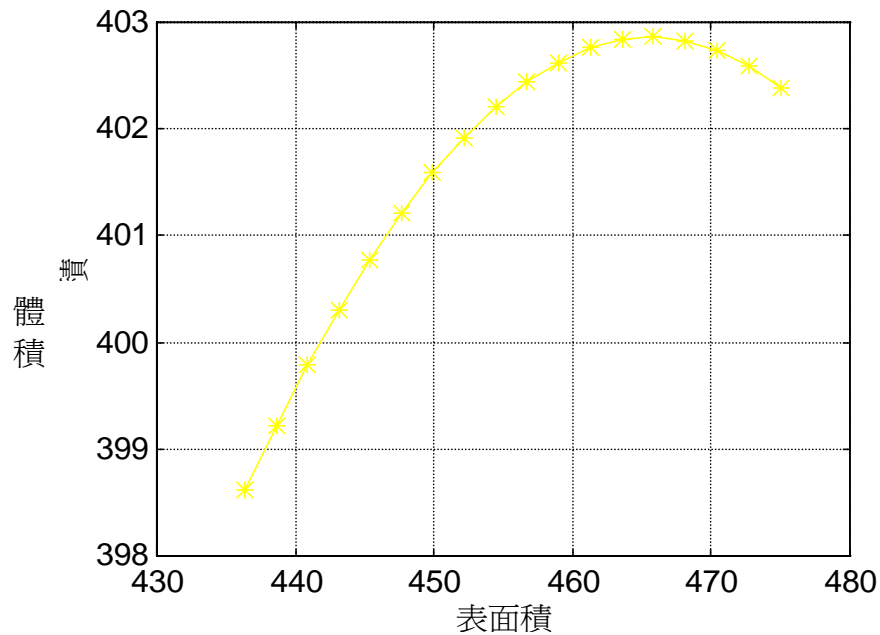
表 3-1

θ	281	282	283	284	285	286	287	288	289
V	398.62	399.22	399.78	400.30	400.78	401.20	401.59	401.92	402.21
A	436.40	438.64	440.88	443.13	445.38	447.63	449.89	452.16	454.43

表 3-2

θ	290	291	292	293	294	295	296	297	298
V	402.44	402.63	402.76	402.84	402.86	402.83	402.74	402.59	402.39
A	456.71	458.99	461.27	463.56	465.85	468.15	470.46	472.77	475.08

根據表 3-1 和 3-2 的數據，我們可以畫出表面積與體積的關係圖，如圖三。



圖三：表面積與體積的關係圖

因此，當側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 等於 294 度，此時圓錐的表面積並非最大，然而卻可以得到最大的體積。

根據圖三表面積與體積的關係圖中，我們可以發現扇形的圓心角 θ 大於 294 度時，既浪費紙板材料，又縮減圓錐的空間，是最差的選擇。然而，扇形的圓心角 θ 小於 294 度時，雖然縮減了圓錐的空間，但相對地也節省紙板材料。如果將這一概念運用在圓錐帳篷或是其他圓錐造型用品的製作上，我們以經濟效益作為廠商製作產品的考慮重點，也就是不一定要達到最大的空間，但卻能節省紙板材料的前題下，此時的扇形圓心角 θ 應該選擇幾度較為恰當呢？有關經濟效益的問題，引起我們繼續研究的興趣。

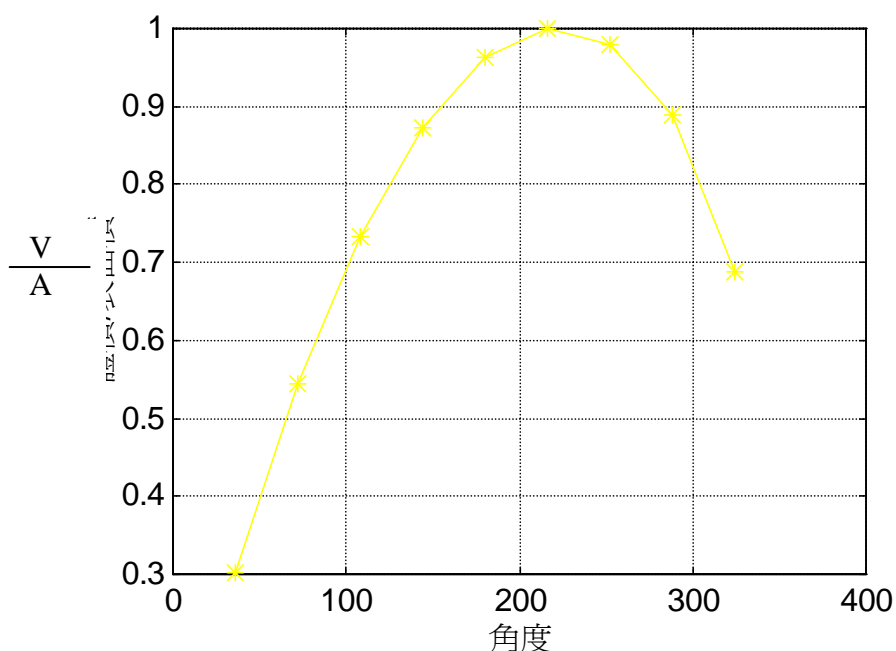
我們以體積對表面積的比值 V/A 表示經濟效益，當 V/A 越大時，表示經濟效益越高， V/A 越小時，表示經濟效益越低。

我們考慮計算出每一種扇形圓心角的變化情形，然而從 1 度到 360 度的範圍太大了，於是每隔 36 度先找出最大的 V/A 的可能落點處，我們以 R 等於 10 為例，如表 4。

表 4

θ	36	72	108	144	180	216	252	288	324
V	10.4142	41.0208	89.8611	153.4857	266.61	301.4400	373.660	452.160	536.940
A	34.540	75.360	122.46	175.84	235.50	301.44	373.66	452.16	536.94
V/A	0.3015	0.5443	0.7338	0.8729	0.9623	1.0000	0.9802	0.8889	0.6882

根據上表 4 的數據，我們可以畫出角度與 V/A 的關係圖 I，如圖四。



圖四 角度與 V/A 的關係圖 I

由圖四可以發現 V/A 比值最大，落在角度 216 度附近，於是繼續進行分析。

表 5-1

θ	211	212	213	214	215	216	217
V	291.3245	293.3604	295.3902	297.4136	299.4303	301.4400	303.4424
A	291.9061	293.8032	295.7051	297.6119	299.5235	301.4400	303.3613
V/A	0.9980	0.9985	0.9989	0.9993	0.9997	1.0000	1.0003

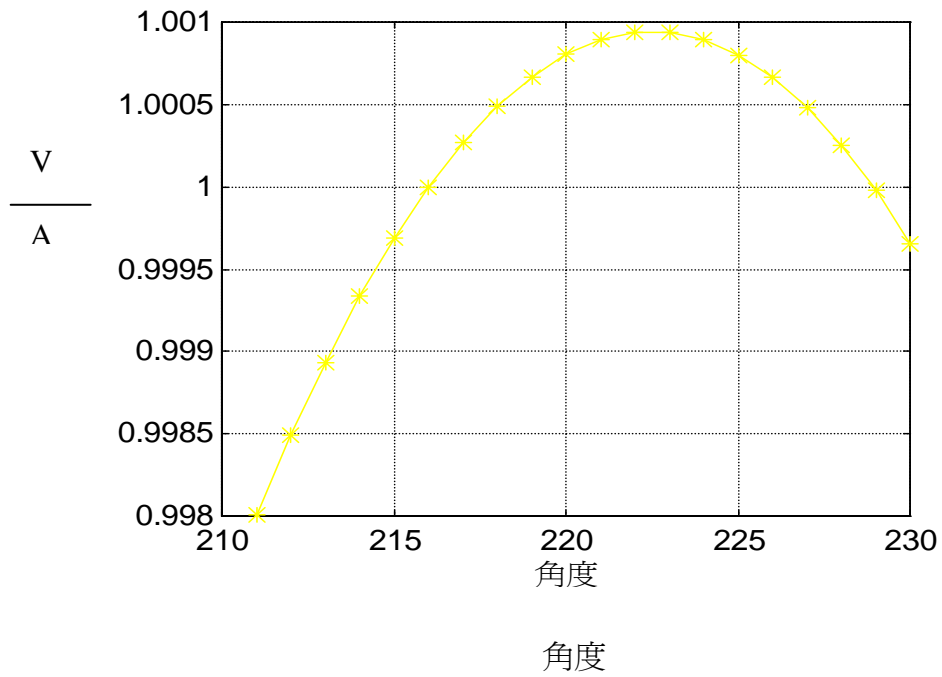
表 5-2

θ	218	219	220	221	222	223	224
V	305.4372	307.4241	309.4028	311.3730	313.3343	315.2864	317.2289
A	305.2875	307.2185	309.1543	311.0950	313.0406	314.9909	316.9462
V/A	1.0005	1.0007	1.0008	1.000893	1.000938	1.000937	1.000892

表 5-3

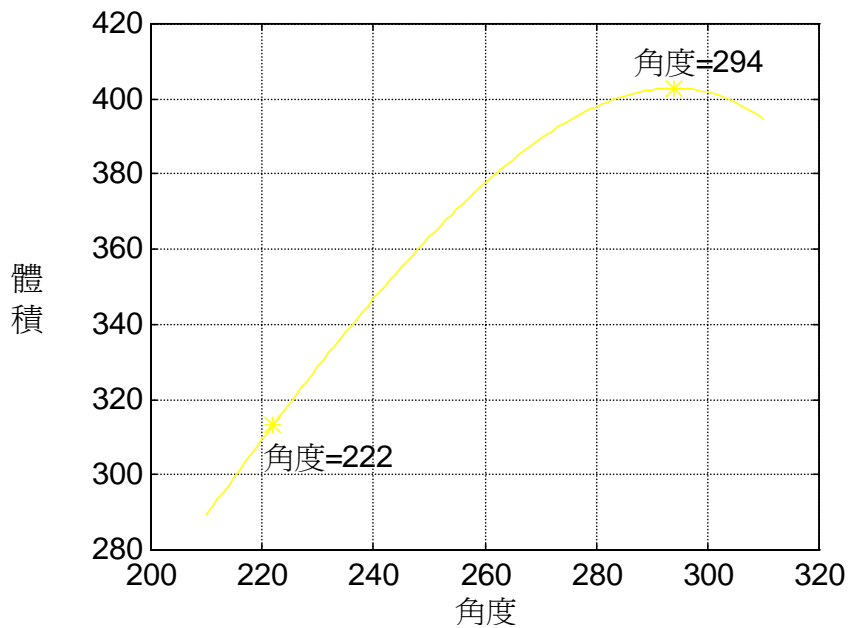
θ	225	226	227	228	229	230
V	319.1617	321.0842	322.9962	324.8974	326.7873	328.6656
A	318.9062	320.8712	322.8409	324.8156	326.7950	328.7793
V/A	1.0008	1.0007	1.0005	1.0003	1.0000	0.9997

根據表 5-1、5-2 和 5-3 的數據，我們可以畫出角度與 V/A 的關係圖 II，如圖五。

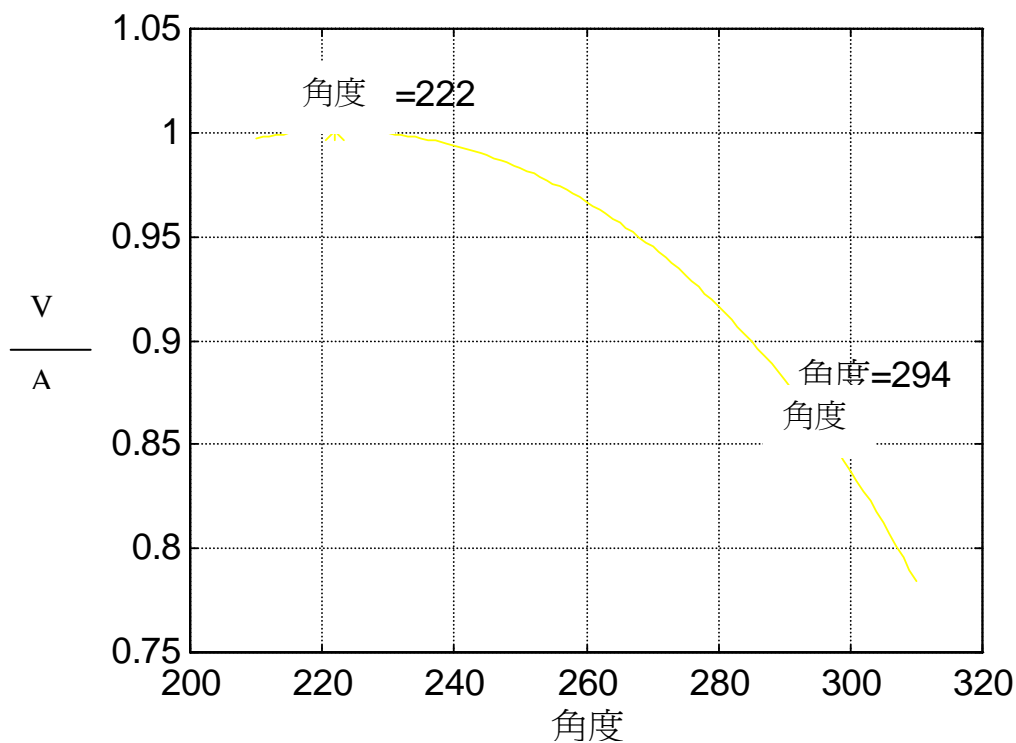


圖五 角度與 V/A 的關係圖 II

根據圖六角度與體積的關係圖與圖七角度與 V/A 的關係圖中，我們可以清楚的發現：當扇形圓心角的角度在 222 度附近時， V/A 的值最大，此時的經濟效益最高。當扇形圓心角的角度小於 222 度或是大於 294 度時，經濟效益與圓錐空間均逐次遞減，因此是較差的選擇。



圖六 角度與體積的關係圖



圖七 角度與 V/A 的關係圖

伍、研究結果

- 一、底面的圓形半徑 r 固定時，扇形圓心角 θ 越小，那麼側面的扇形半徑 R 就越長，所以圓錐的表面積 A 也會越大，此時圓錐的高 h 也越高，所以圓錐的體積 V 也會越大；反之， θ 越大， R 就越短， h 也越低，因此圓錐的表面積 A 和體積 V 也會越小。
- 二、扇形的圓心角 θ 固定時，側面的扇形半徑 R 越長，底面的圓形半徑 r 也越長，所以圓錐的表面積 A 也會越大，此時圓錐的高 h 也越高，所以圓錐的體積 V 也會越大；反之， R 越短， r 也越短， h 也越低，因此圓錐的表面積 A 和體積 V 也會越小。
- 三、側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 越大，底面的圓形半徑 r 也越長，所以圓錐的表面積 A 也會越大；反之， θ 越小， r 也越短，因此圓錐的表面積 A 也會越小。
- 四、當側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 越大，底面的圓形半徑 r 也越長，所以圓錐的表面積 A 也會越大。然而側面的扇形半徑 R 固定時，

扇形的圓心角 θ 是 294 度時，圓錐的體積才會最大。

五、當扇形圓心角的角度在 222 度附近時， V/A 的值最大，此時的經濟效益最高。

六、當扇形圓心角的角度小於 222 度或是大於 294 度時，經濟效益與圓錐空間均逐次遞減，是較差的選擇。

陸、討論與結論

我們發現側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 等於 294 度，此時圓錐的表面積並非最大，也就是所花費的材料並非最多，卻可以得到最大的體積。

若以經濟效益為考慮時，我們發現當扇形圓心角的角度在 222 度附近時， V/A 的值最大，此時的經濟效益最高。當扇形圓心角的角度小於 222 度或是大於 294 度時，經濟效益與容納空間均逐次遞減，是較差的選擇。當扇形圓心角的角度介於 222 度和 294 度之間時，經濟效益與容納空間互有增減，均是不錯的選擇。

我們除了以側面的扇形半徑 $R=10$ 為例進行討論外，更嘗試 $R=20$ 和 30 的情形，以及推展到 $R=k$ 的情況，都發現扇形的圓心角 θ 等於 294 度時，圓錐的表面積並非最大，卻可以得到最大的體積。同時發現當扇形圓心角的角度在 222 度附近時， V/A 的值最大，此時的經濟效益最高。

這次研究結果可進一步提供其他圓錐模型，例如：圓錐甜筒、圓錐型帳篷、小丑帽、斗笠、漏斗等用品製造商的參考，在節省材料以及經濟效益的考慮前提下，建議製造圓錐造型廠商可以針對不同的考量，選擇圓心角的角度介於 222 度和 294 度之間。

柒、附件

一、當 R=20 時

我們考慮計算出每一種扇形圓心角的變化情形，然而從 1 度到 360 度的範圍太大了，於是每隔 36 度先找出最大圓錐體積的可能落點處，我們以 R 等於 20 為例，如表 A-1 所示。

表 A-1

θ	36	72	108	144	180	216	252	288	324
R	20	20	20	20	20	20	20	20	20
r	2	4	6	8	10	12	14	16	18
H	19.8997	19.5959	19.0788	18.3303	17.3205	16.0000	14.2829	12.0000	8.7178
V	83.3558	328.3325	719.2526	1228.508	1813.798	2412.7411	2931.5642	3216.9882	2957.8766
A	138.2300	301.5926	490.0880	703.7162	942.4770	1206.3706	1495.3968	1809.5558	2148.8476
V/A	0.6030	1.0887	1.4676	1.7457	1.9245	2.0000	1.9604	1.7778	1.3765

我們發現最大圓錐體積在角度 288 度附近，於是將扇形圓心角的範圍縮小，從 288 度到 296 度作一細分探討，結果發現側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 是 294 度時，圓錐的體積才會最大，如表 A-2 所示。

表 A-2

θ	288	289	290	291	292	293	294	295	296
R	20	20	20	20	20	20	20	20	20
r	16.0000	16.0556	16.1111	16.1667	16.2222	16.2778	16.3333	16.3889	16.4444
H	12.0000	11.9256	11.8504	11.7745	11.6978	11.6204	11.5422	11.4632	11.3833
V	3216.9882	3219.2740	3221.1610	3222.6397	3223.7005	3224.3336	3224.5286	3224.2751	3223.5623
A	1809.5558	1818.6412	1827.7460	1836.8702	1846.0138	1855.1768	1864.3591	1873.5609	1882.7820
V/A	1.7778	1.7702	1.7624	1.7544	1.7463	1.7380	1.7296	1.7209	1.7121

研究發現當扇形圓心角的角度在 222 度附近時，V/A 的值最大，此時的經濟效益最高，如表 A-3 所示。

表 A-3

θ	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226
R	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
r	12.0000	12.0556	12.1111	12.1667	12.2222	12.2778	12.3333	12.3889	12.4444	12.5000	12.5556
H	16.0000	15.9582	15.9161	15.8736	15.8309	15.7878	15.7445	15.7008	15.6568	15.6125	15.5679
V	2412.7411	2428.7685	2444.7351	2460.6384	2476.4759	2492.2451	2507.9433	2523.5681	2539.1166	2554.5864	2569.9745
A	1206.3706	1214.0597	1221.7682	1229.4962	1237.2435	1245.0102	1252.7963	1260.6018	1268.4267	1276.2709	1284.1346
V/A	2.0000	2.0005	2.0010	2.0013	2.0016	2.0018	2.0018764	2.0018757	2.0018	2.0016	2.0013

二、當 R=30 時

我們考慮計算出每一種扇形圓心角的變化情形，然而從 1 度到 360 度的範圍太大了，於是每隔 36 度先找出最大圓錐體積的可能落點處，我們以 R 等於 30 為例，如表 A-4 所示。

表 A-4

θ	36	72	108	144	180	216	252	288	324
R	30	30	30	30	30	30	30	30	30
r	3	6	9	12	15	18	21	24	27
H	29.8496	29.3939	28.6182	27.4955	25.9808	24.0000	21.4243	18.0000	13.0767
V	281.3258	1108.1221	2427.4775	4146.2133	6121.5677	8143.0013	9894.0291	10857.3350	9982.8337
A	311.0174	678.5834	1102.6981	1583.3614	2120.5733	2714.3338	3364.6429	4071.5006	4834.9070
V/A	0.9045	1.6330	2.2014	2.6186	2.8868	3.0000	2.9406	2.6667	2.0647

我們發現最大圓錐體積在角度 288 度附近，於是將扇形圓心角的範圍縮小，從 288 度到 296 度作一細分探討，結果發現側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 是 294 度時，圓錐的體積才會最大，如表 A-5 所示。

表 A-5

θ	288	289	290	291	292	293	294	295	296
R	30	30	30	30	30	30	30	30	30
r	24.0000	24.0833	24.1667	24.2500	24.3333	24.4167	24.5000	24.5833	24.6667
H	18.0000	17.8883	17.7756	17.6618	17.5468	17.4306	17.3133	17.1948	17.0750
V	10857.335	10865.0498	10871.4183	10876.409	10879.9893	10882.1259	10882.7842	10881.9286	10879.5227
A	4071.5006	4091.9428	4112.4286	4132.9580	4153.5310	4174.1477	4194.8080	4215.5120	4236.2596
V/A	2.6667	2.6552	2.6436	2.6316	2.6195	2.6070	2.5943	2.5814	2.5682

研究發現當扇形圓心角的角度在 222 度附近時，V/A 的值最大，此時的經濟效益最高，如表 A-6 所示。

表 A-6

θ	218	219	220	221	222	223	224	225	226
R	30	30	30	30	30	30	30	30	30
r	18.1667	18.2500	18.3333	18.4167	18.5000	18.5833	18.6667	18.7500	18.8333
H	23.8741	23.8104	23.7463	23.6818	23.6167	23.5512	23.4852	23.4187	23.3518
V	8250.9811	8304.6547	8358.1063	8411.3272	8464.3088	8517.0422	8569.5186	8621.7290	8673.6641
A	2748.9785	2766.3663	2783.7978	2801.2729	2818.7916	2836.3540	2853.9600	2871.6096	2889.3029
V/A	3.001472	3.002008	3.002411	3.002680	3.002815	3.002814	3.002677	3.002403	3.001992

三、當 $R=k$ 時

我們考慮計算出每一種扇形圓心角的變化情形，然而從 1 度到 360 度的範圍太大了，於是每隔 36 度先找出最大圓錐體積的可能落點處，我們以 R 等於 k 為例，如表 A-7 所示。

表 A-7

θ	36	72	108	144	180	216	252	288	324
R	k	k	k	k	k	k	k	k	k
r	0.1000 k	0.2000 k	0.3000 k	0.4000 k	0.5000 k	0.6000 k	0.7000 k	0.8000 k	0.9000 k
H	0.9950 k	0.9798 k	0.9539 k	0.9165 k	0.8660 k	0.8000 k	0.7141 k	0.6000 k	0.4359 k
V	0.0104 k ³	0.0410 k ³	0.0899 k ³	0.1536 k ³	0.2267 k ³	0.3016 k ³	0.3664 k ³	0.4021 k³	0.3697 k ³
A	0.3456 k ²	0.7540 k ²	1.2252 k ²	1.7593 k ²	2.3562 k ²	3.0159 k ²	3.7385 k ²	4.5239 k²	5.3721 k ²
V/A	0.0302 k	0.0544 k	0.0734 k	0.0873 k	0.0962 k	0.1000 k	0.0980 k	0.0889 k	0.0688 k

我們發現最大圓錐體積在角度 288 度附近，於是將扇形圓心角的範圍縮小，從 288 度到 296 度作一細分探討，結果發現側面的扇形半徑 R 固定時，扇形的圓心角 θ 是 294 度時，圓錐的體積才會最大，如表 A-8 所示。

表 A-8

θ	288	289	290	291	292	293	294	295	296
R	k	k	k	k	k	k	k	k	k
r	0.8000 k	0.8028 k	0.8056 k	0.8083 k	0.8111 k	0.8139 k	0.8167 k	0.8194 k	0.8222 k
H	0.6000 k	0.5963 k	0.5925 k	0.5887 k	0.5849 k	0.5810 k	0.5771 k	0.5732 k	0.5692 k
V	0.4021 k ³	0.4024 k ³	0.4026 k ³	0.4028 k ³	0.4030 k ³	0.4030 k ³	0.4031 k³	0.4030 k ³	0.4029 k ³
A	4.5239 k ²	4.5466 k ²	4.5694 k ²	4.5922 k ²	4.6150 k ²	4.6379 k ²	4.6609 k ²	4.6839 k ²	4.7070 k ²
V/A	0.0889 k	0.0885 k	0.0881 k	0.0877 k	0.0873 k	0.0869 k	0.0865 k	0.0860 k	0.0856 k

研究發現當扇形圓心角的角度在 222 度附近時， V/A 的值最大，此時的經濟效益最高，如表 A-9-1 與 A-9-2 所示。

表 A-9-1

θ	218	219	220	221
R	k	k	k	k
r	0.6056 k	0.6083 k	0.6111 k	0.6139 k
H	0.7958 k	0.7937 k	0.7915 k	0.7894 k
V	0.3056 k ³	0.3076 k ³	0.3096 k ³	0.3115 k ³
A	3.0544 k ²	3.0737 k ²	3.0931 k ²	3.1125 k ²
V/A	0.10004906 k	0.10006694 k	0.10008038 k	0.10008935 k

表 A-9-2

θ	222		223		224		225		226	
R	k		k		k		k		k	
r	0.6167	k	0.6194	k	0.6222	k	0.6250	k	0.6278	k
H	0.7872	k	0.7850	k	0.7828	k	0.7806	k	0.7784	k
V	0.3135	k³	0.3154	k ³	0.3174	k ³	0.3193	k ³	0.3212	k ³
A	3.1320	k²	3.1515	k ²	3.1711	k ²	3.1907	k ²	3.2103	k ²
V/A	0.10009382	k	0.10009379	k	0.10008922	k	0.10008010	k	0.10006640	k



080407