080408

作品名稱：神奇的尺

摘要

本研究探討一支刻度很少而長度為整數 Kcm 的節約尺，這支尺可以從 1cm、2cm、3 cm、⋯，量到 Kcm，我們找出最大的 K，並且探討尺的間隔數和尺長的關係。我們發現有 N 個間隔，一定會產生 $\frac{(N+1)\times N}{2}$ 種間隔，尺長不會超過 $\frac{(N+1)\times N}{2}$ cm。我們還找出了間隔組合總數的算法，當間隔數越多，間隔組合總數就越驚人，從幾十萬筆資料中，我們找出了 1~8 個間隔的最佳解。當我們把這些間隔組合總數算法所形成的數列排在一起，發現這些數列竟然和巴斯卡三角形有關。

壹、研究動機

上數學課時，老師給我們一支 15cm 尺，要我們畫線。這支尺沒有全部的刻度，只有 1、4、5、11、13 如圖 1，老師問：「你們可不可以用這支尺，畫出長度為整數 1~15cm 的線？畫線要一筆畫不可用接的。」於是激起我們的興趣，就開始研究這個「刻度很少，卻能量出 1 到跟直尺長度相同的所有整數公分長」的尺。

圖 1　使用 5 個刻度的 15cm 尺

與教材的相關性如下：

一、第十冊第五單元圖形的面積
二、第十冊第八單元怎樣解題
三、第九冊第十一單元怎樣計算

貳、研究目的

一、這支 15cm 尺所使用的刻度可不可以再少一點？
二、尺的長度和所用的刻度個數有沒有關係？
三、這些刻度很少的尺，可以量出最長的長度是多少？
四、長度最長的尺，刻度要如何訂定？
五、訂這些刻度有沒有什麼規律？

參、研究設備及器材

我們用到了紙、筆、橡皮擦、電腦（軟體 Word 和 Excel）、壓克力板、游標尺。

肆、研究過程

一、15cm 的尺

（一）五個刻度(1、4、5、11、13)

從 1cm 開始畫出長度為整數公分的線，一直畫到尺本身的長度 15cm，我們一下子就找出來了。

0～1　可畫 1cm	11～13 可畫 2cm	1～4　可畫 3cm
0～4　可畫 4cm	0～ 5 可畫 5cm	5～11 可畫 6cm
4～11 可畫 7cm	5～13 可畫 8cm	4～13 可畫 9cm
5～15 可畫 10cm	4～15 可畫 11cm	1～13 可畫 12cm
0～13 可畫 13cm	1～15 可畫 14cm	0～15 可畫 15cm

（二）四個刻度

我們把(1、4、5、11、13)去掉 4，只用(1、5、11、13)四個刻度，發現可畫出 1、2、4、5、6、8、10、11、12、13、14、15cm，無法畫出 3、7、9cm。

那麼其他的四個刻度可不可以呢？我們把所有可能的四個刻度都排列出來：

(1、2、3、4)、(1、2、3、5)…(1、2、3、14)	11 種
(1、2、4、5)、(1、2、4、6)…(1、2、4、14)	10 種
…………………………………	
(1、2、12、14)、(1、2、13、14)	2 種
(1、2、13、14)	1 種
(1、3、4、5)、(1、3、4、6)…(1、3、4、14)	10 種
(1、3、5、6)、(1、3、5、7)…(1、3、5、14)	9 種
…………………………………	
(1、3、13、14)	1 種
……………………………	
(1、11、12、14)、(1、11、13、14)	2 種
(1、11、13、14)	1 種
(1、12、13、14)	1 種

四個刻度一共有(11＋10＋…＋1)＋(10＋…＋1)＋…＋(2＋1)＋1＝286 種，不能把長度為整數 1~15cm 的線全部畫出，所以最少一定要有五個刻度。

二、刻度個數與間隔個數

那麼尺的長度與刻度個數有沒有關係呢？

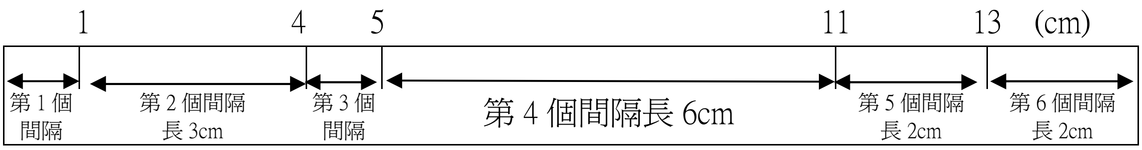

圖 2　5 個刻度有 6 個間隔

用刻度來畫線時，線的長度是用減法算出來的，例如要畫 6cm 的線是 11－5 算出來

的，老師建議我們改用間隔來算，變成加法可能會比較容易。所以五個刻度(1、4、5、11、13)就改記爲六個間隔(1、3、1、6、2、2)，如圖 2。

尺有 n 個刻度就有 n＋1 個間隔，要用 15cm 尺畫出長度爲整數 1~15cm 的線，最少要有六個間隔，那麼尺的長度與間隔個數有沒有關係呢？

三、間隔個數、尺長與各間隔長度

我們希望這尺可畫出長度爲 1、2、…、Kcm 的線，K 越大越好。我們以(1、2、3)表示 3 個間隔的長度各是 1、2、3cm，並且把可畫最大 K 的各間隔長度，稱爲最佳解。以下從最少的間隔數開始，來探討間隔個數與尺長、各間隔長度的關係。

（一） 1 個間隔

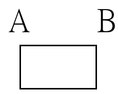

圖 3 一個間隔的尺

只有一個間隔所以沒有刻度如圖 3，尺的長度只有 1cm，最佳解是(1)。

（二） 2 個間隔

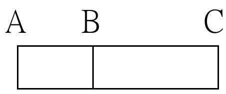

圖 4 二個間隔的尺

二個間隔的尺如圖 4，只有 1 個刻度，從 A 點開始可畫出 AB、AC 兩種長度的線，從 B 點開始可以畫出 BC 長度的線，所以有 2＋1＝3 種間隔。那麼，可不可以畫出 1~3cm 的線？

由於要從 1cm 開始畫線，所以一定要有一個間隔的長度是 1cm，因此，我們把所探討的尺，限定在第一個間隔長度爲 1cm 的範圍內。

我們找出最佳解是(1、2)，尺長爲 3cm，只有一個刻度是 1，如圖 5。

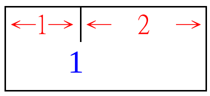

圖 5 二個間隔的最佳解

（三） 3 個間隔

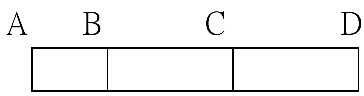

圖 6 三個間隔的尺

3 個間隔的尺如圖 6，從 A 點開始有 AB、AC、AD 三種間隔，從 B 點開始有 BC、

BD 二種間隔，從 C 點開始有 CD 一種間隔，所以總共有 3＋2＋1＝6 種間隔，那麼可以畫出 1~6cm 的線嗎？

我們把 3 個間隔長度共 6cm，第一個間隔長度是 1cm 的組合找出來，共有 4 種：(1、1、4)、(1、2、3)、(1、3、2)、(1、4、1)。

我們發現最佳解是(1、3、2)，最長的尺長爲 6cm，刻度是(1、4)，如圖 7。

圖 7 三個間隔的最佳解

（四）4 個間隔

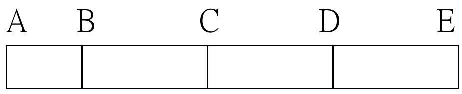

圖 8 四個間隔的尺

四個間隔的尺如圖 8，共有 $4+3+2+1=\dfrac{(4+1)\times 4}{2}=10$ 種間隔，第一個間隔長度是 1cm，4 個間隔長度共 10cm 的組合：

(1、1、1、7)、(1、1、2、6) 、…、(1、1、7、1)　　7 種
(1、2、1、6)、(1、2、2、5) 、…、(1、2、6、1)　　6 種
……………………
(1、6、1、2)、(1、6、2、1)　　2 種
(1、7、1、1)　　1 種

共有 $(7+6+5+4+3+2+1)=\dfrac{(7+1)\times 7}{2}=28$ 種，不能畫出 1~10cm，所以再檢查長度和 9cm 的組合。

4 個間隔長度共 9cm 的組合共有 $6+5+4+3+2+1=\dfrac{(6+1)\times 6}{2}=21$ 種，最佳解是(1、1、4、3)、(1、3、3、2)，可以量出最長的長度爲 9cm，如圖 9。

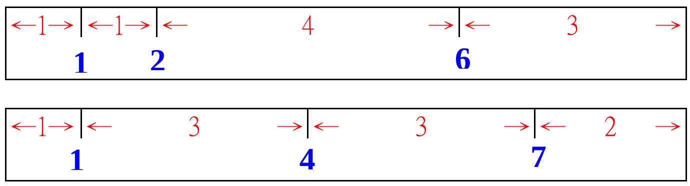

圖 9 四個間隔的最佳解有兩個

（五） 5 個間隔

因爲有 5 個間隔，所以共有 $5+4+3+2+1=\dfrac{(5+1)\times 5}{2}=15$ 種間隔，由於已知 15cm 的尺至少要有 6 個間隔，所以檢查長度和共 14 cm 的組合。

1、長度和為 14

5 個間隔長度共 14cm 的組合：

(1、1、1、1、10)、(1、1、1、2、9) 、…、(1、1、1、10、1)	10 種
(1、1、2、1、9)、(1、1、2、2、8) 、…、(1、1、2、9、1)	9 種
………………………………	
(1、1、9、1、1)	1 種
(1、2、1、1、9)、(1、2、1、2、8) 、…、(1、2、1、9、1)	9 種
(1、2、2、1、8)、(1、2、2、2、7) 、…、(1、2、8、1、1)	8 種
…………………………	
(1、2、9、1、1)	1 種
…………………	
(1、9、1、1、2)、(1、9、1、2、1)	2 種
(1、9、2、1、1)	1 種
(1、10、1、1、1)	1 種

總共有

(10＋9＋8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1)

＋(9＋8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1)

＋………

＋(2＋1)

＋(1)

＝220

我們發現 5 個間隔的 220 種組合總數，就是 4 個間隔的算法算 10 次(從 10 開始往下到 1)後的總和。由於這些組合越來越多，所以我們利用 Excel 試算表來計算，方法如表一：

表一

欄名	位置	公式	公式說明	範例
間隔 1	A2	1		1
間隔 2	B2	數字		1
間隔 3	C2	數字		1
間隔 4	D2	數字		1
間隔 5	E2	=14-A2-B2-C2-D2	14 減去前 4 個間隔長度	10
長度 1	F2	=A2		1
長度 2	G2	=A2＋B2		2
長度 3	H2	=A2＋B2＋C2		3
長度 4	I2	=A2＋B2＋C2＋D2		4

欄名	位置	公式	公式說明	範例
長度 5	J2	=A2＋B2＋C2＋D2＋E2		14
長度 6	K2	=B2		1
…	…	…	…	
長度 15	T2	=E2		10
1cm	U2	=COUNTIF(F2:T2,1)	計算長度 1 到長度 15 出現幾次 1	4
…	…	…	…	
14cm	AH2	=COUNTIF(F2:T2,14)	計算長度 1 到長度 15 出現幾次 14	1

另外老師教我們在計算出現幾次 1cm 到 14cm 的儲存格上，設定格式化的條件：如果儲存格的值大於 0，就讓儲存格變成紅色，這樣只要那一列計算出現幾次 1cm 到 14cm 的儲存格全部是紅色的，就是我們要的答案了！

結果 220 列沒有一列是全部紅的。

2、長度和為 13

長度和 13 cm 的第一種組合是(1、1、1、1、9)，所以從(1、1、1、1、9)到(1、9、1、1、1)的組合有：

(9＋8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1)
＋(8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1)
＋……
＋(2＋1)
＋(1)
＝165

最佳解是(1、1、4、4、3) 、(1、3、1、6、2)、(1、5、3、2、2)，如圖 10。

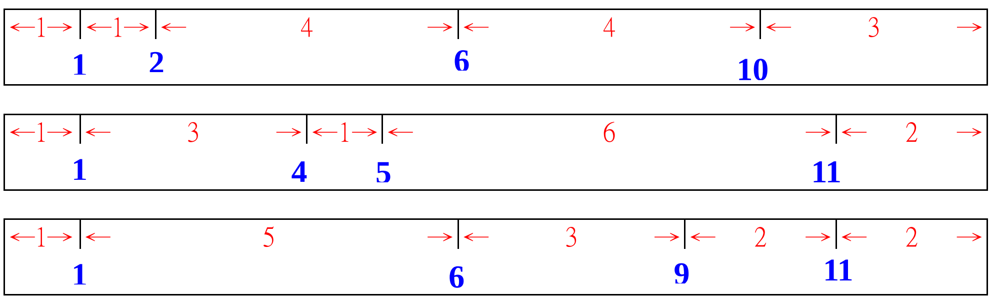

圖 10 五個間隔的最佳解

（六）6 個間隔

6 個間隔的尺，共有 $\frac{(6+1)\times 6}{2}$ ＝21 種間隔。由於 5 個間隔只能畫到 13cm，少了兩種，所以由 19 cm 開始檢查。第一種組合是(1、1、1、1、1、14)，第二個間隔長度

可以由 1 到 14。先假定第二個間隔長度爲 1，根據前面 5 個間隔的組合，(1、1、1、1、14)到(1、14、1、1、1)的組合共有：(14＋13＋⋯＋2＋1)＋(13＋12＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1=560

假定第二個間隔長度爲 2，(1、2、1、1、1、13)到(1、2、13、1、1、1)的組合共有：(13＋12＋⋯＋2＋1)＋(12＋11＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1

假定第二個間隔長度爲 3，(1、3、1、1、1、12)到(1、3、12、1、1、1)的組合共有：(12＋11＋⋯＋2＋1)＋(11＋10＋⋯＋1)＋⋯⋯＋(2＋1)＋1

以此類推， 6 個間隔的組合由(1、1、1、1、1、14)到(1、14、1、1、1、1)，共有：

[(14＋13＋12＋⋯＋2＋1)＋(13＋12＋⋯＋2＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1]

＋ [(13＋12＋⋯＋2＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1]

＋ ⋯⋯

＋ [(2＋1)＋1]

＋ [1]＝2380

這是 5 個間隔的算式算 14 次(由 14 開始到 1)後的總和。結果這 2380 列資料沒有找到；再檢查長度和爲 18 的 1820 列資料，也沒有找到。再檢查長度和爲 17 的組合，由(1、1、1、1、1、12)到(1、12、1、1、1、1)的 1365 列資料，找到了最佳解是(1、1、1、5、5、4)、(1、1、4、4、4、3)、(1、1、6、4、2、3)、(1、1、6、4、3、2)、(1、3、6、2、3、2)、(1、7、3、2、2、2)，如圖 11。

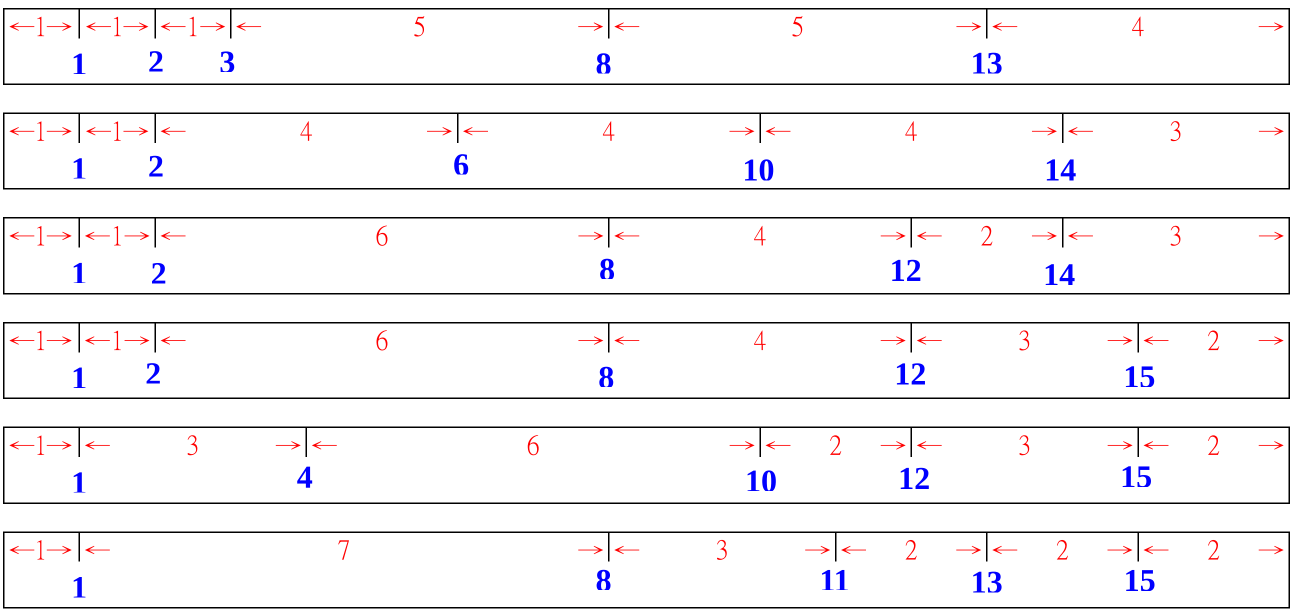

圖 11 六個間隔的最佳解

（七）7 個間隔

7 個間隔的尺，總共有$\frac{(7+1)\times 7}{2}$＝28 種間隔。由於 6 個間隔無法連續畫到 21cm，只能連續畫到 17cm，少了四種，所以由 24cm 開始檢查。

由前面 3~6 個間隔的組合總數算法，我們發現都可以用前一種的算式， 7 個間隔的第一種組合是(1、1、1、1、1、1、18)，是 6 個間隔的算式算 18 次(由 18 開始到 1)後的總和。(1、1、1、1、1、18)到(1、18、1、1、1、1)的組合共有：

{[(18＋17＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1]＋[(17＋16＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1]＋⋯＋[(2＋1)＋1]＋1}

＋{[(17＋16＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1] ＋[(16＋15＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1]＋⋯＋[(2＋1)＋1]＋1}

＋⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

＋{ [(2＋1)＋1]＋1}

＋{1}＝26334

這數量很大看得眼睛都花了，再修正試算表的公式如表二，增加了一格 BF2 來檢查 1cm 到 24cm 總共有幾個 0，如果 BF2 儲存格的值爲 0，表示可以畫出 1~24cm，再設定 BF2 格式化的條件：如果儲存格的值等於 0，讓儲存格變成藍色，這樣只要那一格變成藍色，就是我們要的答案了！

表二

欄名	位置	公式	公式說明	範例
間隔 1	A2	1		1
間隔 2	B2	數字		1
…	…	…	…	
間隔 6	F2	數字		1
間隔 7	G2	=24-A2-B2-C2-D2-E2-F2-	24 減去前 6 個間隔長度	18
長度 1	H2	=A2		1
長度 2	I2	=A2＋B2		2
…	…	…	…	
長度 27	AH2	=F2＋G2		19
長度 28	AI2	=G2		18
1cm	AJ2	=COUNTIF(H2:AI2,1)	計算長度 1 到長度 28 出現幾次 1	6
…	…	…	…	
24cm	BG2	=COUNTIF(H2:AI2,24)	計算長度 1 到長度 28 出現幾次 24	1
檢查 0	BH2	=COUNTIF(AJ2:BG2,0)	檢 1cm 到 24cm 的欄位有幾個 0	11

結果 26334 列資料都沒有，我們把長度和減爲 23，找到了最佳解(1、1、9、4、3、3、2)、(1、3、6、6、2、3、2)。

（八）8 個間隔

8 個間隔的尺，總共有 $\frac{(8+1)\times 8}{2}$ ＝36 種間隔。由於 7 個間隔無法連續畫到 28cm，只能連續畫到 23cm，少了五種，所以由 31cm 開始檢查。

8 個間隔的第一種組合是(1、1、1、1、1、1、1、24)，是 7 個間隔的算法算 24 次(由 24 到 1)後的總和。我們檢查了(1、1、1、1、1、1、1、24)到(1、24、1、1、1、1、1、1)總共 475020 種組合，沒有發現最佳解。尺長改爲 30cm，檢查(1、1、1、1、1、1、1、23)到(1、23、1、1、1、1、1、1) 的 376740 種組合，還是沒有發現，就再檢查(1、1、1、1、1、1、1、22)到(1、22、1、1、1、1、1、1)的 296010 種組合，終於找到了最佳解

(1、1、12、4、3、3、3、2)、(1、2、3、7、7、4、4、1)、
(1、3、6、6、6、2、3、2)、(1、4、4、7、7、3、2、1)。

伍、研究結果

一、這支 15cm 尺所使用的刻度可不可以再少一點？

15cm 尺用 5 個刻度 1、4、5、11、13 可以畫出長度爲整數 1~15cm 的線，用 4 個刻度不能。

二、尺長和間隔個數有沒有關係？

我們發現間隔數和幾種間隔是有關係的，見表三，如果這把尺有 N 個間隔，幾種間隔的算法就是 $\frac{(N+1)\times N}{2}$ 種間隔。

表三

間隔數	產生幾種間隔	公式算法
1	1	1
2	2＋1	$\frac{(2+1)\times 2}{2}=3$
3	3＋2＋1	$\frac{(3+1)\times 3}{2}=6$
4	4＋3＋2＋1	$\frac{(4+1)\times 4}{2}=10$
5	5＋4＋3＋2＋1	$\frac{(5+1)\times 5}{2}=15$
6	6＋5＋4＋3＋2＋1	$\frac{(6+1)\times 6}{2}=21$
7	7＋6＋5＋4＋3＋2＋1	$\frac{(7+1)\times 7}{2}=28$
8	8＋7+6＋5＋4＋3＋2＋1	$\frac{(8+1)\times 8}{2}=36$

如果這把尺產生的 $\frac{(N+1)\times N}{2}$ 種間隔的長度沒有重覆，尺長就是 $\frac{(N+1)\times N}{2}$ cm，不

然就小於$\dfrac{(N+1)\times N}{2}$cm，所以尺長不會超過$\dfrac{(N+1)\times N}{2}$cm。

三、這些間隔很少的尺，可以量出最長的長度是多少？要如何定這些刻度？

我們找出 1~8 個間隔的最佳解、可量出的最長長度以及刻度的定法，詳見表四。

表四

間隔數	最長長度	各間隔長度(最佳解)	刻度
1	1	(1)	沒有
2	3	(1、2)	(1)
3	6	(1、3、2)	(1、4)
4	9	(1、1、4、3) (1、3、3、2)	(1、2、6) (1、4、7)
5	13	(1、1、4、4、3) (1、3、1、6、2) (1、5、3、2、2)	(1、2、6、10) (1、4、5、11) (1、6、9、11)
6	17	(1、1、1、5、5、4) (1、1、4、4、4、3) (1、1、6、4、2、3) (1、1、6、4、3、2) (1、3、6、2、3、2) (1、7、3、2、2、2)	(1、2、3、8、13) (1、2、6、10、14) (1、2、8、12、14) (1、2、8、12、15) (1、4、10、12、15) (1、8、11、13、15)
7	23	(1、1、9、4、3、3、2) (1、3、6、6、2、3、2)	(1、2、11、15、18、21) (1、4、10、16、18、21)
8	29	(1、1、12、4、3、3、3、2) (1、2、3、7、7、4、4、1) (1、3、6、6、6、2、3、2) (1、4、4、7、7、3、2、1)	(1、2、14、18、21、24、27) (1、3、6、13、20、24、28) (1、4、10、16、22、24、27) (1、5、9、16、23、26、28)

陸、討論

一、尺長和間隔數

我們在網路上找到「節約尺」的資料－2005 網際網路程式設計全國大賽高中組的決賽題目。題目上說一把總長度為 K 的節約尺一定要符合兩個條件：

(1) 必需可以量出 1 到 K 之間所有整數公分長。

(2) 總刻度數不等於 K，這裡的刻度數定義為尺上刻痕所分隔的片段個數。

原來老師給的 15cm 尺是一把最少刻度的節約尺，題目所說的「刻度」就是我們的「間隔」，他們要設計程式判斷一組「刻度」所組成的尺是不是節約尺，但並沒有要判斷是不

是最少「刻度」。我們的最佳解，是 N 個間隔的節約尺中長度最長的，同時也是該長度的節約尺中間隔個數最少的。

N 個間隔的節約尺，一定可以量 $\frac{(N+1)\times N}{2}$ 種間隔，但是不一定可以由 1、2、…、到 $\frac{(N+1)\times N}{2}$ cm，間隔數越多，長度重覆的情形就越多，如表五。

表五

間隔數	可量出的間隔數	尺長	長度重覆次數
1	1	1	0
2	3	3	0
3	6	6	0
4	10	9	1
5	15	13	2
6	21	17	4
7	28	23	5
8	36	29	7

由於我們所研究的是最少間隔而且長度最長的節約尺，所以根據表五可以推出 1~30cm 的節約尺所需要的最少間隔數，詳見表六。

表六

尺長	1	2~3	4~6	7~9	10~13	14~17	18~23	24~29	30
最少的間隔數	1	2	3	4	5	6	7	8	9

二、間隔組合總數

我們從 1 個間隔開始，找出所有的間隔組合起迄，並算出間隔組合總數詳見表七。除了間隔數是 1 和 2 以外，其他都是由第一個間隔組合的最後一個間隔長度開始往下遞減計算的，而且是用前一種間隔組合總數的算式算出，並且以此算式往下算到 1 後的總和。

表七

間隔數	尺長	間隔組合起迄	間隔組合總數的算法
1	1	(1)	1
2	3	(1、2)	1
3	6	(1、1、4)~(1、4、1)	4
4	10	(1、1、1、7)~(1、7、1、1)	7+6+5+4+3+2+1
5	15	(1、1、1、1、11) ~(1、11、1、1、1)	(11+10+⋯+1)+(10+9+⋯+1)+⋯+(2+1)+(1)

間隔數	尺長	間隔組合起迄	間隔組合總數的算法
6	19	(1、1、1、1、1、14) ~(1、14、1、1、1、1)	[(14＋13＋⋯＋1)＋(13＋12＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1] ＋ [(13＋12＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1] ＋ ⋯⋯⋯⋯ ＋ [(2＋1)＋1] ＋ [1]
7	24	(1、1、1、1、1、1、18) ~(1、18、1、1、1、1、1)	{[(18＋17＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1]＋[(17＋⋯＋1) ＋⋯＋(2＋1)＋1]＋⋯＋[(2＋1)＋1]＋1} ＋ {[(17＋16＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1] ＋[(16＋15 ＋⋯＋1)＋⋯＋(2＋1)＋1]＋⋯＋[(2＋1)＋1]＋1} ＋⋯⋯⋯⋯ ＋ { [(2＋1)＋1]＋1} ＋ { 1 }

間隔組合總數會受間隔數、尺長的影響，由於我們限定第一個間隔長度為 1cm，當間隔數是 3、尺長是 6 時，間隔第一種組合就是(1、1、4)。間隔數是 4，尺長是 10 時，第 4 個間隔長度就是 10－3＝7；尺長是 9 時，第 4 個間隔長度就是 9－3＝6。所以如果間隔數是 m，尺長是 K，那麼第一個間隔組合的前面 m－1 個間隔長度是 1，最後一個間隔長度就是 K－(m－1)。

以下我們把間隔組合總數的算法推廣到一般情形，間隔組合是由(1、⋯、1、A)～(1、A、⋯、1)時，這裏所討論的尺並沒有限定是節約尺，當 A 分別是 1、2、3、4、5、⋯時，

3 個間隔組合總數是 1、2、3、4、5、⋯

4 個間隔組合總數是 1、3、6、10、15、21、28、36、45、55、66、78、⋯

5 個間隔組合總數是 1、4、10、20、35、56、85、120、165、220、286、⋯

6 個間隔組合總數是 1、5、15、35、70、126、210、330、495、715、1001、1365、⋯

7 個間隔組合總數是 1、6、21、56、126、252、462、792、1287、2002、3003、4368、⋯

8 個間隔組合總數是 1、7、28、84、210、462、924、1716、3432、6435、11440、19448、⋯

我們把這些數列排在試算表，詳見表八，發現一些有趣的現象：

表八

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	⋯
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	⋯
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	⋯
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	⋯
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	⋯
5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	⋯
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3432	6435	11440	⋯

(一) 每個數列都由 1 開始的。

(二)　下一列的數是由上一列的前幾項連加產生的，例如，B2＝A1＋B1，E4= A3＋B3＋C3＋D3＋E3。

(三)　每一格是左方格和上方格的和，例如 C2= A1＋B1＋C1=B2＋C1，F4=A3＋B3＋C3＋D3＋E3＋F3=E4＋F3。

我們利用(一)和(三)的發現，使用試算表以公式複製，就可拉出很大的範圍，還把這公式往前推，如表九。想要知道 9 個間隔(1、14、1、1、1、1、1、1、1)~(1、1、1、1、1、1、1、1、14)共有幾種組合，只要查表九中 9 個間隔數列的第 14 項，就可以知道共有 77520 種組合了。

表九

2 個間隔	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3 個間隔	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4 個間隔	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
5 個間隔	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680
6 個間隔	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060
7 個間隔	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628
8 個間隔	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760
9 個間隔	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	116280

我們在觀察表九時，覺得好像在那裏看過，當把表格轉 45^0，赫然發現這不就是課本上的巴斯卡三角形嗎？

三、最佳解的規律

在表四「間隔數與最佳解」中，很難觀察出有什麼規律，但是有發現一些線索：

(一)　每種間隔數都有(1、…、2)這樣的最佳解。

(二)　大部分最佳解的最後一個數字是 2 或 3。

(三)　從間隔數 4 以上，都有(1、1、…)的這樣的最佳解。

(四)　除了 5 個間隔以外，3~8 個間隔都有(1、…、3、2)這樣的最佳解。

(五)　6~8 個間隔都有(1、3、…、2、3、2) 這樣的一組最佳解。

(六)　6 個間隔有(1、1、…、3、2)的最佳解，7 個間隔有(1、1、…、3、3、2)，8 個間隔有(1、1、…、3、3、3、2)。

柒、結論

這次我們做了「神奇的尺」這個題目，才發現尺只用幾個刻度，可畫出由 1cm 開始到尺長的線，不過還是需要一定的刻度數量，而且方法也不只一種呢！剛開始間隔少時，最佳解還好找，不過，到了五個間隔時，數量多了，算得頭都昏了，所以我們利用電腦的 EXCEL 裡的公式－COUNTIF 來找。間隔變多了，間隔組合變化也跟著變多，算間隔組合總數的算式，變得越來越長，實在看得眼花撩亂！當我們把這些間隔組合總數的數列排在一起，竟然看到了巴斯卡三角形，這尺的確是很神奇呀！

捌、參考資料及其他

一、Brian Bolt(著)林傑斌(譯)(民 85)。**數學遊樂園之趣味盎然**。臺北市：牛頓。

二、2005 網際網路程式設計全國大賽：http://contest.cc.ntu.edu.tw/npsc2005/

080408