080411

排排看

壹、摘要

有 x 瓶牛奶，要排在 n×n 的正方形牛奶箱中，要如何排，才能使得牛奶箱中的(1)每行每列皆為奇數瓶(2)每行每列皆為偶數瓶(3)行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶。要回答上述的問題，可實際上去排一排，或經由解聯立方程式，得知行列瓶數的組合情形，再去排列。除此之外，是否可找到一種不經由解聯立方程式，就可以操縱排牛奶瓶的方法？此為本研究的目的。最後再進一步推廣到長方形。

貳、研究動機：

有一次上數學課，同學問老師一個問題：「有 11 瓶牛奶要排在一個可容納 25 瓶牛奶的正方形牛奶箱中，要怎麼排，才可使得牛奶箱中每行、每列的瓶數皆為奇數？」老師說，這個問題很有趣，要我們想想看。

參、研究目的：

一、探討正方形牛奶箱：

(一)、藉由聯立方程式的討論及實際排列，找出每行、每列的瓶數

1、皆為奇數時的 x 值。

2、皆為偶數時的 x 值。

3、一邊為奇數，另一邊為偶數時的 x 值。

(二)、當牛奶瓶數為 x 時，利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之。

(三)、當牛奶瓶數為 x 時，不利用聯立方程式，而另外找出一個可操縱排牛奶瓶的方法。

二、探討長方形牛奶箱：

(一)、藉由聯立方程式的討論及實際排列，找出每行、每列的瓶數

1、皆為奇數時的 x 值。

2、皆為偶數時的 x 值。

3、一邊為奇數，另一邊為偶數時的 x 值。

(二)、當牛奶瓶數為 x 時，利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之。

(三)、當牛奶瓶數為 x 時，不利用聯立方程式，而另外找出一個可操縱排牛奶瓶的方法。

肆、研究設備及器材：

紙、筆、牛奶箱模型、牛奶瓶模型。

伍、研究過程：

一、定義：

（一）符號：

1. x：牛奶瓶數（$x \in N$）。
2. n：牛奶箱的行數（$n \in N$）。
3. m：牛奶箱的列數（$m \in N$）。
4. ●：代表牛奶瓶。
5. a_{2k}(或 a_{2k+1})：每行排 2k（或 2k＋1）瓶的行數。例如：$a_2=3$ 表示每行排 2 瓶的行數有 3 行。
6. b_{2k}(或 b_{2k+1})：每列排 2k（或 2k＋1）瓶的列數。例如：$b_4=5$ 表示每列排 4 瓶的列數有 5 列。

（二）名詞解釋：

1. m×n 的牛奶箱：表示此牛奶箱的長邊有 n 格，寬邊有 m 格，如圖 1 所示。

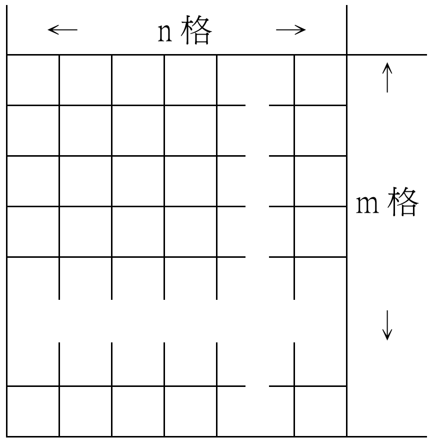


圖 1

2.對角線：在本篇報告中的對角線，如果牛奶箱不是正方形，則對角線指的是“長方形中左邊之最大正方形的對角線”，亦即長方形 $m\times n(m<n)$，我們取“$m\times m$”(正方形)中的對角線，如圖 2 所示。

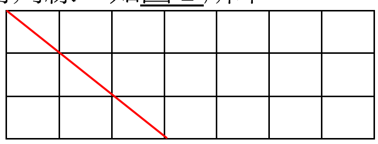


圖 2

二、探討正方形牛奶箱：

根據牛奶箱的行數 n 爲奇數或偶數，而把正方形牛奶箱分爲正奇數牛奶箱和正偶數牛奶箱兩種。我們利用總行數、總列數以及瓶數間的關係來找這兩種牛奶箱在不同條件下的 x 值。

(一)牛奶箱在行列皆爲奇數瓶時，運用下述 1.~ 3.的關係來找 x 值。

1.總行數 $n=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}$

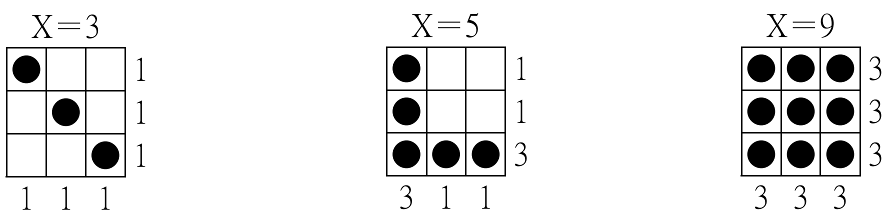
2.總列數 $n=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2k+1}$

3.瓶數 $x=1\times a_1+3\times a_3+5\times a_5+\cdots+(2k+1)\times a_{2k+1}$

$=1\times b_1+3\times b_3+5\times b_5+\cdots+(2k+1)\times b_{2k+1}$

4.舉一個例子來說明如何找出 x 值。如圖三

〔例一〕：找出〝3×3〞的牛奶箱且行列皆爲奇數瓶時的 x 值。



(說明)：(1)行的關係⇒總行數：$a_1+a_3=3$…①

瓶數：$1\times a_1+3\times a_3=x$…②

由①得(a_1、a_3)＝(3、0)或(2、1)或(1、2)或(0、3

分別將(a_1、a_3)的值代入②，得到 x＝3、5、7、9，

(2)列的關係⇒總列數：$b_1+b_3=3$…①

瓶數：$1\times b_1+3\times b_3=x$…②

由①得(b_1、b_3)＝(3、0)或(2、1)或(1、2)或(0、3)

分別將(b_1、b_3)的值代入②，得到 x＝3、5、7、9，

(3)由行與列的關係找到 $x=3$、5、7、9，但實際排列時，$x=7$ 無法排出，所以當〝3×3〞的牛奶箱且行列皆為奇數瓶時，$x=3$、5、9。

(4)$x=3$、5、9 的排列情形如上。

圖三

(二)牛奶箱在行列皆為偶數瓶時，運用下述 1.~ 3.的關係來找 x 值。

1.總行數 $n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$

2.總列數 $n=b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2k}$

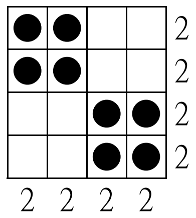
3.瓶數 $x=2\times a_2+4\times a_4+6\times a_6+\cdots+2k\times a_{2k}$

$=2\times b_2+4\times b_4+6\times b_6+\cdots+2k\times b_{2k}$

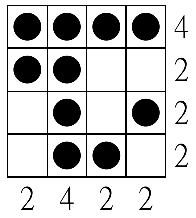
4.舉一個例子來說明如何找出 x 值。如圖四

〔例二〕：找出〝4×4〞的牛奶箱且行列皆為偶數瓶時的 x 值。

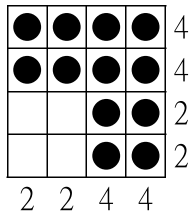
$X=8$



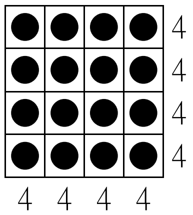
$X=10$



$X=12$



$X=16$



(說明)：(1)行的關係⇒總行數：$a_2+a_4=4\cdots$①

瓶數：$2\times a_2+4\times a_4=x\cdots$②

由①得(a_2、a_4)＝(4、0)或(3、1)或(2、2)或(1、3)或(0、4)

分別將(a_2、a_4)的值代入②，得到 $x=8$、10、12、14、16

(2)列的關係⇒總列數：$b_2+b_4=4\cdots$①

瓶數：$2\times b_2+4\times b_4=x\cdots$②

由①得(b_2、b_4)＝(4、0)或(3、1)或(2、2)或(1、3)或(0、4)

分別將(b_2、b_4)的值代入②，得到 $x=8$、10、12、14、16

(3)由行與列的關係找到 $x=8$、10、12、14、16，但實際排列時，$x=14$ 無法排出，所以當〝4×4〞的牛奶箱且行列皆為偶數瓶時，$x=8$、10、12、16。

(4)$x=8$、10、12、16 的排列情形如上。

圖四

(三)牛奶箱的行列中一邊為奇數瓶，而另一邊為偶數瓶時，運用下述 1.~ 2.的關係來找 x 值。

1.奇數瓶：(1)總行數 $n=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}$

(2)總列數 $n=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2k+1}$

(3)瓶數 $x=1\times a_1+3\times a_3+5\times a_5+\cdots+(2k+1)\times a_{2k+1}$

$=1\times b_1+3\times b_3+5\times b_5+\cdots+(2k+1)\times b_{2k+1}$

2.偶數瓶：(1)總行數 $n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$

(2)總列數 $n=b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2k}$

(3)瓶數 $x=2\times a_2+4\times a_4+6\times a_6+\cdots+2k\times a_{2k}$

$=2\times b_2+4\times b_4+6\times b_6+\cdots+2k\times b_{2k}$

3.舉一個例子來說明如何找出 x 值。如圖五

〔例三〕：找出〝4x4〞的牛奶箱且行列中一邊爲奇數瓶，另一邊爲偶數瓶時的 x 值。

X＝8

●	●			2
●	●			2
●		●		2
	●		●	2
3	3	1	1	

X＝10

●	●	●	●	4
●	●			2
●		●		2
	●	●		2
3	3	3	1	

X＝12

●	●	●	●	4
●	●	●	●	4
●	●			2
		●	●	2
3	3	3	3	

(說明)：假設每行要排奇數瓶，每列要排偶數瓶

(1)行的關係⇒總行數：$a_1+a_3=4\cdots$①

瓶數：$1\times a_1+3\times a_3=x\cdots$②

由①得$(a_1、a_3)=(4、0)$或$(3、1)$或$(2、2)$或$(1、3)$或$(0、4)$

分別將$(a_1、a_3)$的值代入②，得到 $x=4、6、8、10、12$

(2)列的關係⇒總列數：$b_2+b_4=4\cdots$①

瓶數：$2\times b_2+4\times b_4=x\cdots$②

由①得$(b_2、b_4)=(4、0)$或$(3、1)$或$(2、2)$或$(1、3)$或$(0、4)$

分別將$(b_2、b_4)$的值代入②，得到 $x=8、10、12、14、16$

(3)因爲一邊爲奇數瓶，而另一邊爲偶數瓶，故此時的 x 值爲行與列中找到之 x 值的交集。所以當〝4x4〞的牛奶箱且行列中一邊爲奇數瓶，另一邊爲偶數瓶時，$x=8、10、12$。

(4)$x=8、10、12$ 的排列情形如上。

圖五

(四)我們同上述(一)、(二)、(三)的方法來找〝3x3〞、〝5x5〞、〝7x7〞、…的牛奶箱且行列皆爲奇數瓶、偶數瓶或行列中一邊爲奇數瓶，另一邊爲偶數瓶時的 x 值，而歸納整理成表一。

表一：正奇數牛奶箱(n×n，n 爲奇數)

x / (n×n)	行列皆爲奇數瓶	行列皆爲偶數瓶	行、列中一邊爲奇數瓶，另一邊爲偶數瓶
3x3	3、5、9	6	╳
5x5	5、7、9、…19、21、25	10、12、14、16、18、20	╳
7x7	7、9、11、…43、45、49	14、16、18、…38、40、42	╳
9x9	9、11、13、…75、77、81	18、20、22、…68、70、72	╳
⋮	⋮	⋮	╳
n×n	n、n+2、n+4、n+	2n、2n+2、2n+	╳

(n 為奇數)	6……… …………、n^2-6、n^2-4、n^2	4、……… …、n×(n-1)-2、n×(n-1)	

說明：

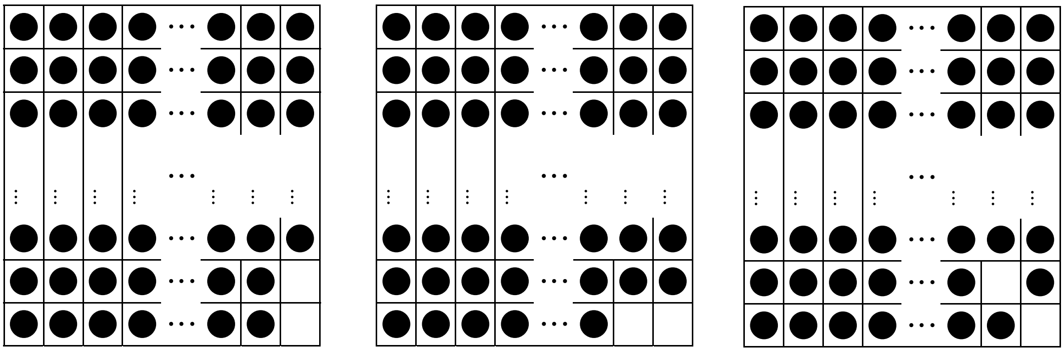
1、行列皆為奇數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行(或每列)都排一瓶，此時 x＝1×n＝n。

(2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿，此時 x＝n×n＝n^2。

(3)x 為奇數個奇數瓶之和，故 x 必為奇數。

(4)當 x＝n^2-2 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行列皆為奇數，所以 x 不為 n^2-2。



(5)由上述(1)~(4)知：x 從最小值 n 到最大值 n^2 間，每增加 2 瓶都可排出，但 x＝n^2-2 除外。

2、行列皆為偶數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行(或每列)都排二瓶，此時 x＝2×n＝2n。

(2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿少一瓶，此時 x＝(n-1)×n。

(3)x 為奇數個偶數瓶的和，故 x 必為偶數。

(4)由上述(1)~(3)知：x 從最小值 2n 到最大值 n×(n-1)間，每增加 2 瓶都可排出。

3、行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時：

行列中一邊為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和，x 必為奇數；而另一邊為偶數瓶，則 x 為奇數個偶數瓶之和，x 必為偶數。因此若要一邊為奇數瓶，而另一邊為偶數瓶，x 就得同時為奇數和偶數，故 x 無解。

(五)我們同上述(一)、(二)、(三)的方法來找〝2×2〞、〝4×4〞、〝6×6〞、…的牛奶箱且行列皆為奇數瓶、偶數瓶或行列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時的 x 值，而歸納整理成表二。

表二：正偶數牛奶箱(n×n，n 為偶數)			
x / (n×n)	行列皆為奇數瓶	行列皆為偶數瓶	行、列中 一邊為奇數瓶， 另一邊為偶數瓶

2×2	2	4	╳
4×4	4、6、8、10、12	8、10、12、16	8、10、12
6×6	6、8、10、…26、28、30	12、14、16、…30、32、36	12、14、16、…26、28、30
8×8	8、10、12、…52、54、56	16、18、20、…58、60、64	16、18、20、…52、54、56
⋮	⋮	⋮	⋮
n×n (n 為偶數)	n、n＋2、n＋4、n＋6……… ……n×(n-1)-2、n×(n-1)	2n、2n＋2、2n＋4、…… …………、n^2-6、n^2-4、n^2	2n、2n＋2、2n＋4、…… ……、n×(n-1)-2、n×(n-1)

說明：

1、行列皆為奇數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行(或每列)都排一瓶，此時 x＝1×n＝n。

(2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿少一瓶，此時 x＝(n-1)×n。

(3)x 為偶數個奇數瓶的和，故 x 必為偶數。

(4)由(1)~(3)知：x 從最小值 n 到最大值(n-1)×n 間，每增加 2 瓶都可排出。

2、行列皆為偶數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行(或每列)都排二瓶，此時 x＝2×n＝2n。

(2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿，此時 x＝n×n＝n^2。

(3)x 為偶數個偶數瓶的和，故 x 必為偶數。

(4)當 x＝n^2-2 時，只有三種排法，而這三種排法均無法使行列皆為偶數，所以 x 不為 n^2-2。(此三種排法見於第六頁說明 1)

(5)由(1)~(4)知：x 從最小值 2n 到最大值 n^2 間，每增加 2 瓶都可排出，但 x＝n^2-2 除外。

3、行、列中一邊為奇數瓶，另一邊為偶數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每列都排二瓶，此時 x＝2×n＝2n。

(2)x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 x＝(n-1)×n。

(3)x 為偶數個奇數瓶的和(或偶數個偶數瓶的和)，故 x 必為偶數。

(4)由(1)~(3)知：x 從最小值 2n 到最大值(n-1)×n 間，每增加 2 瓶都可排出。

(六)利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之

當知道排列的瓶數 x 和牛奶箱大小(n×n)，以及行列瓶數限制的條件後，就可利用總行數、總列數以及瓶數間的關係找出(a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1})(或(a_2、a_4、a_6、…、a_{2k}))的值，然後再根據 a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1}(或 a_2、a_4、a_6…、a_{2k})的情形排列之。

1.行列瓶數限制皆為奇數瓶時，運用下述(1)~(3)的關係來找出(a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1})的值，然後再根據 a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1} 的情形排列之。

(1)總行數 $n=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}$

(2)總列數 $n=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2k+1}$

(3)瓶數 $x=1\times a_1+3\times a_3+5\times a_5+\cdots+(2k+1)\times a_{2k+1}$

$=1\times b_1+3\times b_3+5\times b_5+\cdots+(2k+1)\times b_{2k+1}$

2.舉一個例子來說明如何找出(a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1})的值，然後再根據 a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1} 的情形排列之。如圖六

〔例四〕:將 11 瓶牛奶排在〝5×5〞的牛奶箱中，且行列皆爲奇數瓶。

排法 1

●	●	●			3
●	●	●			3
●		●		●	3
			●		1
	●				1
3	3	3	1	1	

排法 2

●	●	●	●	●	5
●	●	●			3
●					1
		●			1
	●				1
3	3	3	1	1	

排法 3

●	●	●			3
●	●		●		3
●	●			●	3
●					1
●					1
5	3	1	1	1	

(說明)：(1)行的關係⇒總行數：$a_1+a_3+a_5=5$…①

瓶數：$1\times a_1+3\times a_3+5\times a_5=11$…②

由②-①得 $2a_3+4a_5=6$ ⇒$a_3+2a_5=3$ ⇒$a_3=3-2a_5$

將 $a_3=3-2a_5$ 代入①得 $a_1=a_5+2$

又因爲 $a_1+a_3+a_5=5$，故可得如下的結果。

a_5	0	1	2	3	4	…
a_3	3	1	-1	-3	-5	負數
a_1	2	3	4	5	6	…
			不合	不合	不合	不合

故找到(a_1、a_3、a_5)=(2、3、0)或(3、1、1)

(2)列的關係：因爲此爲正方形牛奶箱，故列的情形和行的情形一樣，亦即可以找到相同的結果，所以可得(b_1、b_3、b_5)=(2、3、0)或(3、1、1)

(3)由(1)、(2)知：行列共有 4 種組合，其排法如上。

排法 1：(a_1、a_3、a_5)=(2、3、0)、(b_1、b_3、b_5)=(2、3、0)

排法 2：(a_1、a_3、a_5)=(2、3、0)、(b_1、b_3、b_5)=(3、1、1)

排法 3：(a_1、a_3、a_5)=(3、1、1)、(b_1、b_3、b_5)=(2、3、0)

排法 4：(a_1、a_3、a_5)=(3、1、1)、(b_1、b_3、b_5)=(3、1、1)無法排出。

圖六

3.行列瓶數限制皆爲偶數瓶時，運用下述(1)~(3)的關係來找出(a_2、a_4、a_6、…、a_{2k})的值，然後再根據 a_2、a_4、a_6、…、a_{2k} 的情形排列之。

(1)總行數 $n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$

(2)總列數 $n=b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2k}$

(3)瓶數 $x=2\times a_2+4\times a_4+6\times a_6+\cdots+2k\times a_{2k}$

$=2\times b_2+4\times b_4+6\times b_6+\cdots+2k\times b_{2k}$

4.舉一個例子來說明如何找出(a_2、a_4、a_6、…、a_{2k})的值，然後再根據 a_2、a_4、a_6、…、a_{2k} 的情形排列之。如圖七

〔例五〕:將 20 瓶牛奶排在〝6×6〞的牛奶箱中，且行列皆爲偶數瓶。

排法 1

●	●	●	●			4
●	●	●	●			4
●	●			●	●	4
●	●		●	●		4
		●			●	2
		●	●			2
4	4	4	4	2	2	

排法 2

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●			4
●	●		●	●		4
●	●					2
		●			●	2
		●	●			2
4	4	4	4	2	2	

排法 3

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●	●	●	6
●	●					2
●	●					2
		●	●			2
		●	●			2
4	4	4	4	2	2	

排法 4

●	●	●	●			4
●	●	●	●			4
●	●			●	●	4
●	●	●		●		4
●					●	2
●		●				2
6	4	4	2	2	2	

排法 5

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●			4
●	●			●	●	4
●		●				2
●	●					2
●		●				2
6	4	4	2	2	2	

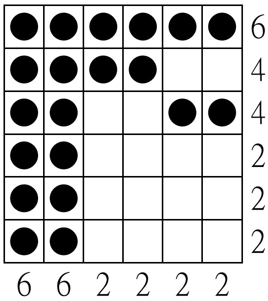
排法 6

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●	●	●	6
●	●					2
●		●				2
●	●					2
●		●				2
6	4	4	2	2	2	

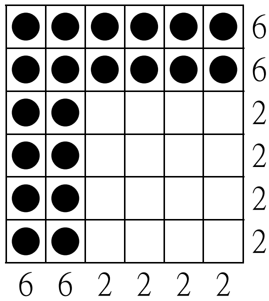
排法 7

●	●	●	●			4
●	●	●	●			4
●	●			●	●	4
●	●			●	●	4
●	●					2
●	●					2
6	6	2	2	2	2	

排法 8



排法 9



(說明)：(1)行的關係⇒總行數：$a_2+a_4+a_6=6$…①

瓶數：$2\times a_2+4\times a_4+6\times a_6=20$…②

由②-①×2 得 $2a_4+4a_6=8$ ⇒$a_4+2a_6=4$

⇒$a_4=4-2a_6$，將 $a_4=4-2a_6$ 代入①得 $a_2=a_6+2$

又因爲 $a_2+a_4+a_6=6$，故可得如下的結果。

a_6	0	1	2	3	4	…
a_4	4	2	0	-2	-4	負數
a_2	2	3	4	5	6	…
				不合	不合	不合

故找到(a_2、a_4、a_6)=(2、4、0)或(3、2、1)或(4、0、2)

(2)列的關係：因爲此爲正方形牛奶箱，故列的情形和行的情形一樣，亦即可以找到相同的結果，所以可得(b_2、b_4、b_6)=(2、4、0)或(3、2、1)或(4、0、2)

(3)由(1)、(2)知：行列共有 9 種組合，其排法如上。

排法 1：(a_2、a_4、a_6)=(2、4、0)、(b_2、b_4、b_6)=(2、4、0)
排法 2：(a_2、a_4、a_6)=(2、4、0)、(b_2、b_4、b_6)=(3、2、1)
排法 3：(a_2、a_4、a_6)=(2、4、0)、(b_2、b_4、b_6)=(4、0、2)
排法 4：(a_2、a_4、a_6)=(3、2、1)、(b_2、b_4、b_6)=(2、4、0)
排法 5：(a_2、a_4、a_6)=(3、2、1)、(b_2、b_4、b_6)=(3、2、1)
排法 6：(a_2、a_4、a_6)=(3、2、1)、(b_2、b_4、b_6)=(4、0、2)
排法 7：(a_2、a_4、a_6)=(4、0、2)、(b_2、b_4、b_6)=(2、4、0)
排法 8：(a_2、a_4、a_6)=(4、0、2)、(b_2、b_4、b_6)=(3、2、1)
排法 9：(a_2、a_4、a_6)=(4、0、2)、(b_2、b_4、b_6)=(4、0、2)

圖七

5.牛奶箱的行列中一邊爲奇數瓶，而另一邊爲偶數瓶時，運用下述(1)~(3)的關係來找出(a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1})的值，以及(4)~(6)的關係來找出(a_2、a_4、a_6、…、a_{2k})的值，然後再根據 a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1} 和 a_2、a_4、a_6、…、a_{2k} 的情形排列之。

(1)總行數 $n=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}$

(2)總列數 $n=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2k+1}$

(3)瓶數 $x=1\times a_1+3\times a_3+5\times a_5+\cdots+(2k+1)\times a_{2k+1}=1\times b_1+3\times b_3+5\times b_5+\cdots+(2k+1)\times b_{2k+1}$

(4)總行數 $n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$

(5)總列數 $n=b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2k}$

(6)瓶數 $x=2\times a_2+4\times a_4+6\times a_6+\cdots+2k\times a_{2k}=2\times b_2+4\times b_4+6\times b_6+\cdots+2k\times b_{2k}$

6.舉一個例子來說明如何找出(a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1})和(a_2、a_4、a_6、…、a_{2k})的值，然後再根據 a_1、a_3、a_5、…、a_{2k+1} 和 a_2、a_4、a_6、…、a_{2k} 的情形排列之。如圖八

〔例六〕:將 20 瓶牛奶排在〝6×6〞的牛奶箱中，且行列中一邊爲奇數瓶，另一邊爲偶數瓶。

排法 1

●	●	●	●			4
●	●	●	●			4
●			●	●	●	4
●	●			●	●	4
●					●	2
		●		●		2
5	3	3	3	3	3	

排法 2

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●			4
●			●	●	●	4
●	●					2
●					●	2
		●		●		2
5	3	3	3	3	3	

排法 3

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●	●	●	6
●			●			2
●	●					2
●					●	2
		●		●		2
5	3	3	3	3	3	

排法 4

●	●	●	●			4
●	●	●	●			4
●	●		●	●		4
●	●			●	●	4
●				●		2
	●	●				2
5	5	3	3	3	1	

排法 5

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●			4
●	●		●	●		4
●	●					2
●				●		2
	●	●				2
5	5	3	3	3	1	

排法 7

●	●	●	●			4
●	●	●	●			4
●	●	●	●			4
●	●	●		●		4
●	●					2
		●			●	2
5	5	5	3	1	1	

排法 8

●	●	●	●	●	●	6
●	●	●	●			4
●	●	●	●			4
●	●					2
●		●				2
	●	●				2
5	5	5	3	1	1	

(說明)：(1)行的關係：假設每行排奇數瓶

⇒總行數：$a_1+a_3+a_5=6$⋯①

瓶數：$1\times a_1+3\times a_3+5\times a_5=20$⋯②

由②-①得 $2a_3+4a_5=14$ ⇒$a_3+2a_5=7$ ⇒$a_3=7-2a_5$

將 $a_3=7-2a_5$ 代入①得 $a_1=a_5-1$

又因爲 $a_1+a_3+a_5=6$，故可得如下的結果。

a_5	0	1	2	3	4	⋯
a_3	7	5	3	1	-1	負數
a_1	-1	0	1	2	3	⋯
	不合				不合	不合

故找到(a_1、a_3、a_5)＝(0、5、1)或(1、3、2)或(2、1、3)

(2) 列的關係：假設每列排偶數瓶

⇒總列數：$b_2+b_4+b_6=6$…①

瓶數：$2\times b_2+4\times b_4+6\times b_6=20$…②

由②-①×2 得 $2b_4+4b_6=8$ ⇒$b_4+2b_6=4$ ⇒$b_4=4-2b_6$

將 $b_4=4-2b_6$ 代入①得 $b_2=b_6+2$

又因爲 $b_2+b_4+b_6=6$，故可得如下的結果。

b_6	0	1	2	3	4	…
b_4	4	2	0	-2	-4	負數
b_2	2	3	4	5	6	…
				不合	不合	不合

故找到(b_2、b_4、b_6)＝(2、4、0)或(3、2、1)或(4、0、2)

(3)由(1)、(2)知：行列共有 9 種組合，其排法如上。

排法 1：(a_1、a_3、a_5)＝(0、5、1)、(b_2、b_4、b_6)＝(2、4、0)

排法 2：(a_1、a_3、a_5)＝(0、5、1)、(b_2、b_4、b_6)＝(3、2、1)

排法 3：(a_1、a_3、a_5)＝(0、5、1)、(b_2、b_4、b_6)＝(4、0、2)

排法 4：(a_1、a_3、a_5)＝(1、3、2)、(b_2、b_4、b_6)＝(2、4、0)

排法 5：(a_1、a_3、a_5)＝(1、3、2)、(b_2、b_4、b_6)＝(3、2、1)

排法 6：(a_1、a_3、a_5)＝(1、3、2)、(b_2、b_4、b_6)＝(4、0、2)排不出來。

排法 7：(a_1、a_3、a_5)＝(2、1、3)、(b_2、b_4、b_6)＝(2、4、0)

排法 8：(a_1、a_3、a_5)＝(2、1、3)、(b_2、b_4、b_6)＝(3、2、1)

排法 9：(a_1、a_3、a_5)＝(2、1、3)、(b_2、b_4、b_6)＝(4、0、2)排不出來。

圖八

(四)不利用聯立方程式，另外找出一個可操縱排列牛奶瓶的方法。

是否能在不知行列瓶數組合的情形下，也能快速的排列出來。爲此，我們想要找到一個可操縱排列牛奶瓶的方法。經過多次的嘗試後，找到一個較具體的排法，這個方法是把排列過程分成三個步驟。

步驟一：先在對角線的位置上做排列。

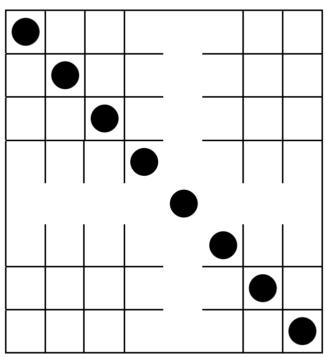
步驟二：等量增加(每次排 4 瓶)若干次，直到排完瓶數。

步驟三：若在等量增加的最後一次，無法一次排 4 瓶，則以〝一次排 2 瓶〞的方法排之並做適度的調整。

在步驟一時，需隨著條件限制，做些微的改變，但大致上可分成以下三種：

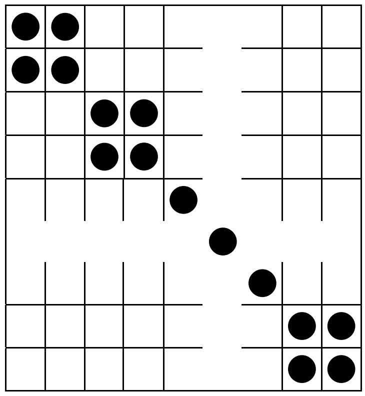
1、行列皆爲奇數瓶時：在對角線上各排 1 瓶。

排法：



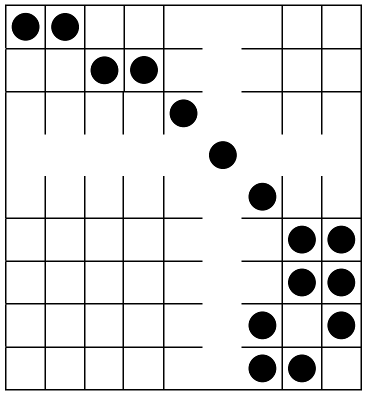
2、行列皆爲偶數瓶時：在對角線上各排 4 瓶。

排法：



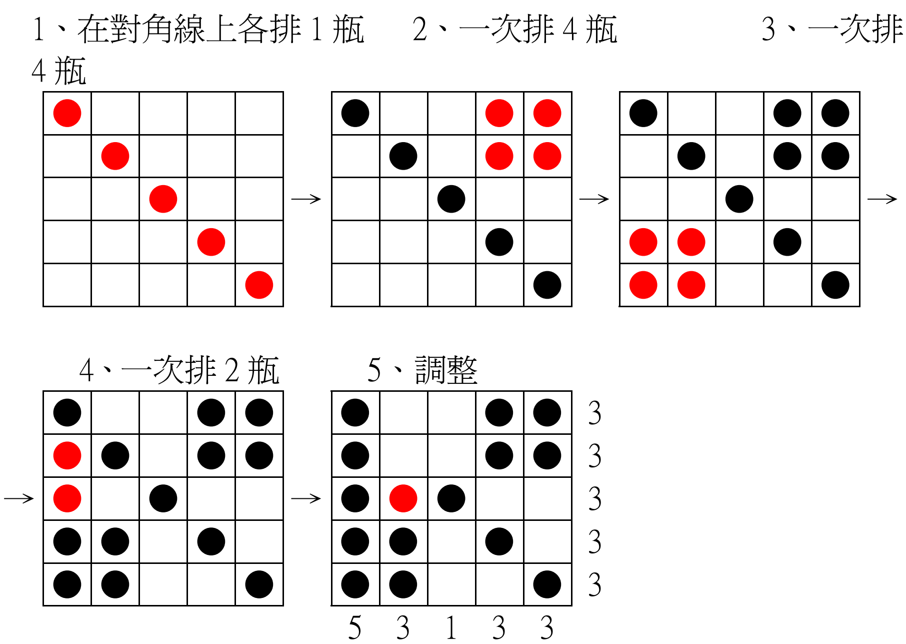
3、行列中一邊爲奇數瓶，另一邊爲偶數瓶時：從對角線開始依序排 2 瓶。

排法：



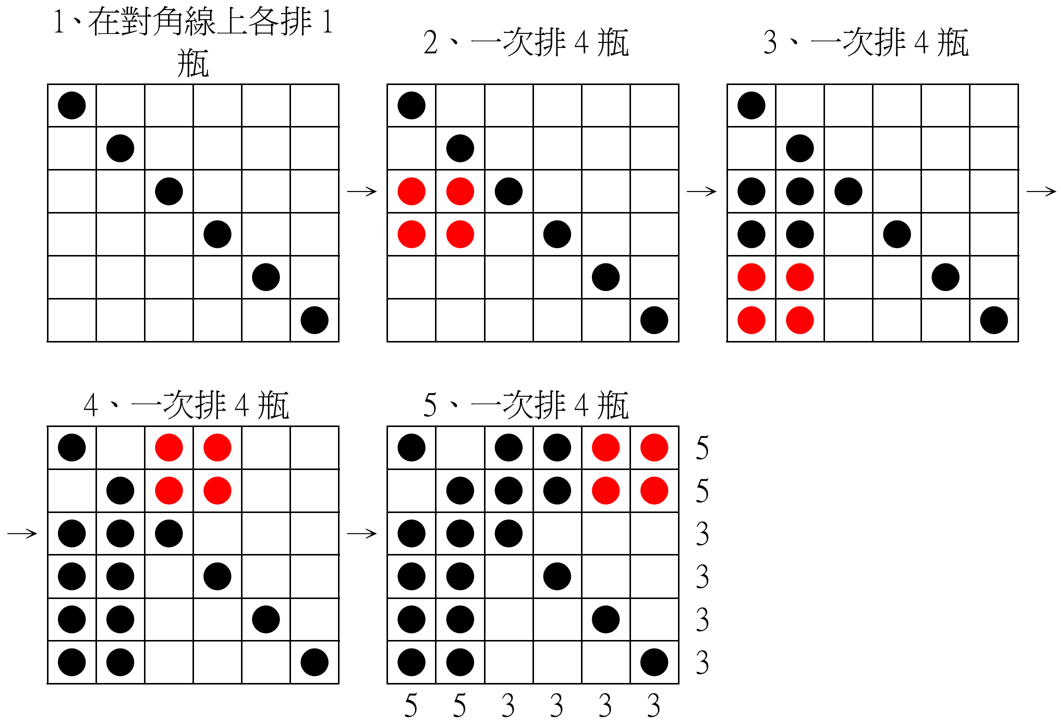
4、我們舉四個例子來說明上述的排法。如圖九、圖十、圖十一、圖十二

〔例七〕: 將 15 瓶牛奶排在 5x5 的牛奶箱中，且行列皆爲奇數瓶。



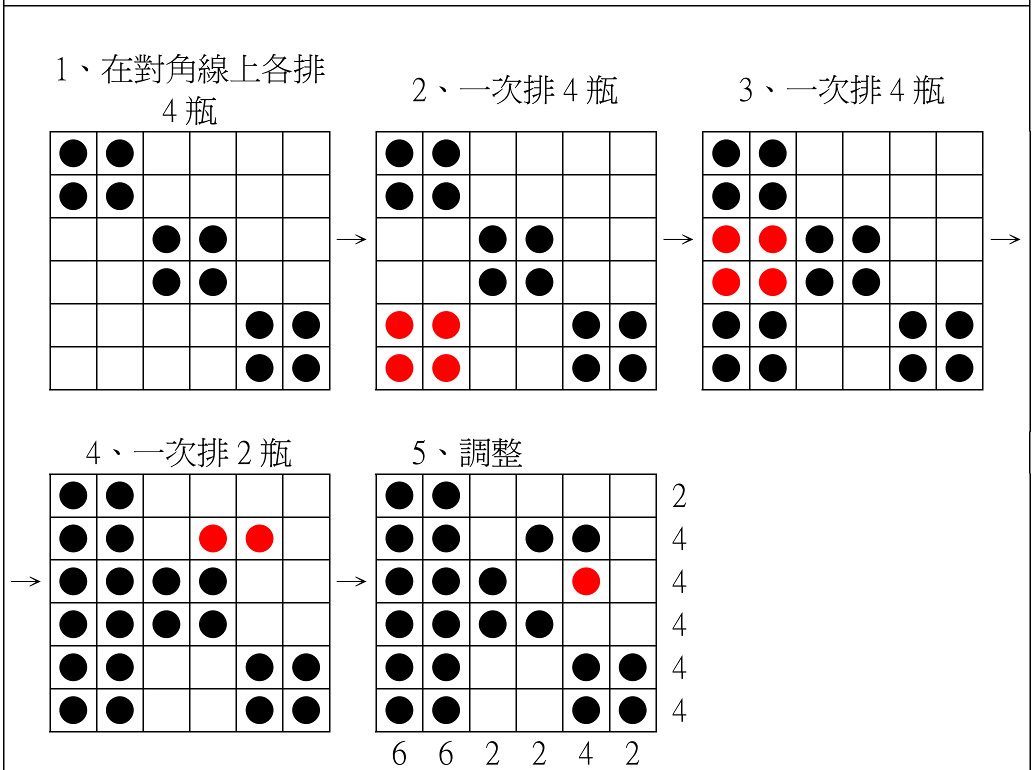
圖九

〔例八〕: 將 22 瓶牛奶排在 6x6 的牛奶箱中，且行列皆爲奇數瓶。



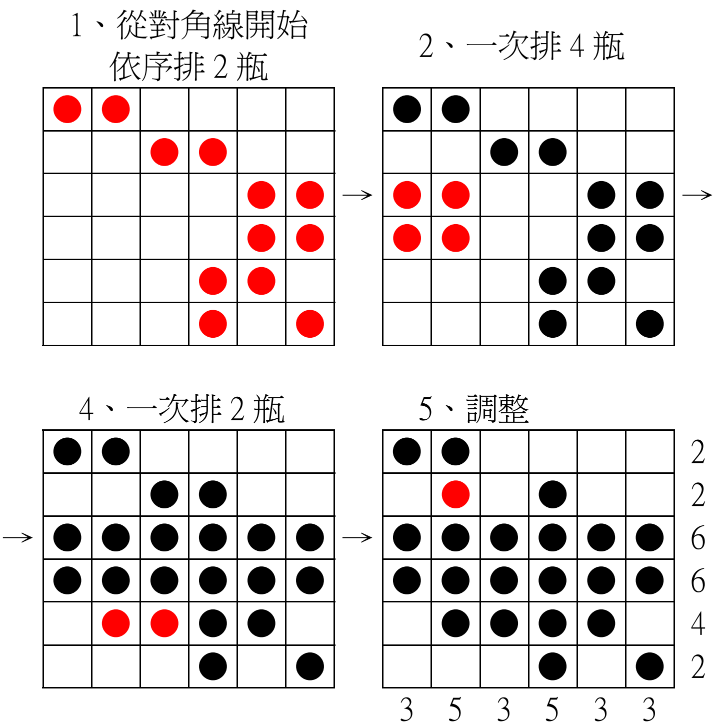
圖十

〔例九〕：將 22 瓶牛奶排在 6×6 的牛奶箱中，且行列皆爲偶數瓶。



圖十一

〔例十〕：將 22 瓶牛奶排在 6x6 的牛奶箱中，且行列中一邊為奇數瓶另一邊為偶數瓶。



圖十二

三、探討長方形牛奶箱：

針對長方形牛奶箱行數 n、列數 m 為奇數或偶數的不同，而把長方形牛奶箱分成 4 種。

(1)m、n 皆為奇數：我們將它稱之為奇數型牛奶箱。

(2)m、n 皆為偶數：偶數型牛奶箱。

(3)m 為偶數、n 為奇數：奇偶型牛奶箱。

(4)m 為奇數、n 為偶數：偶奇型牛奶箱。

除此之外，規定 n 大於 m，因為 n 小於 m 只是把 n 大於 m 的圖形換個方向來看。以下我們同正方形牛奶箱找 x 值的方法來找 4 種長方形牛奶箱在不同條件限制下的 x 值，而得到表三、表四、表五、表六。

(一)奇數型牛奶箱(m×n，n>m>1，m、n 皆為奇數)

表三：奇數型牛奶箱(m×n，n>m>1，m、n 皆為奇數)

x / (m×n)	行列皆為奇數瓶	行列皆為偶數瓶	行為奇數瓶列為偶數瓶	行為偶數瓶列為奇數瓶
3×5	5、7、9、11、15	10	×	×
3×7	7、9、11、…17、21	14	×	×
3×9	9 、 11 、 13 、 15、…、	18	×	×

	……、21、23、27			
⋮	⋮	⋮	✕	✕
3×n	n、n+2、n+4…… ……3n-6、3n-4、3n	2n	✕	✕
5×7	7、9、11、13、… ……29、31、35	14、16、18、…… ……24、26、28	✕	✕
5×9	9、11、13、15、…、 ……、39、41、45	18、20、22、…… ……32、34、36	✕	✕
5×11	11、13、15、17、…、 ……、49、51、55	22、24、26、…… ……40、42、44	✕	✕
⋮	⋮	⋮	✕	✕
5×n	n、n+2、n+4…… ……5n-6、5n-4、5n	2n、2n+2、2n+4、… …4n-4、4n-2、4n	✕	✕
7×9	9、11、13、15、…、 ……、57、59、63	18、20、22、…… ……50、52、54	✕	✕
7×11	11、13、15、17、…、 ……、71、73、77	22、24、26、…… ……62、64、66	✕	✕
⋮	⋮	⋮	✕	✕
7×n	n、n+2、n+4…… ……7n-6、7n-4、7n	2n、2n+2、2n+4、… …6n-4、6n-2、6n	✕	✕
⋮	⋮	⋮	✕	✕
m×n(n>m>1) (n 爲奇數)	n、n+2、n+4、n+6…… ………………… m×n-6、m×n-4、m×n	2n、2n+2、2n+4、… ………(m-1)×n-4、 (m-1)×n-2、 (m-1)×n	✕	✕

說明：

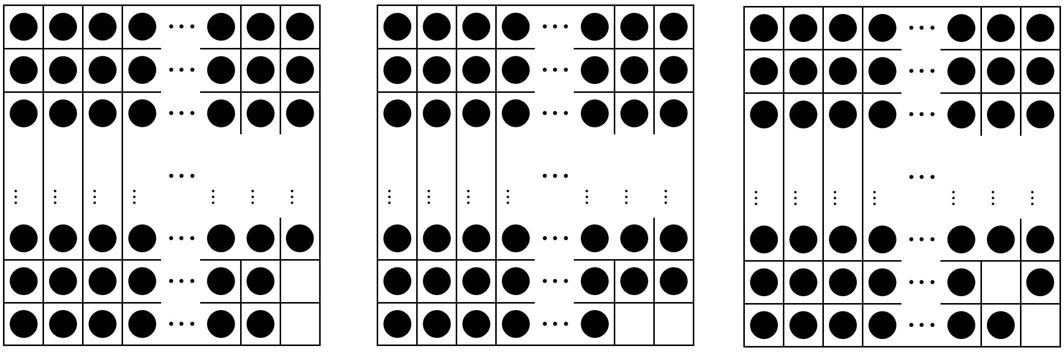
1、行列皆爲奇數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行都排一瓶，此時 $x=1\times n=n$。

(2)x 的最大值產生於每行(或每列)全排滿，此時 $x=m\times n$。

(3)x 爲奇數個奇數瓶之和，故 x 必爲奇數。

(4)當 $x=n^2-2$ 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行列皆爲奇數，所以 x 不爲 n^2-2。



(5)由(1)~(4)知：x 從最小值 n 到最大值 $m\times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x=n^2-2$ 除外。

2、行列皆爲偶數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x=2\times n=2n$。

(2)x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x=(m-1)\times n$。

(3)x 爲奇數個偶數瓶的和，故 x 必爲偶數。

(4)由(1)~(3)知：x 從最小值 2n 到最大值$(m-1)\times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

3、行爲奇數瓶，列爲偶數瓶時：

每行爲奇數瓶，則 x 爲奇數個奇數瓶之和，x 必爲奇數；而每列爲偶數瓶，則 x 爲奇數個偶數瓶之和，x 必爲偶數。故若要行爲奇數瓶，列爲偶數瓶，則 x 就得同時爲奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

4、行爲偶數瓶，列爲奇數瓶時：

每行爲偶數瓶，則 x 爲奇數個偶數瓶之和，x 必爲偶數；而每列爲奇數瓶，則 x 爲奇數個奇數瓶之和，x 必爲奇數。故若要行爲偶數瓶，列爲奇數瓶，則 x 就得同時爲奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

(二)偶數型牛奶箱($m\times n$，$n>m>1$，m、n 皆爲偶數)

表四：偶數型牛奶箱($m\times n$，$n>m>1$，m、n 皆爲偶數)

x / (m×n)	行列皆爲奇數瓶	行列皆爲偶數瓶	行爲奇數瓶列爲偶數瓶	行爲偶數瓶列爲奇數瓶
2×4	4	8	4	╳
2×6	6	12	6	╳
2×8	8	16	8	╳
⋮	⋮	⋮	⋮	╳
2×n	n	2n	n	╳

4×6	6、8、10、12、14、 16、18	12、14、16、18、20、24	8、10、12、14、16、18	12、14、16、18、20
4×8	8、10、12、14、…… ……、20、22、24	16、18、20、…… ……、26、28、32	8、10、12、14、…… ……、20、22、24	16、18、20、…… ……、24、26、28
4×10	10、12、14、16、…… ……、26、28、30	20、22、24、…… ……34、36、40	10、12、14、16、…… ……、26、28、30	20、22、24、…… ……、32、34、36
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4×n	n、n+2、n+4、…… ……3n-4、3n-2、3n	2n、2n+2、2n+4、… …4n-6、4n-4、4n	n、n+2、n+4、…… ……3n-4、3n-2、3n	2n、2n+2、2n+4、… 4×(n-1)-2、4×(n-1)
6×8	8、10、12、14、…… ……、36、38、40	16、18、20、…… ……42、44、48	12、14、16…… ……、36、38、40	16、18、20、…… ……38、40、42
6×10	10、12、14、16、…… ……、46、48、50	20、22、24、…… ……54、56、60	12、14、16…… ……、46、48、50	20、22、24、…… ……50、52、54
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6×n	n、n+2、n+4、…… ……5n-4、5n-2、5n	2n、2n+2、2n+4、… …6n-6、6n-4、6n	n、n+2、n+4、…… ……5n-4、5n-2、5n	2n、2n+2、2n+4、… 6×(n-1)-2、6×(n-1)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m×n(n>m>1) (2m≧n)	n、n+2、n+4、n+6…… ………(m-1)×n-4、 (m-1)×n-2、(m-1)×n	2n、2n+2、2n+4、… ……………mx n-6、 m×n-4、m×n	2m、2m+2、2m+4、… ………(m-1)×n-4、 (m-1)×n-2、(m-1)×n	2n、2n+2、2n+4、… m×(n-1)-2、m×(n-1)
m×n(n>m>1) (2m<n)	n、n+2、n+4、n+6…… ………(m-1)×n-4、 (m-1)×n-2、(m-1)×n	2n、2n+2、2n+4、… ……………mx n-6、 m×n-4、m×n	n、n+2、n+4、n+6…… ………(m-1)×n-4、 (m-1)×n-2、(m-1)×n	2n、2n+2、2n+4、… m×(n-1)-2、m×(n-1)

說明：

1、行列皆爲奇數瓶時：

(1) x 的最小值產生於每行都排一瓶，此時 $x = 1\times n = n$。

(2) x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x = (m-1)\times n$。

(3) x 爲偶數個奇數瓶之和，故 x 必爲偶數。

(4)由(1)~(3)知：x 從最小值 n 到最大值 $(m-1)\times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

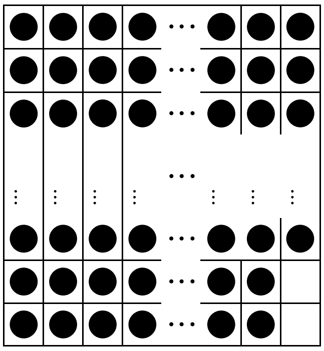
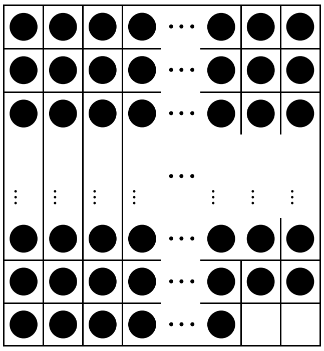
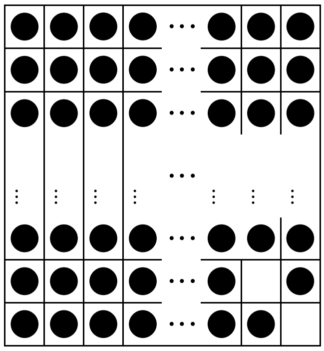
2、行列皆爲偶數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x = 2\times n = 2n$。

(2)x 的最大值產生於每行全排滿，此時 $x = m\times n$。

(3)x 爲偶數個偶數瓶之和，故 x 必爲偶數。

(4)當 $x = m\times n-2$ 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行列皆爲偶數，所以 x 不爲 $m\times n-2$。

(5)由(1)~(4)知：x 從最小值 $2n$ 到最大值 $m\times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x = m\times n-2$ 除外。

3、行爲奇數瓶，列爲偶數瓶時：

(1)$2m \geqq n$

①x 的最小值產生於每列都排二瓶，此時 $x = 2\times m = 2m$。

②x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x = (m-1)\times n$。

③x 爲偶數個奇數瓶之和，故 x 必爲偶數。

④由①~③知：x 從最小值 $2m$ 到最大值 $(m-1)\times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

(2)$2m<n$

①x 的最小值產生於每行都排一瓶，此時 $x = 1\times n = n$。

②x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 $x = (m-1)\times n$。

③x 爲偶數個奇數瓶之和，故 x 必爲偶數。

④由①~③知：x 從最小值 n 到最大值 $(m-1)\times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出。

4、行爲偶數瓶，列爲奇數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x = 2\times n = 2n$。

(2)x 的最大值產生於每列全排滿少一瓶，此時 $x = m\times(n-1)$。

(3)x 爲偶數個偶數瓶之和，故 x 必爲偶數。

(4)由(1)~(3)知：x 從最小值 $2n$ 到最大值 $m\times(n-1)$間，每增加 2 瓶都可排出。

(三)奇偶型牛奶箱($m\times n$，$n>m>1$，m：偶數，n：奇數)

表五：奇偶型牛奶箱($m\times n$，$n>m>1$，m：偶數，n：奇數)

x / (m×n)	行列皆爲奇數瓶	行列皆爲偶數瓶	行爲奇數瓶列爲偶數瓶	行爲偶數瓶列爲奇數瓶

2×3	╳	╳	╳	6
2×5	╳	╳	╳	10
2×7	╳	╳	╳	14
⋮	╳	╳	╳	⋮
2×n	╳	╳	╳	2n
4×5	╳	10、12、14、16	╳	10、12、14、16、20、
4×7	╳	14、16、18、20、22、24	╳	14、16、18、20、22、24、28
4×9	╳	18、20、22、…… ……28、30、32	╳	18、20、22、…… ……30、32、36
⋮	╳	⋮	╳	⋮
4×n	╳	2n、2n+2、2n+4、… 4×(n-1)-2、4×(n-1)	╳	2n、2n+2、2n+4、… 4n-6、4n-4、4n
6×7	╳	14、16、18、…… ……32、34、36	╳	14、16、18、…… ……36、38、42
6×9	╳	18、20、22、…… ……44、46、48	╳	18、20、22、…… ……48、50、54
⋮	╳	⋮	╳	⋮
6×n	╳	2n、2n+2、2n+4、… 6×(n-1)-2、6×(n-1)	╳	2n、2n+2、2n+4、… 6n-6、6n-4、6n
⋮	╳	⋮	╳	⋮
m×n (n>m>1)	╳	2n、2n+2、2n+4、… ………m×(n-1)-4、 m×(n-1)-2、m×(n-1)	╳	2n、2n+2、2n+4、… ………………………… m×n-6、m×n-4、m×n

說明：

1、行列皆為奇數瓶時：

每行為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和，x 必為奇數；每列為奇數瓶，則 x 為偶數個奇數瓶之和，x 必為偶數。故若要行列皆為奇數瓶，則 x 就得同時為奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

2、行列皆為偶數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 x＝2×n＝2n。

(2)x 的最大值產生於每列全排滿少一瓶，此時 x＝m×(n-1)。

(3)x 為奇數個偶數瓶之和(或偶數個偶數瓶之和)，故 x 必為偶數。

(4)由(1)~(3)知：x 從最小值 2n 到最大值 m×(n-1)間，每增加 2 瓶都可排出。

3、行為奇數瓶，列為偶數瓶時：

每行為奇數瓶，則 x 為奇數個奇數瓶之和，x 必為奇數；而每列為偶數瓶，則 x 為偶數個偶數瓶之和，x 必為偶數。故若要行為奇數瓶，列為偶數瓶，則 x 就得同時為奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

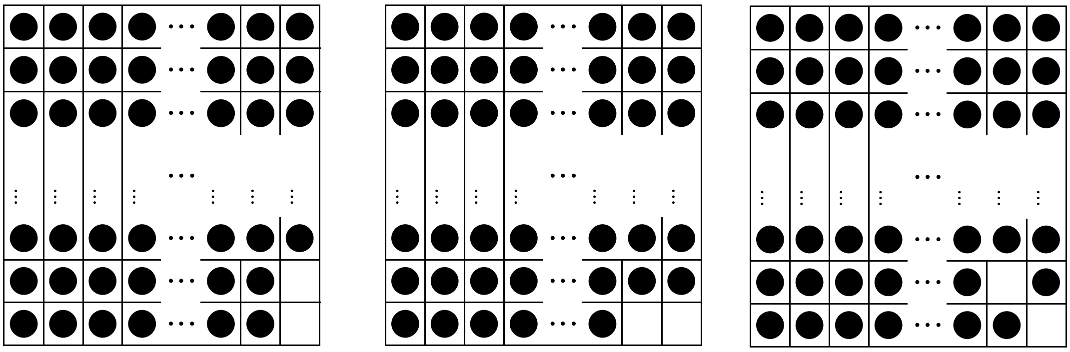
4、行為偶數瓶，列為奇數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 $x=2\times n=2n$。

(2)x 的最大值產生於每行全排滿，此時 $x=m\times n$。

(3)x 為奇數個偶數瓶之和(或偶數個奇數瓶之和)，故 x 必為偶數。

(4)當 $x=m\times n-2$ 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行為偶數瓶，列為奇數瓶，所以 x 不為 $m\times n-2$。



(5)由(1)~(4)知：x 從最小值 2n 到最大值 $m\times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x=m\times n-2$ 除外。

(四)偶奇型牛奶箱($m\times n$，$n>m>1$，m：奇數，n：偶數)

表六：偶奇型牛奶箱($m\times n$，$n>m>1$，m：奇數，n：偶數)

x / (m×n)	行列皆為奇數瓶	行列皆為偶數瓶	行為奇數瓶列為偶數瓶	行為偶數瓶列為奇數瓶
3×4	╳	8	6、8、12	╳
3×6	╳	12	6、8、‧‧‧、14、18	╳
3×8	╳	16	8、10、12、14、16、18、20、24	╳
⋮	╳	⋮	⋮	╳
3×n	╳	2n	n、n+2、n+4、‧‧‧‧‧‧ ‧‧‧‧‧‧3n-6、3n-4、3n	╳
5×6	╳	12、14、16、18、20、22、24	10、12、14、‧‧‧‧‧‧ ‧‧‧‧‧‧24、26、30	╳

5×8	╳	16、18、20、22、 24、26、28、30、 32	16、18、20、…… ……26、28、32	╳
5×10	╳	20、22、24、…… ……36、38、40	20、22、24、…… ……34、36、40	╳
⋮	╳	⋮	⋮	╳
5×n	╳	2n 、 2n+2 、 2n+4、… …4n-4、4n-2、 4n	n、n+2、n+4、…… ……5n-6、5n-4、5n	╳
7×8	╳	16、18、20、…… ……44、46、48	16、18、20、…… ……42、44、48	╳
7×10	╳	20、22、24、…… ……56、58、60	20、22、24、…… ……54、56、60	╳
⋮	╳	⋮	⋮	╳
7×n	╳	2n 、 2n+2 、 2n+4、… …6n-4、6n-2、 6n	n、n+2、n+4、…… ……7n-6、7n-4、7n	╳
⋮	╳	⋮	⋮	╳
m×n(n>m>1) (2m≧n)	╳	2n 、 2n+2 、 2n+4、… ………(m-1)× n-4、 (m-1)×n-2、 (m-1)×n	2m、2m+2、2m+4、… ……………………… m×n-6、m×n-4、m×n	╳
m×n(n>m>1) (2m<n)	╳	2n 、 2n+2 、 2n+4、… ………(m-1)× n-4、 (m-1)×n-2、 (m-1)×n	n、n+2、n+4、… ……………………… m×n-6、m×n-4、m×n	╳

說明：

1、行列皆爲奇數瓶時：

每行爲奇數瓶，則 x 爲偶數個奇數瓶之和，x 必爲偶數；每列爲奇數瓶，則 x 爲奇數個奇數瓶之和，x 必爲奇數。故若要行列皆爲奇數瓶，則 x 就得同時爲奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

2、行列皆爲偶數瓶時：

(1)x 的最小值產生於每行都排二瓶，此時 x＝2×n＝2n。

(2)x 的最大值產生於每行全排滿少一瓶，此時 x＝(m-1)×n。

(3)x 爲偶數個偶數瓶之和(或奇數個偶數瓶之和)，故 x 必爲偶數。

(4)由(1)~(3)知：x 從最小值 2n 到最大值(m-1)×n 間，每增加 2 瓶都可排出。

3、行爲奇數瓶，列爲偶數瓶時：

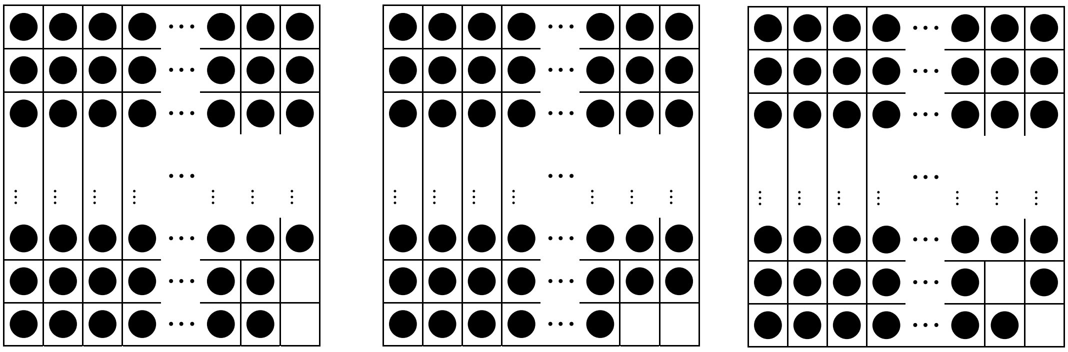
(1)2m≧n

①x 的最小值產生於每列都排二瓶，此時 x＝2×m＝2m。

②x 的最大值產生於每行全排滿，此時 x＝m×n。

③x 爲偶數個奇數瓶之和(或奇數個偶數瓶之和)，故 x 必爲偶數。

④當 $x=m\times n-2$ 時，只有下列三種排法，而這三種排法均無法使行爲奇數瓶，列爲偶數瓶，所以 x 不爲 $m\times n-2$。



⑤由①~④知：x 從最小值 2m 到最大值 $m\times n$ 間，每增加 2 瓶都可排出，但 $x=m\times n-2$ 除外。

(2)2m<n

①x 的最小值產生於每行都排一瓶，此時 $x=1\times n=n$。

②其餘之情形同上 $2m\geqq n$ 的情形。

4、行爲偶數瓶，列爲奇數瓶時：

每行爲偶數瓶，則 x 爲偶數個偶數瓶之和，x 必爲偶數；每列爲奇數瓶，則 x 爲奇數個奇數瓶之和，x 必爲奇數。故若要行爲偶數瓶，列爲奇數瓶，則 x 就得同時爲奇數和偶數，換句話說，此種 x 是不存在的，亦即 x 無解。

(五)利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之

當知道排列的瓶數 x 和牛奶箱大小($m\times n$)，以及行列瓶數限制的條件後，就可利用下述的總行數、總列數以及瓶數間的關係找出(a_1、a_3、a_5、…a_{2k+1})(或(a_2、a_4、a_6…、a_{2k}))和(b_1、b_3、b_5、…b_{2k+1})(或(b_2、b_4、b_6…、b_{2k}))的值，然後再根據 a_1、a_3、a_5、…a_{2k+1}(或 a_2、a_4、a_6…、a_{2k})和 b_1、b_3、b_5、…b_{2k+1}(或 b_2、b_4、b_6…、b_{2k})的情形排列之。

(1)總行數 $n=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}$(或總行數 $n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$)

(2)總列數 $m=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2k+1}$(或總列數 $m=b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2k}$)

(3)瓶數 $x=1\times a_1+3\times a_3+\cdots+(2k+1)\times a_{2k+1}=1\times b_1+3\times b_3\cdots+(2k+1)\times b_{2k+1}$

(或瓶數 $x=2\times a_2+4\times a_4+6\times a_6\cdots+2k\times a_{2k}=2\times b_2+4\times b_4+6\times b_6\cdots+2k\times b_{2k}$)

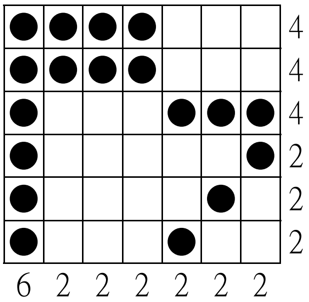
●以下我們將舉二個例子說明之。如圖十三、圖十四

〔例一〕:將 18 瓶牛奶排在〝6×7〞的牛奶箱中，且行列皆爲偶數瓶。

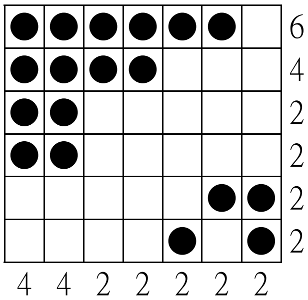
排法 1

●	●	●	●				4
		●	●	●	●		4
●	●				●	●	4
●	●						2
●	●						2
				●		●	2
4	4	2	2	2	2	2	

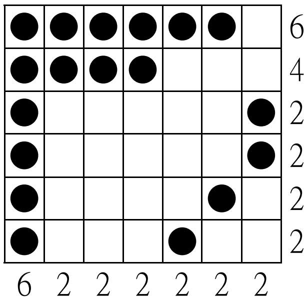
排法 3



排法 2



排法 4



(說明)：(1)行的關係⇒總行數：$a_2+a_4+a_6=7$…①

瓶數：$2\times a_2+4\times a_4+6\times a_6=18$…②

由②-①×2 得 $2a_4+4a_6=4$ ⇒$a_4+2a_6=2$ ⇒$a_4=2-2a_6$

將 $a_4=2-2a_6$ 代入①得 $a_2=a_6+5$，又因爲 $a_2+a_4+a_6=7$，故可得如下的結果。

a_2	0	1	2	3	4	…
a_4	2	0	-2	-4	-6	負數
a_6	5	6	7	8	9	…
			不合	不合	不合	不合

故找到(a_2、a_4、a_6)＝(5、2、0)或(6、0、1)

(2)列的關係⇒總列數：$b_2+b_4+b_6=6$…①

瓶數：$2\times b_2+4\times b_4+6\times b_6=18$…②

由②-①×2 得 $2b_4+4b_6=6$ ⇒$b_4+2b_6=3$ ⇒$b_4=3-2b_6$

將 $b_4=3-2b_6$ 代入①得 $b_2=b_6+3$

又因爲 $b_2+b_4+b_6=6$，故可得如下的結果。

b_6	0	1	2	3	4	…
b_4	3	1	-1	-3	-5	負數
b_2	3	4	5	6	7	…
			不合	不合	不合	不合

故找到(b_2、b_4、b_6)＝(3、3、0)或(4、1、1)

(3)由(1)、(2)知：行列共有 4 種組合，其排法如上。

排法 1：(a_2、a_4、a_6)＝(5、2、0)、(b_2、b_4、b_6)＝(3、3、0)

排法 2：(a_2、a_4、a_6)＝(5、2、0)、(b_2、b_4、b_6)＝(4、1、1)

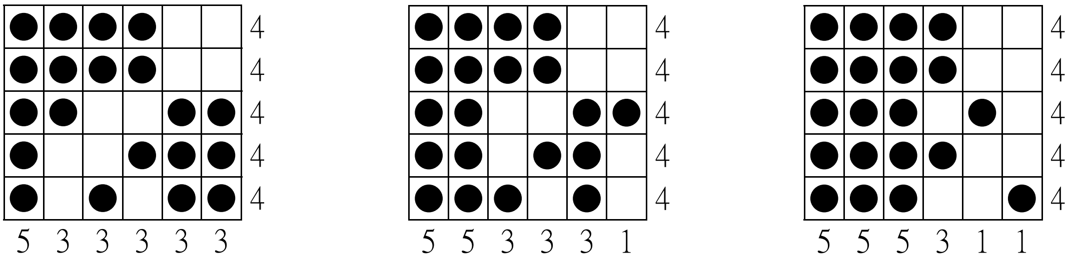
排法 3：(a_2、a_4、a_6)＝(6、0、1)、(b_2、b_4、b_6)＝(3、3、0)

排法 4：(a_2、a_4、a_6)＝(6、0、1)、(b_2、b_4、b_6)＝(4、1、1)

圖十三

〔例二〕:將 20 瓶牛奶排在〝5×6〞的牛奶箱中，且每行爲奇數瓶，每列爲偶數瓶。

排法 1　　　　　　排法 2　　　　　　排法 3



(說明)：(1)行的關係⇒總行數：$a_1+a_3+a_5=6$…①

瓶數：$1\times a_1+3\times a_3+5\times a_5=20$…②

由②-①得 $2a_3+4a_5=14$ ⇒$a_3+2a_5=7$ ⇒$a_3=7-2a_5$

將 $a_3=7-2a_5$ 代入①得 $a_1=a_5-1$

又因爲 $a_1+a_3+a_5=6$，故可得如下的結果。

a_5	0	1	2	3	4	…
a_3	7	5	3	1	-1	負數
a_1	-1	0	1	2	3	…
	不合				不合	不合

故找到(a_1、a_3、a_5)＝(0、5、1)或(1、3、2)或(2、1、3)

(2)列的關係⇒總列數：$b_2+b_4=5$…①

瓶數：$2\times b_2+4\times b_4=20$…②

由②-①×2 得 $2b_4=10$ ⇒$b_4=5$ ⇒$b_2=0$，故找到(b_2、b_4)＝(0、5)

(3)由(1)、(2)知：行列共有 3 種組合，其排法如下。

排法 1：(a_1、a_3、a_5)＝(0、5、1)、(b_2、b_4)＝(0、5)

排法 2：(a_1、a_3、a_5)＝(1、3、2)、(b_2、b_4)＝(0、5)

排法 3：(a_1、a_3、a_5)＝(2、1、3)、(b_2、b_4)＝(0、5)

圖十四

(六)不利用聯立方程式，另外找出一個可操縱排列牛奶瓶的方法。

是否能在不知行列瓶數組合的情形下，也能快速的排列出來。爲此，我們想要找到一個可操縱排列牛奶瓶的方法。經過多次的嘗試後，找到一個較具體的排法，這個方法是把排列過程分成三個步驟。

步驟一：先在對角線的位置上做排列。

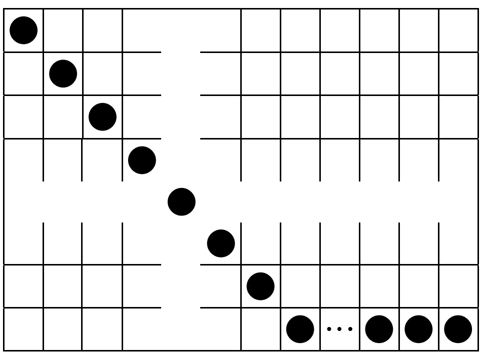
步驟二：等量增加(每次排 4 瓶)若干次，直到排完瓶數。

步驟三：若在等量增加的最後一次，無法一次排 4 瓶，則以〝一次排 2 瓶〞的方法排之並做適度的調整。

在步驟一時，需隨著條件限制，而有些微的改變，但大致上可分成以下四種：

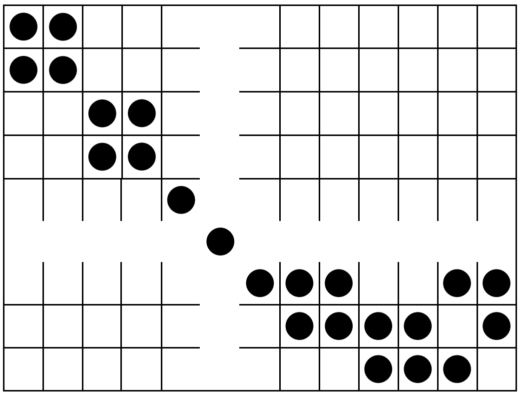
1、行列皆爲奇數瓶時：在對角線上各排 1 瓶。

排法：

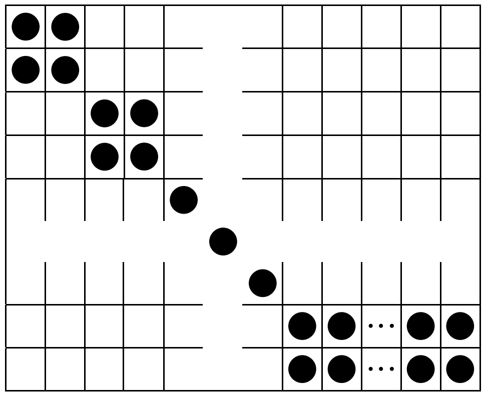


2、行列皆為偶數瓶時：在對角線上各排 4 瓶。

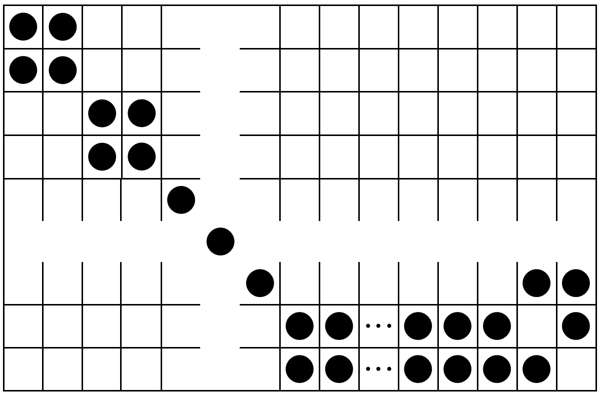
排法 1：



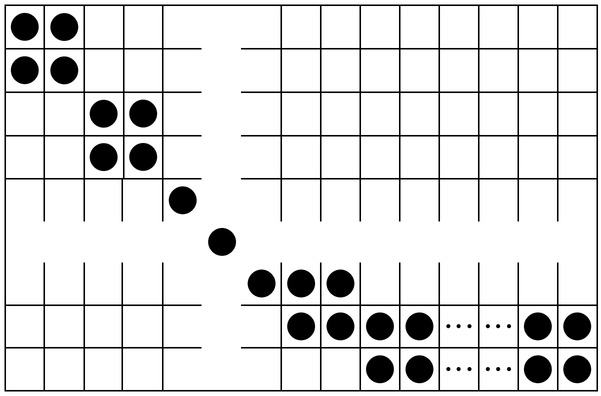
排法 2：



排法 3：

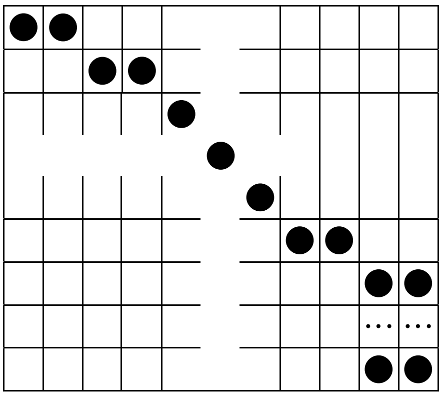


排法 4：

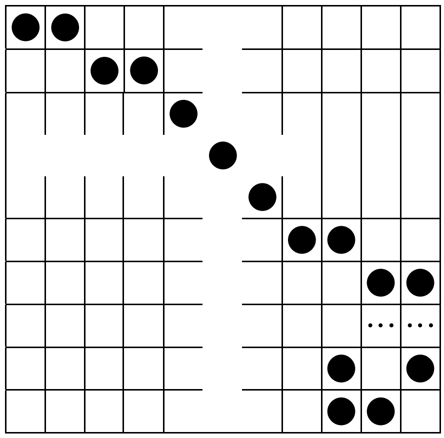


3、行為奇數瓶，列為偶數瓶時：從對角線開始依序排 2 瓶。

排法 1：



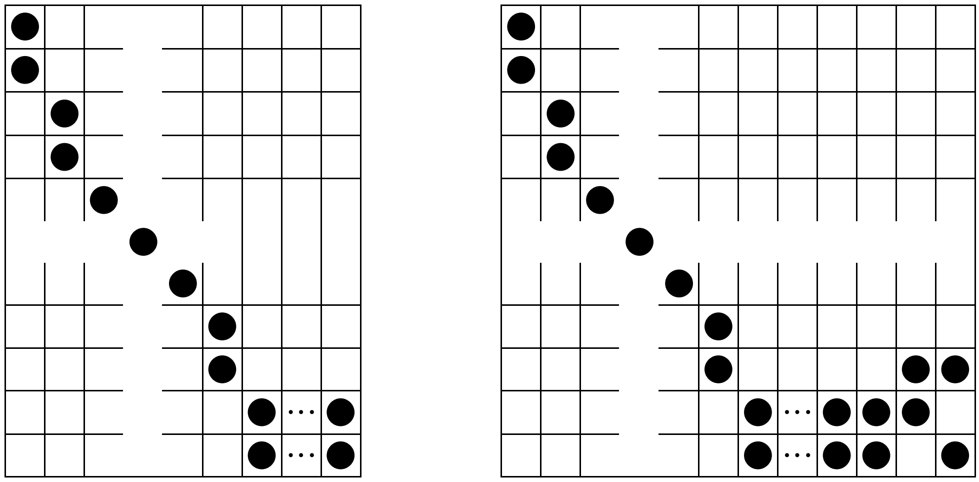
排法 2：



4、行為偶數瓶，列為奇數瓶時：從對角線開始依序排 2 瓶。

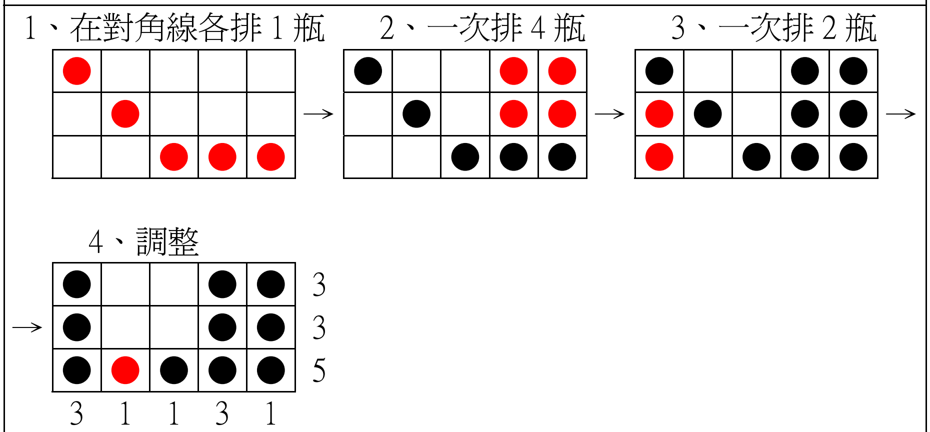
排法 1：

排法 2：



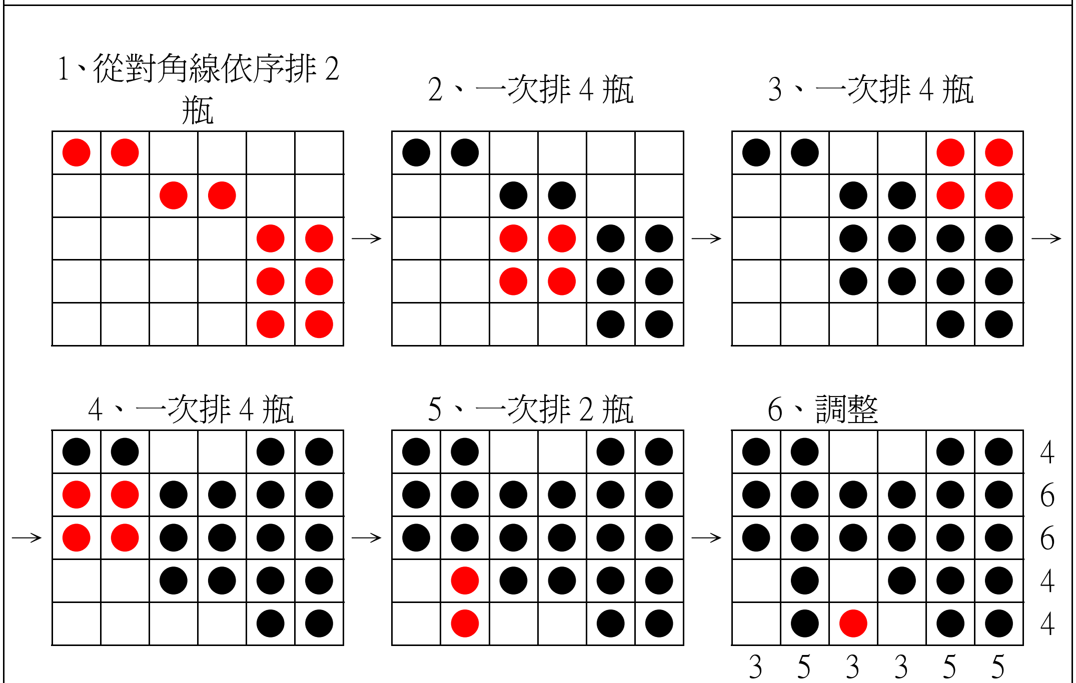
5、我們舉三個例子來說明上述的排法。如圖十五、圖十六、圖十七

〔例三〕：將 11 瓶牛奶排在 3×5 的牛奶箱中，且行列皆爲奇數瓶。



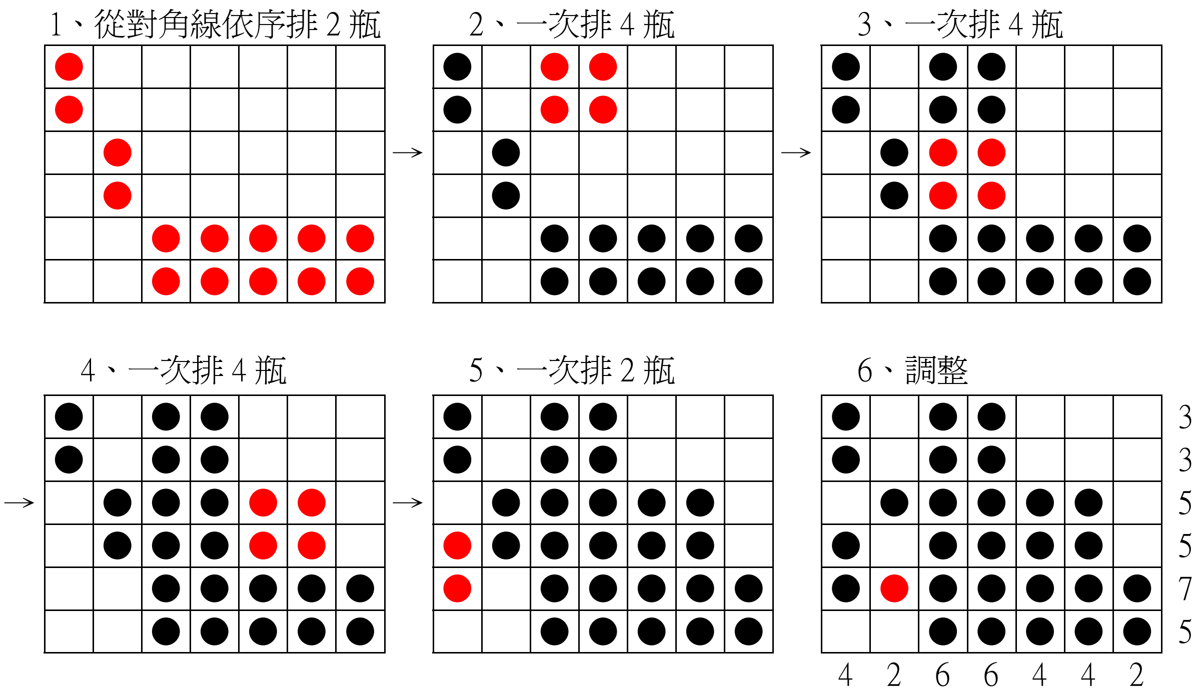
圖十五

〔例四〕：將 24 瓶牛奶排在 5×6 的牛奶箱中，且行爲奇數瓶，列爲偶數瓶。



圖十六

〔例五〕：將 28 瓶牛奶排在 6x7 的牛奶箱中，且行爲偶數瓶，列爲奇數瓶。



圖十七

陸、研究結果：

一、我們將各種牛奶箱在不同條件限制下的瓶數(x 值)範圍，整理成<u>表七</u>。

表七

x	行列皆爲奇數瓶	行列皆爲偶數瓶	行爲奇數瓶列爲偶數瓶	行爲偶數瓶列爲奇數瓶
正奇數牛奶箱(n×n，n 爲奇數)	$n \leqq x \leqq n^2$ ($x \neq n^2-2$)	$2n \leqq x \leqq n(n-1)$	╳	╳
正偶數牛奶箱(n×n，n 爲偶數)	$n \leqq x \leqq n(n-1)$	$2n \leqq x \leqq n^2$ ($x \neq n^2-2$)	$2n \leqq x \leqq n(n-1)$	$2n \leqq x \leqq n(n-1)$
奇數型牛箱(m×n，m、n 皆爲奇數)	$n \leqq x \leqq m \times n$ ($x \neq m \times n-2$)	$2n \leqq x \leqq (m-1)n$	╳	╳
偶數型牛奶箱(m×n，m、n 皆爲偶數)	$n \leqq x \leqq (m-1)n$	$2n \leqq x \leqq m \times n$ ($x \neq m \times n-2$)	(1) $2m \geqq n$ $2m \leqq x \leqq (m-1)n$ (2) $2m<n$ $n \leqq x \leqq (m-1)n$	$2n \leqq x \leqq m(n-1)$
奇偶型牛奶箱(m×n，n 爲偶數、m 爲奇數)	╳	$2n \leqq x \leqq m(n-1)$	╳	$2n \leqq x \leqq m \times n$ ($x \neq m \times n-2$)
偶奇型牛奶箱(m×n，m 爲偶數、n	╳	$2n \leqq x \leqq (m-1)n$	(1) $2m \geqq n$ $2m \leqq x \leqq m \times n$	╳

爲奇數)			$(x\neq m\times n-2)$	
			(2)$2m<n$ $n\leqq x\leqq m\times n$ $(x\neq m\times n-2)$	

二、利用聯立方程式找出行列瓶數的組合，然後排之

當知道排列的瓶數 x 和牛奶箱大小$(m\times n)$，以及行列瓶數限制的條件後，就可利用下述的總行數、總列數以及瓶數間的關係找出(a_1、a_3、a_5、…a_{2k+1})(或(a_2、a_4、a_6…、a_{2k}))和(b_1、b_3、b_5、…b_{2k+1})(或(b_2、b_4、b_6…、b_{2k}))的值，然後再根據 a_1、a_3、a_5、…a_{2k+1}(或 a_2、a_4、a_6…、a_{2k})和 b_1、b_3、b_5、…b_{2k+1}(或 b_2、b_4、b_6…、b_{2k})的情形排列之。

(1)總行數 $n=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}$(或總行數 $n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$)

(2)總列數 $m=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2k+1}$(或總列數 $m=b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2k}$)

(3)瓶數 $x=1\times a_1+3\times a_3+5\times a_5+\cdots+(2k+1)\times a_{2k+1}=1\times b_1+3\times b_3+5\times b_5+\cdots+(2k+1)\times b_{2k+1}$

(或瓶數 $x=2\times a_2+4\times a_4+6\times a_6+\cdots+2k\times a_{2k}=2\times b_2+4\times b_4+6\times b_6+\cdots+2k\times b_{2k}$)

三、不利用聯立方程式，另外找出一個可操縱排列牛奶瓶的方法。

是否能在不知行列瓶數組合的情形下，也能快速的排列出來。爲此，我們想要找到一個可操縱排列牛奶瓶的方法。經過多次的嘗試後，找到一個較具體的排法，這個方法是把排列過程分成三個步驟。

步驟一：先在對角線的位置上做排列。

步驟二：等量增加(每次排 4 瓶)若干次，直到排完瓶數。

步驟三：若在等量增加的最後一次，無法一次排 4 瓶，則以〝一次排 2 瓶〞的方法排之並做適度的調整。

柒、討論：

一、正奇數牛奶箱和奇數牛奶箱在行列皆爲奇數瓶時，其排法中，當行列都沒有任何全排滿的情形時，此時排法中的空格部分，恰巧爲行列皆爲偶數瓶的答案；反之亦是，此現象甚爲有趣。

二、經由解聯立方程式得知行、列的瓶數組合情形，但並非每種瓶數組合都可以排出來，有少數幾個是無法排出來的。

三、利用解聯立方程式，可以找到較多的排法，但較費時；而利用我們自己所推敲出來的排法，可以很快排出，但排法較少。

捌、參考資料：

一、周智輝　IQ 智力性向測驗　初版　台北市　五洲出版社　188、219 頁　1999 年 6 月

二、建中 49 屆 314 班全體同學譯　數學思考　一版二刷　台北市　九章出版社　163、164 頁　2000 年 4 月

三、張良杰 游耿能譯　趣味數學問題集　初版四刷　新竹市　凡異出版社　6、161 頁　86 年 6 月

四、裘宗滬　趣味數學 300 題　初版五刷　新竹市　凡異出版社　8、21 頁 86 年 7 月