030405

壹、摘要

m 個杯口向上的杯子，每次翻轉 n 個，讓所有的杯子朝下最少需要翻轉幾回合？去年的全國科展有一優勝作品，探討的正是這類問題。經過研究，我發現該文因較缺乏系統性，沒有提出快捷翻轉杯子的策略，在未證明翻轉次數確實是最少的情況下，即從所得數據歸納最少翻轉次數的公式，所以沒有發現部份結論有誤。

一般研究杯子翻轉的問題都是在每一回合計算正反杯的數量變化，可是當杯數和翻量變大，這種計算杯數差的方法會十分複雜。因此本研究創造了三種特殊且簡易的操作法，分別稱爲折半法、對稱法及折半法+對稱法。文內將介紹如何用這幾種快捷的翻法解各類型翻轉杯子的問題，並證明所得的確實是最少翻轉回合數。

最後，本研究還會討論以連續數翻轉杯子的延伸問題，並設計一些生活應用題，以推廣研究的結果。

貳、研究動機

幾年前，曾聽到一場中研院的教授對中小學生的演講，在演講中教授問大家假如有 9 個杯口向上的杯子，每一次要翻轉 6 個，翻轉是指讓本來杯口是朝下的杯子轉成杯口朝上，本來朝上的杯子則轉成朝下，問是否可以成功的讓所有的杯子朝下？這個問題的解法，讓我第一次領會到數字奇偶性的重要，以及用符號解題的妙用。

去年「第四十五屆全國科展」有一優勝作品「翻出一片天」，探討的正是這類翻杯子的問題，因為對這問題有興趣，所以在參觀時，我小心閱讀了一些例子，發現部份結論是對的，但是當我另外用其他數字驗證時，竟然發現與結論不合，當時我不能確定是我做錯了，還是該作品取樣的範圍有些疏漏，於是決定嘗試把這個翻轉杯子的問題做一番較深入的研究。

參、研究目的

一、將一個開口朝上的杯子翻轉一次〈轉 180 度〉，杯子的開口便會朝下，朝下的杯子經過一次翻轉後，開口便會朝上。現有m個開口朝上的杯子，如果每回合翻轉n個杯子〈$m \geq n$〉，*且同一個回合內，同一個杯子僅能翻轉一次*，研究最少需要多少回合的翻轉，才能使所有的杯子開口朝下？是否可找到迅速達成目標的策略？

二、透過歸納猜測一般化的公式，並證明公式是否成立。

三、推廣研究若以連續數翻轉杯子，最少需要多少回合的翻轉才能使所有的杯子開口朝下？此外並會尋找是否有迅速達成目標的策略。

肆、研究器材：紙、筆

伍、文獻探討

一、第四十五屆全國科展數學科小學組第三名優勝作品「翻出一片天」

其結論二之第 3 點是：如果執行 杯數÷翻量 <即 m ÷ n>，當商＝1 時：

翻量與餘數同為奇數時，最少次數＝1＋3＝4 次。

翻量與餘數或同為偶數或一個是奇數一個是偶數時，最少次數＝1＋2＝3 次。

二、倘若原文結論成立，則當商＝1 時，最少的翻轉次數不是 3 次就是 4 次，然而這結論並不正確，可以找到很多反例：

杯數	翻量	餘數	最少的翻轉次數
9	8	1	9
14	11	3	6
16	13	3	6
20	17	3	8

這顯然與該文結論不符。

三、文獻探討後的心得：

1、要有系統地進行研究，該作品的弱點之一，是較缺乏系統性，也沒有快捷翻轉杯子的策略，因此所歸納的結論並不完全。

2、該作品的另一弱點，是沒有証明所翻轉的次數確實是最少的，即直接從所得數據歸納出最少翻轉次數的公式，因此沒有發現部份結論有誤。

3、後續的研究可先從該作品有問題的**杯數÷翻量，當商＝1 時**部份開始重新探討，找出可能導致錯誤的原因。

4、 應找出較為簡易的操作方法，無須如同該作品在每一回合計算朝上或朝下杯子數量的變化，以避免錯誤。

陸、研究過程

設杯子的個數為 m，每次翻轉的杯數以 n 表示。本研究的過程包括以下幾個步驟：

一、先有系統地進行初步的嘗試，從 m=1 至 m=20，而且 n≤m 的情況下，每一種組合皆進行操作，瞭解各種情況的特色，研究箇中隱藏的關係。

二、從實作中，尋找快捷的翻轉杯子的操作方法，這樣才能減少翻杯子的回合數。

三、從實作中，歸納出翻轉杯子的問題共有多少種類型，再有系統地對每一種類型進行研究。

四、運用所發現的快捷翻轉杯子的操作方法，找出各類型翻轉杯子問題的最少回合數。

五、推導出 m 個杯子每次翻轉 n 個杯最少回合數的一般化公式。

六、証明該公式確實是翻轉最少的回合數。

七、探討並提出翻杯子的延伸問題，以及設計一些生活應用題。

柒、研究結果

一、經實作後的整理，把翻轉杯子的問題分為甲、每回合翻量為固定數，乙、每回合翻量為連續數 兩大類型：

甲、 每回合翻量為固定數，每回合翻轉n個杯子〈杯子數m≥翻量n〉

此類可將m與n的關係分為五種類型研究。*這5 個類型已包含所有m 和n 的可能組合。*

設杯子數為 m，每回合翻量為 n， p 為商， q 為餘數：

(1) m÷n＝p…q　 p＝**1**， q **為奇數且不等於 1 (參考文獻中的錯誤所在)**

(2) m－n＝1

(3) m÷n＝p…q　 p＝**1**， q **為偶數**

(4) m÷n＝p…q　 p ≥**2**

(5) m÷n＝p ， p **為整數**

乙、每回合翻量並非固定數，而是以連續數翻轉〈杯子數m≥翻量n〉

(1) **從翻量 n=1 開始，以連續正整數數翻轉**

(2) 從翻量 n=1 開始，以連續奇數翻轉

(3) 從翻量 n=2 開始，以連續偶數翻轉

以下先處理翻轉杯子的甲類問題，即n為定數，每回合翻轉n個杯子〈m≥n〉

二、 創造快捷翻轉杯子的方法

經長期實作後，我創造了三種特殊且簡易的翻轉杯子的操作方法，分別稱為「折半法」、「對稱法」及「折半法」+「對稱法」。只要靈活運用這些快捷的策略，無需如同參考文獻中在每一回合計算朝上或朝下杯子的價量變化，即可輕鬆的翻轉成功。為了方便介紹，以下將用定義的方式來說明。

1、名詞定義 1：

（1）符號 1 和 0：

為方便記錄，每一個杯子向上狀態以 1 表示，杯子向下狀態以 0 表示。

（2）m、n和回合：杯子的個數以m 表示，每次翻轉的杯數以n表示，**回合**是指從m個杯子中，每完成翻轉n個杯子〈m≥n〉稱一個回合。在翻轉的過程中，原來開口朝上的杯子便會朝下，而朝下的杯子經翻轉後便會朝上。

（3）s：符號 s 代表 m 個杯子被翻動的**總次數**。

總次數和**回合數**容易被誤解，我舉一個例子說明：

m(杯數)=18，n(翻量)=15

回合	該回合結束後杯子的狀態																		1 的數目	0 的數目
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	18	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	15
2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	12	6
3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	9	9
4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	6	12
5	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15	3
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18

說明： 回合數為 6，翻動的**總次數**為 15*6=90

（4）r：在杯子翻動的回合中，符號 r 代表該回合翻轉後剩下的開口朝上的杯子數。

2、名詞定義 2： 「折半法」

（1）m個開口朝上的杯子，如果每回合翻轉n個杯子〈m≥n〉，經過至少一回合n個杯子被翻轉後，若開口朝上的杯子剩下r個，且**r為偶數**，即可將這偶數個杯子**折成兩半**，其中**一半保留暫不翻轉**，而以其他的杯子補足翻轉數目。

注意：「折半法」的特點是，從確定適當的 r 值開始使用「折半法」起，只要經過兩個回合，翻轉就能成功，如下舉例說明。

（2）例 1，m=10，n=4

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	10	0
1	**0 0 0 0 1 1 1 1 1 1** 剩 6 個“1”下回合可使用「折半法」	6	4
2	0 0 0 **1 0 0 0 1 1 1** 保留 3 個“1”不翻	4	6
3	0 0 0 **0** 0 0 0 **0 0 0**	0	10

說明：A、**綠色粗體字**表被翻動的杯子

B、從回合 1 結束剩 6 個偶數杯，回合 2 開始以「折半法」翻轉，**使用「折半法」起再 2 個回合後翻轉成功。**

（3）**「折半法」最佳偶數值的選擇：**

當 m 數字較大時，在翻轉過程中，可能會有好幾次剩下“1”的個數為偶數的情況，如何確定從哪個偶數 r 出現後，開始使用「折半法」？

①根據「**折半法**」的翻轉要訣，會固定 r/2 個“1”不動，因此可翻轉的杯子數剩下(m-r/2)個，因此(m-r/2)必需大於或等於一次翻轉的個數 n，簡化式子得 $r \le 2(m-n)$。

②因為要固定 r/2 個“1”不動，所以 r/2 也應 $\le n$，即 $r \le 2n$。

③為儘快使用「**折半法**」翻轉並考量①、②的限制，因此 r 應取符合 $r \le 2(m-n)$ 且 $r \le 2n$ 兩條件的偶數中的最大值。(如例 1，第一回合結束後有 6 個開口向上的杯子，第二回合結束後有 4 個開口向上的杯子，皆符合①、②的限制，但因 6>4，故取 6，於第一回合後，即可開始以「**折半法**」翻轉。

④在至少一次的n個杯子被翻轉後，當杯口向上的杯子剩下 $\mathbf{r_{max}}$ 個，即可開始使用「**折半法**」翻轉，而 $\mathbf{r_{max}}$ 是符合小於或等於 2(m-n)，且不大於 2n的幾個偶數中的最大值。整個翻轉將在開始使用「**折半法**」起，再兩個步驟即可結束。

「折半法」最佳偶數值 $\mathbf{r_{max}}$：

$\mathbf{r_{max}}$ 是符合 $\le \mathbf{2(m-n)}$ 且 $\le \mathbf{2n}$ 兩條件的偶數中的最大值

(4)使用「**折半法**」後兩個步驟結束的證明：

設總杯數為 m，翻量為 n，在 y 回合翻轉結束後剩下 2x 個 1(向上的杯子)，如下表：

回合	1 的數目	0 的數目	說明
y	2x	m-2x	剩下 2x 個 1
y+1	x+(n-x)=n	m-2x+x-(n-x)=m-n	折半法保留 x 個 1 不翻轉
y+2	0	m	在 y+2 回合後翻轉成功

3、名詞定義 3：「**對稱法**」

（1） **對稱法**的翻法如下：

第一回合留〈**m-n**〉**個 1** 不**翻**、 第二回合留〈**m-n**〉**個 0** 不**翻**

第三回合留〈**m-n**〉**個 1** 不**翻**、 第四回合留〈**m-n**〉**個 0** 不**翻**等等。

翻法也可變化如下：

第一回合留〈**m-n**〉**個 0** 不**翻**、 第二回合留〈**m-n**〉**個 1** 不**翻**

第三回合留〈**m-n**〉**個 0** 不**翻**、 第四回合留〈**m-n**〉**個 1** 不**翻**等等。

雖然，「對稱法」並不確保必能將所有開口朝上的杯子全數翻轉成朝下，但在一些特殊的 m 與 n 的組合，可只用「**對稱法**」將開口朝上的杯子全數翻轉爲止。如下所示的特例，即可用「**對稱法**」全數翻轉完成。

（2）例 2，m=4，n=3，m-n = 1

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1	4	0
1	**<u>0</u>** **0** **0** **1** 留 1 個 0 不翻	1	3
2	**0** **<u>1</u>** **1** **0** 留 1 個 1 不翻	2	2
3	**1** **1** **<u>0</u>** **1** 留 1 個 0 不翻	3	1
4	**0** **0** **0** **0**	0	4

說明： **綠色粗體字**表被翻動的杯子，**<u>藍色下標線粗體字</u>**表對稱法中〈m-n〉個不翻的杯子。

4、名詞定義 4：　「對稱法」+「折半法」

（1）翻法如下：

第一回合留〈**m-n**〉**個 1 不翻**

第二回合留〈**m-n**〉**個 0 不翻**

第三回合留〈**m-n**〉**個 1 不翻**

第四回合留〈**m-n**〉**個 0 不翻**、、、、直到開口朝上的杯子剩下為偶數個且可開始以「**折半法**」**翻轉**為止。如下舉例說明。

（2）例 3，m=14，n=11

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	14	0
1	**0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0** **<u>1 1 1</u>** 留 3 個 1 不翻	3	11
2	**<u>0 0 0</u>** **1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0** 留 3 個 0 不翻	8	6
3	**1 1 1 0 0 0 0 0** **<u>1 1 1</u>** **1 1 1** 留 3 個 1 不翻	9	5
4	**0 0 0** **<u>0 0 0</u>** **1 1** **0 0 0 0 0 0** 留 3 個 0 不翻，剩 2 個“1”，在這個回合後使用「折半法」。	2	12
5	**1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1** 0 0 使用「折半法」。	11	3
6	**0 0 0 0 0 0** 0 **0 0 0 0 0** 0 0	0	14

說明：A、綠色粗體字表被翻動的杯子，**<u>藍色下標線粗體字</u>**表對稱法中〈m-n〉個不翻的杯子。

B、先使用「對稱法」翻轉，m-n=3，第一回合留 3 個“1”未翻轉，第二回合留 3 個“0”不翻轉，第三回合留 3 個“1”不翻轉、、、

C、第二回合結束雖然“1”的個數為偶數個〈8 個〉，但 8＞2(14-11)，不符合 $r \le 2(m-n)$，直到第四步結束，剩下 2 個向上的杯子，符合前述 $r \le 2(m-n)$ 及 $r \le 2n$ 兩條件，可開始以「**折半法**」翻轉，再經兩個回合後結束。

注意：一般研究 m、n 翻轉的問題，常是(1)先列出翻法及產生的數字差，(2)先用『最大數字差』逐次逼近目標數，(3)接近目標數時尋找適當數字差的翻法，使正數等於目標量（翻量）。但**我發現以獨創的「折半法」、「對稱法」及「對稱法」+「折半法」，可以不須計算翻轉過程上下杯子的數字差，很容易地完成翻轉。**

三、用獨創的快捷翻轉法解各類型的翻轉杯子問題

以下敘述如何使用「**折半法**」、「**對稱法**」及「**對稱法」+「折半法**」解決甲類<u>每回合翻量為固定數</u>的 5 個類型問題。

類型 1　m÷n=1⋯q　q 為奇數且≠1：以「**對稱法**」+「**折半法**」**翻轉**

1、此類型即第四十五屆科展優勝作品**中的錯誤所在**。因為商是 1 且餘數為奇數，所以 m

和 n 不能同爲偶數，也不能同爲奇數。實作顯示，當 m 爲奇數，n 爲偶數，無法翻轉成功(原因及證明將在文後討論部分說明)，因此，在這類型中，m 必爲偶數，n 必爲奇數。**原參考文獻以實驗、推演、猜測和演算找出最少次數，在這個類型舉的例子是(p17)：**

*當商＝1，**翻量與餘數都是奇數時：***

杯數 10，翻量 7 時【10÷7＝1……3，最少次數 4＝1＋3】

杯數 16，翻量 9 時【16÷9＝1……7，最少次數 4＝1＋3】

其他相似組合也都符合，當商＝1 時，不論餘數是多少，只要翻量和餘數都是奇數，最少次數都是 4 次。

2、當 m=10、n=7 和 m=16、n=9 時，完成翻轉的回合數皆爲 4，但當 m，n 數字變大時，上述結論就不符實際結果。

3、此類型當 m，n 數字越大，以數字差逐次逼近目標數的方法會使翻轉過程難度大增，但若先以「**對稱法**」**翻轉再用**「**折半法**」**翻轉，可以很快完成！**

(1)例 4 ，m=18，n=15

回合	該回合結束後杯子的狀態																		1 的數目	0 的數目
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	18	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	15
2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	12	6
3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	9	9
4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	6	12
5	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15	3
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18

說明：A、先使用「對稱法」翻轉，第一回合留有 3 個“1”未翻轉，第二回合留 3 個“0”不翻轉，第三回合留有 3 個“1”不翻轉、、、

B、第二回合結束雖然“1”的個數爲偶數個〈12 個〉，但 12＞2(18-15)，還不能開始用「折半法」翻轉，直到第四回合結束，剩下 6 個向上的杯子〔**6 ≤ 2(18-15)且≤ 2x3**〕後，才開始用「折半法」翻轉，再經兩回合後結束。

(2)例 5，m=20，n=17

回合	該回合結束後杯子的狀態																				1 的數目	0 的數目
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	17
2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	14	6
3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	9	11
4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	8	12
5	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15	5
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	18
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	17	3
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20

說明：A、先使用「對稱法」翻轉。

B、第二回合和第四回合結束雖然“1”的個數爲偶數個〈分別爲 14 個和 8 個〉，但 14 和 8 均大於 2(20-17)，還不能開始用「折半法」翻轉，直到第六回合結束，剩下 2 個向上的杯子後才開始用「折半法」翻轉，再經兩回合後結束。

4、心得：

用「對稱法」+「折半法」，先以「對稱法」翻轉，依次留(m－n)個 1、(m－n)個 0、、不翻轉，因此若能求出以「對稱法」翻轉的次數，再加上用「折半法」翻轉的兩個步驟，就是最少翻轉步驟。証明如下：

証明：可從下列兩種情況分別進行。

(1) 如果m÷(m－n)= a，其中 a 爲整數，沒有餘數

因 m 爲偶數，n 爲奇數，故(m－n)爲奇數，上式中的 a 必爲偶數。

由 m÷(m－n)= a

得 m ＝(a－2)(m－n)+ 2(m－n) …………… 甲

及 m ＝(a－3)(m－n)+ 3(m－n) …………… 乙

及 m ＝(a－4)(m－n)+ 4(m－n) …………… 丙

因 a 爲偶數，故 a－2、a－3 及 a－4 分別爲偶、奇、偶數。「對稱法」的特色是，奇數回合剩餘的 1 有奇數個，偶數回合剩餘的 1 有偶數個，所以乙式中 a－3 回合後，剩奇數個 1，不適用「折半法」翻轉。

丙式中a－4 回合後，餘下 4(m－n)個 1，但明顯不符合前述$\mathbf{r_{max}}$ 要符合≤ 2(m-n)且≤ 2n的條件，所以也不適用「折半法」翻轉。

甲式中(a－2)、2 (m－n)均爲偶數，因 2(m－n)<2 n (這是因爲m÷n =1 餘 q ，故m= n＋q ，且 n＞q 及m－n＝q，即 2(m－n)= 2q＜2n)，所以 2(m－n)符合前述「折半法」所要求的≤ 2(m－n)及< 2 n 的條件，故從此回合(即第 a－2 回合)可開始以「折半法」翻轉，再 2 個回合後翻轉成功。

最少翻轉步驟爲(a－2)＋2 => **故最少翻轉回合數即爲 a**。

如：$\boxed{m=18，n=15}$ 18－15= 3

18÷3 = 6…0

18 = (6-2)x3＋6 = 4x3＋6

第 4 回合開始以「折半法」翻轉，再 2 個回合後翻轉成功。

4＋2= 6 **最少翻轉回合數爲 6**

$\boxed{m=12，n=9}$ 12－9= 3

12÷3 = 4…0

12 = (4-2)x3＋6= 2x3＋6

第 2 回合開始以「折半法」翻轉，再 2 個回合後翻轉成功。

2＋2= 4 **最少翻轉回合數爲 4**

(2) 如果$m \div (m-n) = b \cdots c$

可用類似前述的証法。

因 m 爲偶數，n 爲奇數，故$(m-n)$爲奇數，上式中的 b、c 奇偶性必相同。

由$m \div (m-n) = b \cdots c$

得 $m = (b)(m-n)+c$ ………………… 甲

及 $m = (b-1)(m-n)+(m-n+c)$ …………… 乙

及 $m = (b-2)(m-n)+(2m-2n+c)$ ………… 丙

及 $m = (b-3)(m-n)+(3m-3n+c)$ ………… 丁

由前述証明中已知$2(m-n)<2n$，而$c<(m-n)$，因此$(m-n+c)$必定$<2(m-n)$且$<2n$。另外，上面四個方程式的餘數中，僅甲及乙式中的c、$(m-n+c)$符合 $\leq 2(m-n)$且$\leq 2n$的條件，

因此：

(i)當 b 爲偶數時，只有甲式剩下的偶數 c 個 1 可適用「折半法」翻轉。

最少翻轉回合數爲 $\boxed{b+2}$，其中 b 回合來自「對稱法」翻轉，2 回合來自「折半法」翻轉，故**最少翻轉回合數爲(b＋2)**。

如：$\boxed{m=20，n=17}$， $20-17=3$

$20 \div 3 = 6 \cdots 2$

$20 = 6 \times 3 + 2 = 5 \times 3 + 5$ $6+2=8$ ，**最少翻轉回合數爲 8**

$\boxed{m=14，n=11}$， $14-11=3$

$14 \div 3 = 4 \cdots 2$

$14 = 4 \times 3 + 2 = 3 \times 3 + 5$ $4+2=6$，**最少翻轉回合數爲 6**

(ii)當 b 爲奇數時，c 亦爲奇數，而$(m-n+c)$爲偶數，只有乙式剩下$(m-n+c)$個 1 可適用「折半法」翻轉。

最少翻轉回合數爲 $\boxed{(b-1)+2}$，其中 b－1 回合來自「對稱法」翻轉，2 回合來自「折半法」，故**最少翻轉回合數爲(b＋1)**。

如：$\boxed{m=16，n=13}$， $16-13=3$

$16 \div 3 = 5 \cdots 1$

$16 = 5 \times 3 + 1 = 4 \times 3 + 4$ $(5-1)+2 = 5+1 = 6$，**最少翻轉回合數爲 6**

$\boxed{m=10，n=7}$ ， $10-7=3$

$10 \div 3 = 3 \cdots 1$

$10 = 3 \times 3 + 1 = 2 \times 3 + 4$ $(3-1)+2 = 3+1 = 4$，**最少翻轉回合數爲 4**

類型 2　m÷n=1⋯q　，　q=1，　即m-n=1：以「對稱法」翻轉

1、例 6，　m=6，n=5

步驟	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1　1　1　1　1　1	6	0
1	**0　0　0　0　0　1**	1	5
2	**1　1　1　1　0　0**	4	2
3	**0　0　0　1　1　1**	3	3
4	**1　1　0　0　0　0**	2	4
5	**0　1　1　1　1　1**	5	0
6	**0　0　0　0　0　0**	0	0

2、心得：當　m-n=1，m 個杯子各保留一次不翻轉，最少翻轉次數爲 m 步

類型 3　m÷n=1⋯q　　，q 爲偶數：以「折半法」翻轉

1、　例 7，　m=6，n=4

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1　1　1　1　1　1	6	0
1	**0　0　0　0　1　1**〈2 個 1，其中 1 個暫不翻轉〉	2	4
2	0　**1　1　1　0　1**	4	2
3	0　**0　0　0**　0　**0**	0	0

說明：在第一個回合結束後，剩下 2 個朝上的杯子，便開始使用「折半法」翻轉

2、例　8，　m=15，n=7

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1	15	0
1	**0　0　0　0　0　0　0　1　1　1　1　1　1　1　1**　4 個 1 暫不翻轉	8	7
2	0　0　0　**1　1　1　0　0　0　0　0　1　1　1　1**	7	8
3	0　0　0　**0　0　0**　0　0　0　0　0　**0　0　0　0**	0	0

3、心得：m÷n=p⋯q，　p=**1**，q 爲偶數，m=n+q 在第一個回合結束後，就可以開始使用「折半法」翻轉，然後於兩回合後結束，因此，最少**翻轉回合數爲**１＋２=３。

類型 4　m÷n=p⋯q　　p ≧**2**：以「折半法」翻轉

1、例 9，m=8，n=3

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1　1　1　1　1　1　1　1	8	0
1	**0　0　0**　1　1　1　1　1	5	3
2	0　0　0　**0　0　0　1　1**　這個回合後使用「折半法」1 個 1 暫不翻轉	2	6
3	0　0　0　0　**1　1　0　1**	3	5
4	0　0　0　0　**0　0**　0　**0**	0	8

2、例 10，m=10，n=4

因爲 6 ≤2(10-4)且≤ 2x4，從回合 1 結束後就可以開始使用「折半法」翻轉，最少翻轉回合數爲 3！

3、例 11，m=13，n=5

步驟	該回合結束後杯子的狀態													1 的數目	0 的數目
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	0
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	8	5
2	0	0	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	5	8
3	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**	0	0

4、心得：

由m÷n＝p…q

得m=n p+q

且m=n(p－1)+(n＋q)

當m÷n＝p…q，　p≧2，則m、n、p和q之間的奇偶關係如下表所示：

m	n	p	q	p－1	n＋q
偶	偶	不一定	偶	不一定	偶
偶	奇	奇	奇	偶	偶
		偶	偶	奇	奇
奇	奇	奇	奇	偶	偶
		偶	偶	奇	奇

當(n+q)爲偶數時，因q<n，故n+q<2n。又因p≥2，q=m－n p≤m－2n，故n+q≤m-n≤2(m-n)，即n+q符合r_{max}的條件，所以翻轉(p－1)回合後，就可以開始運用「折半法」，2回合後翻轉成功。

因此最少翻轉回合數爲(p－1)+2＝p＋1。

當(n＋q)爲奇數時，q必爲偶數(如上表所示)，因q<n<2n，又因p≥2，q=m－n p≤m－2n≤2m－2n=2(m－n)，即q符合r_{max}的條件，所以翻轉p回合後，就可以開始運用「折半法」，2回合後翻轉成功。

因此最少翻轉回合數爲（p＋2)次。

類型 5　m÷n＝p，p 爲整數

1、例 12，　m=6，n=2

步驟	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1　1　1　1　1　1	6	0
1	**0　0**　1　1　1　1	4	2
2	0　0　**0　0**　1　1	2	4
3	0　0　0　0　**0　0**	0	0

2、心得：若 **n** 能整除 **m**，m÷n＝p，最少翻轉回合數爲 p 。

表 1、　m個開口朝上的杯子，每次翻轉n個杯子〈m≥n〉，使全部杯子開口朝下最少翻轉回合數的結果整理表

n \ m	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6	×	7	×	8	×	9	×	10
3	1	4	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8
4		1	×	3	×	2	×	3	×	3	×	4	×	4	×	5	×	5
5			1	6	3	4	3	2	3	4	3	4	3	4	5	4	5	4
6				1	×	3	×	3	×	2	×	3	×	3	×	3	×	4
7					1	8	3	**4**	3	4	3	2	3	4	3	4	3	4
8						1	×	3	×	3	×	3	×	2	×	3	×	3
9							1	10	3	**4**	3	4	3	4	3	2	3	4
10								1	×	3	×	3	×	3	×	3	×	2
11									1	12	3	**6**	3	4	3	4	3	4
12										1	×	3	×	3	×	3	×	3
13											1	14	3	**6**	3	4	3	4
14												1	×	3	×	3	×	3
15													1	14	3	**6**	3	4
16														1	×	3	×	3
17															1	18	3	**8**
18																1	×	3
19																	1	20
20																		1

類型一(1)　m÷n＝p…q　　p＝**1**，q 爲奇數且不等於 **1 (參考文獻中的錯誤所在)**

類型二(2)　m－n＝1

類型三(3)　m÷n＝p…q　　p＝**1**，q 爲偶數

類型四(4)　m÷n＝p…q　　p ≥**2**

類型五(5)　m÷n＝p，p 爲整數

捌、討論

一、m個開口朝上的杯子，每次翻轉n個杯子〈$m \geq n$〉，要使其所有的杯子開口朝下，杯子被翻動的總次數必大於或等於杯子數。

〔定理一〕：次數基本定理：杯子被翻動的總次數必大於或等於杯數，即$s \geq m$。
(s 代表 m 個杯子被翻動的總次數)

理由明顯，証明從略，但舉例說明如下：

參考表 **1** 結果之整理

當 **m=8**， **n=2** 最少翻轉回合數為 **4**，即每次翻兩個杯，經 **4** 回合可成功，每個杯子剛好被翻轉一次，**8** 個杯子被翻動的總次數為 **8** 次。**(s=8， m=8)**

當 **m=8**， **n=3** 最少翻轉回合數為 **4**，**4** 回合共翻轉了 **3**×4=**12** 個杯次才成功，有的杯子不只被翻轉 **1** 次，因此 **8** 個杯子被翻動的總次數為 **12** 次。**(s=12， m=8)**

〔定理二〕：奇偶基本定理：奇數杯若翻轉成功，杯子被翻動的總次數必為奇數。
偶數杯若翻轉成功，杯子被翻動的總次數必為偶數。
即 $s \equiv m \pmod 2$ **(s 代表 m 個杯子被翻動的總次數)**

舉例說明如下：

參考表 **1** 結果整理

當 **m=7**， **n=3** 最少翻轉回合數為 **3**，即每次翻 **3** 個杯，經 **3** 回合可成功，杯子被翻動的

總次數為 **3**×3=**9** 次，奇數。

當 **m=8**， **n=3** 最少翻轉回合數為 **4**，杯子被翻動的總次數為 **3**×4=**12** 次，偶數。

〔定理三〕回合數基本定理：奇數杯若翻轉成功，翻動的總回合數必為奇數。
偶數杯一次翻轉奇數杯，翻動的總回合數必為偶數。

說明如下：

以 **t** 表回合數，由奇偶基本定理可知：

當 m 為奇數，若翻轉成功，杯子被翻動的總次數 s 必為奇數。

又因 **n**×t=**s**，故 **t** 必為奇數。

當 m 為偶數，杯子被翻動的總次數 s 必為偶數。

由於定理假設的條件是 n 為奇數，又因 **n**×t=**s**，故 **t** 必為偶數。

二、當杯子數 m 爲奇數、若每次翻轉 n 個杯子，n 爲偶數，則無法使全數杯口朝下。因爲要將 m 個開口朝上的杯子經過數次翻轉後變成 m 個開口朝的杯子，所需翻動的回合數應該是奇數，但每次翻動 n 個杯子，而 n 是偶數，所以實際上翻動的總次數應爲偶數而不可能爲奇數，故爲矛盾。而偶數個杯子翻轉奇數個杯子，以及偶數個杯子翻轉偶數個杯子時都可以成功。

三、m個開口朝上的杯子，每次翻轉n個杯子〈$m \geq n$〉，要使其所有的杯子開口朝下的必要條件是m爲偶數，或者m、n都是奇數。

理由如下：

$s \equiv m \pmod 2$，因 $s = nt$

=> $nt \equiv m \pmod 2$

(s 代表 m 個杯子被翻動的總次數，t 代表 m 個杯子翻轉成功所需的回合數)

=>若 m 爲偶數，則 ① n 爲偶數 => t 爲奇或偶數

② n 爲奇數 => t 爲偶數

=>若 m 爲奇數，則 ① n 爲奇數 => t 爲奇數

② 但若 n 爲偶數 => 矛盾 (違背 $nt \equiv m \pmod 2$)

四、$\boxed{\text{類型 1 } m \div n = 1 \cdots q \quad q \text{ 爲奇數且} \neq 1}$最少回合數的第二種證明方法：

除了前述(p9-10)以「對稱法」+「折半法」的翻法所提出的最少翻轉回合數之證明外，亦可以奇偶基本定理和回合數基本定理來證明本研究的結果爲最少翻轉回合數，這個證明更爲一般化。

證明：

因 m 爲偶數，n 爲奇數，故$(m-n)$爲奇數，一次翻 n 杯 = 全翻 + 翻$(m-n)$ 杯

例如 20 個杯子一次翻 17 個杯子等於一次翻 20 個杯子後再翻 3 (3=20-17) 個杯子

由奇偶基本定理和回合數基本定理知

m 爲偶數，n 是奇數，要翻轉成功，杯子被翻動的總次數必爲偶數，杯子翻轉成功所需的回合數 t 必爲偶數

∵ 杯子被全翻偶數次等同狀態不動

∴一次翻 n 杯 × 回合數 後杯子狀態等同 一次翻(m-n)杯 × 回合數後杯子狀態

由次數基本定理，杯子被翻動的總次數必大於等於杯數

$(m-n) \times \mathbf{t}$ (回合數) $\geqq \mathbf{m}$

=> $\mathbf{t}$ (回合數) $\geqq \mathbf{m} / (m-n)$

若 $\mathbf{m} / (m-n) = a$，a 爲整數 => t(回合數)$\geqq$ **a**，所以最少翻轉回合數爲 **a**。

若 $\mathbf{m} / (m-n) = b \cdots c$ => t(回合數)爲偶數且$\geqq \mathbf{m} / (m-n) > b$，

如果 **b** 爲偶數 => t≧**(b＋2)** ，故最少翻轉回合數爲 **(b＋2)**。

如果 **b** 爲奇數 => t≧**(b＋1)** ，故最少翻轉回合數爲 **(b＋1)**。

玖、延伸：

翻轉杯子的乙類問題，即以連續數翻轉

m 個杯口朝上的杯子，將分成三部分探討：

(A)以連續數正整數 1、2、3、、翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個杯等等)使所有的杯子杯口都朝下。

(B) 以連續奇數 1、3、5、7……翻轉

(C) 以連續偶數 2、4、6、8……翻轉

(A)以連續數正整數 1、2、3、、翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個杯等等)，使所有的杯子杯口都朝下。

一、例 1， m=8，以連續數 1、2、3、、翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個杯等等)

回合	翻量	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0		1 1 1 1 1 1 1 1	8	0
1	**1**	**0** 1 1 1 1 1 1 1	7	1
2	**2**	0 **0** **0** 1 1 1 1 1	5	3
3	3	0 0 **1** **0** **0** 1 1 1	4	4
4	4	0 0 **0** 0 0 **0** **0** **0**	0	8
杯子被翻動的次數		1 1 **3** 1 1 1 1 1		

說明：4 個回合可將 8 個杯子全翻轉爲杯口朝下，翻量分別爲 1、2、3、4。

8 個杯子被翻動的總次數爲 10 次(1+ 1+ **3+** 1+ 1+ 1+ 1+ 1)

二、m 個開口朝上的杯子，從 1 開始，以連續數翻轉，使全部杯子開口朝下最少翻轉回合數 t 的結果整理(m：杯數 t：最少回合數 s：杯子被翻動的總次數)

表 2

m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
t	**1**	**X**	**2**	**3**	**5**	**3**	**5**	**4**	**5**	**4**	**5**	**7**	**5**	**7**	**5**	**7**	**6**	**7**
s	**1**	**X**	**3**	**6**	**15**	**6**	**15**	**10**	**15**	**10**	**15**	**28**	**15**	**28**	**15**	**28**	**21**	**28**

m	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
t	**6**	**7**	**6**	**7**	**9**	**7**	**9**	**7**	**9**	**7**	**9**	**8**	**9**	**8**	**9**	**8**	**9**	**8**
s	**21**	**28**	**21**	**21**	**45**	**28**	**45**	**28**	**45**	**28**	**45**	**36**	**45**	**36**	**45**	**36**	**45**	**36**

m	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**
t	**6**	**7**	**6**	**7**	**9**	**7**	**9**	**10**	**9**	**7**	**9**	**8**	**9**	**8**	**9**	**8**	**9**	**11**
s	**21**	**28**	**21**	**28**	**45**	**28**	**45**	**55**	**45**	**28**	**45**	**36**	**45**	**36**	**45**	**36**	**45**	**66**

m	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**
t	**10**	**11**	**13**	**11**	**13**	**11**	**13**	**11**	**13**	**11**	**13**	**11**	**13**	**12**	**13**	**12**	**13**	**12**
s	**55**	**66**	**91**	**66**	**91**	**66**	**91**	**66**	**91**	**66**	**91**	**66**	**91**	**78**	**91**	**78**	**91**	**78**

m	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
t	13	12	13	12	13	12	13	15	13	15	13	15	13	15	13	15	13	15
s	91	78	91	78	91	78	91	120	91	120	91	120	91	120	91	120	91	120

三、我的觀察及發現：

1、m 個開口朝上的杯子，從 1 開始，以連續數翻轉，當全部杯子開口朝下，杯子被翻動的總次數 s 必為從 1 起連續正整數的和。

2、當 m 本身即為從 1 起連續正整數的和，翻轉成功的最少回合數 t 即為連續正整數的個數。

杯子被翻動的總次數 s = t(t+1)/2，且 **s** = m。

例如下表 3，

m=1、3、6、10、15、21、28 等等時，m 為連續正整數的和，每個杯子正好被翻轉 1 次

杯子被翻動的總次數(s)= 每回合的翻量總和= t(t+1)/2= 杯子數

3、從 1 起的連續正整數和，呈奇奇偶偶、奇奇偶偶……的排列，因此杯子被翻動的總次數亦呈奇奇偶偶、奇奇偶偶……的排列，如下表 3 所示。

4、表 3， m 為連續正整數的和的連續翻結果觀察

m(杯數)	t(最少回合數)	翻量	杯子被翻動的總次數 t(t+1)/2
1	1	1	1 (奇)
3	2	1，2	3 (奇)
6	3	1，2，3	6 (偶)
10	4	1，2，3，4	10 (偶)
15	5	1，2，3，4，5	15 (奇)
21	6	1，2，3，4，5，6	21 (奇)
28	7	1，2，3，4，5，6，7	28 (偶)
36	8	1，2，3，4，5，6，7，8	36 (偶)
45	9	1，2，3，4，5，6，7，8，9	45 (奇)
55	10	1，2，3，4，5，6，7，8，9，10	55 (奇)
66	11	1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11	66 (偶)
78	12	1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12	78 (偶)

四、我的發現：

(1)、由〔定理 1〕「次數基本定理」，杯子被翻動的總次數必大於或等於杯數，即s≥m，例如當杯數為 4，杯子被翻動的總次數必要大於等於 4 才可能把 4 個杯子都翻轉過來。因翻量為由 1 開始的連續數，杯數為 4，杯子被翻動的總次數必定是一個大於 **4** 的連續正整數和，又由〔定理 2〕「奇偶基本定理」可知此連續正整數和亦為偶數，故**m=4**

杯子被翻動的總次數同 **m=6**，杯子被翻動的總次數：1+2+3=6，翻轉成功回合數：3。

(2)、由「次數基本定理」和「奇偶基本定理」得知 12 個杯子要翻轉成功杯子被翻動的總次數必爲偶數，**且必大於或等於 12**，又由 s=t(t+1)/2 得知**最接近 12 且大於 12 的連續正整數和爲 15，但 15 爲奇數，與定理矛盾，第二接近的連續正整數和爲 21，但 21 亦爲奇數，再下一個連續正整數和爲 28，28**≡12 (mod 2)，**m=12 與 m=28** 杯子被翻動的總次數 **s** 相等，**7 個回合可翻轉成功**(1+2+3+4+5+6+7)。

五、快捷求出連續數翻轉回合數的方法

1、設杯數爲 m，連續數翻轉成功的回合數爲 t

(1)、若杯數 m 爲連續正整數的和，**t** 則爲連續正整數的個數。

(2)、若杯數 m 非連續數的和，如下數線圖

數線	m	m_1	m_2	m_3

m_1、 m_2 、m_3皆爲連續正整數的和，且$m_1 < m_2 < m_3$

(i)找出大於m且最接近m的連續數正整數和m_1，

若m_1-m爲偶數，即m_1和m同奇偶性，則$t = t_1$

(m個杯子翻轉成功的回合數等同m_1個杯子翻轉成功的回合數)

(ii)若m_1-m爲奇數，則往數線右邊尋找第二接近m的連續數和m_2，

若m_2-m爲偶數，**則$t = t_2$**

(m杯子翻轉成功的回合數等同m_2個杯子翻轉成功的回合數)

(iii)若m_2-m爲奇數，則往數線右邊尋找第三接近m的連續數和m_3，

此時，**m_3和m必同奇偶性，理由如下：**

由表 2，由 1 開始的連續正整數和以(奇奇偶偶) (奇奇偶偶).....排列，因此若杯數m非連續數的和，則最多往數線右端尋找到第三接近的連續正整數和m_3，必與m同奇偶。

此時m_3-m爲偶數，**則$t = t_3$**

(m杯子翻轉成功的回合數等同m_3個杯子翻轉成功的回合數)

2、 例子： 杯數爲 12，以連續數正整數 1、2、3、、翻轉、

m=12	m_1 =15	m_2 =21	m_3=28

觀察 15–12 和 21–12 的差皆爲奇數，

由於m_3=28，28–12=16 爲偶數，因此 12 個杯子翻轉成功的回合數等同 28 個杯子翻轉成功的回合數，皆爲 7，杯子被翻動的總次數 7(7+1)/2=28。

六、連續數翻轉回合數快捷求法的證明

1、連續數翻轉數的杯子問題中，杯子被翻動的總次數 s 與翻轉成功的回合數 t 之間，存在以下的關係：

〔定理四〕：**s-t 定理** (**s：杯子被翻動的總次數　t：翻轉成功的回合數**)
回合數被 4 除餘 1 或餘 2 時，總次數必爲奇數；
回合數被 4 除餘 3 或整除時，總次數必爲偶數。
註：s-t 定理僅適用連續數翻轉的杯子問題

說明如下：

因爲在連續數翻轉的規則下，s=t(t+1)/2，故

當 $t \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow s = t(t+1)/2 \equiv 1 \pmod 2$

當 $t \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow s = t(t+1)/2 \equiv 1 \pmod 2$

當 $t \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow s = t(t+1)/2 \equiv 0 \pmod 2$

當 $t \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow s = t(t+1)/2 \equiv 0 \pmod 2$

2、連續數翻轉回合數快捷求法的證明：

在前面甲類固定數翻轉的討論中，已得知「次數基本定理」，由「次數基本定理」知連續翻的杯子被翻動總次數 $s = t(t+1)/2 \geqq m$

$$\therefore\ t \geqq \frac{-1+\sqrt{(8m+1)}}{2},$$

將 $\frac{-1+\sqrt{(8m+1)}}{2}$ 設爲k，以便討論

若 k 爲整數，則 t = k

若 k 爲小數，則 t 必大於 k，即 t≧〔k+1〕，〔 〕爲高斯符號

將杯數 m 分別爲奇偶數的情況討論如下：

(1) 杯數 **m 爲偶數**

根據甲類固定數翻轉的討論中，根據「奇偶基本定理」，知 s 必爲偶數，分下列四種情況討論：

(i) 〔k+1〕÷4 餘 1

∵t≧〔k+1〕且 s 必爲偶數

∴根據 s-t 定理得知 t 之最小可能爲〔k+1〕+ 2

(ii) 〔k+1〕÷4 餘 2

∵t≧〔k+1〕且 s 必爲偶數

∴根據 s-t 定理得知 t 之最小可能爲〔k+1〕+1

(iii) 〔k+1〕÷4 餘 3

∵t≧〔k+1〕且 s 必爲偶數

∴根據 s-t 定理得知 t 之最小可能爲〔k+1〕

(iv) 〔k+1〕÷4 餘 0

∵t≧〔k+1〕且 s 必為偶數

∴根據 s-t 定理得知 t 之最小可能為〔k+1〕

(2)杯數 m 為奇數

根據奇偶基本定理，s 必為奇數，分下列四種情況討論：

(i) 〔k+1〕÷4 餘 1

∵t≧〔k+1〕且 s 必為奇數

∴根據 s-t 定理得知 t 之最小可能為〔k+1〕

(ii) 〔k+1〕÷4 餘 2

∵t≧〔k+1〕且 s 必為奇數

∴根據 s-t 定理得知 t 之最小可能為〔k+1〕

(iii) 〔k+1〕÷4 餘 3

∵t≧〔k+1〕且 s 必為奇數

∴根據 s-t 定理得知 t 之最小可能為〔k+1〕+2

(iv) 〔k+1〕÷4 餘 1

∵t≧〔k+1〕且 s 必為奇數

∴根據 s-t 定理得知 t 之最小可能為〔k+1〕+1

七、創造連續數翻轉快捷翻法

1、名詞定義 5： 二分法

由上述回合數快捷求法求出杯子的翻轉總次數，將杯子翻轉總次數減去總杯數所得的差可視為某些杯子需「**多浪費掉**」一些翻轉步驟，這些步驟以一下一上的方式抵銷並不會影響到杯子原始的狀態，因此**二分法的翻法是：**

將杯子把杯子分二邊，一邊是需浪費翻轉步驟的杯子，一邊是僅需翻轉一次的杯子，然後從需浪費翻轉步驟的杯子開始依序翻轉，以實例說明如下：

★杯數為 4，m=4，以連續數 1、2、3 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個，第三回合翻 3 個杯)

由回合數快捷求法知最少翻轉回合數為 3，杯子翻轉總次數為 6

6 – 4 = 2 (杯子只有 4 個，翻轉總次數為 6，多出 2 次翻轉，必須「**浪費掉**」)

2 ÷ 2 = 1 (多出的 2 次翻轉可由 **1** 個杯子(①)，將該杯子多翻轉一下一上抵銷)

因此可以把杯子分二邊，一邊 **1** 個杯，一邊 **3** 個杯

①	②	③	④
1			
2	**2**		
3		**3**	**3**

說明：①--④表 4 個杯子，**1**.表第 1 回合翻動，**2** 表第 2 回合翻動，**3** 表第 3 回合翻動。在左例中第 1 回合翻 1 號杯，第 2 回合翻 1、2 號杯，第 3 回合翻 1、2、3 號杯

★**杯數為 7，m=7，以連續數 1、2、3 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個，第三回合翻 3 個杯等等)**

由回合數快捷求法知最少翻轉回合數為 5，杯子翻轉總次數為 15

15 – 7 = 8　(杯子只有 7 個，翻轉總次數為 15，多出 8 次翻轉)

8 ÷ 2 = 4　(多出的 8 次翻轉可由 **4** 個杯子，每個杯子多翻轉一下一上抵銷)

因此可以把杯子分二邊，一邊 **4** 個杯，一邊 **3** 個杯

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
1	**2**	**2**	**3**			
3	**3**	**4**	**4**			
4	**4**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**

說明：①--⑦表 7 個杯子，第 1 回合翻 1 號杯，第 2 回合翻 2、3 號杯，第 3 回合翻 4、1、2 號杯，第 4 回合翻 3、4、1、2 號杯………

★**杯數為 8，m=8，以連續數 1、2、3 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個，第三回合翻 3 個杯等等)**

由回合數快捷求法知最少翻轉回合數為 4，杯子翻轉總次數為 10

10 – 8 = 2　(杯子只有 8 個，翻轉總次數為 10，多出 2 次翻轉)

2 ÷ 2 = 1　(多出的 2 次翻轉可由 1 個杯子，多翻轉一下一上抵銷)

因此可以把杯子分二邊，一邊 **1** 個杯，一邊 **7** 個杯

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
1	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**
2							
3							

說明：①--⑧表 8 個杯子，第 1 回合翻 1 號杯，第 2 回合翻 1、2 號杯，第 3 回合翻、1、3、4 號杯，第 4 回合翻 5、6、7、8 號杯。

★因為有所謂「多浪費掉」的一下一上的翻轉方式再加上一次往下翻的步驟，因此翻轉回合數為 3 以上的連續翻才適用此法。

(B) 以連續奇數 1、3、5、7……翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 3 個杯等等)，使所有的杯子杯口都朝下。

★**杯數為 7，m=7，以連續數 1、3、5 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 3 個，第三回合翻 5 個杯等等)**

連續奇數和必為完全平方數，若杯數 m 非連續奇數和

同連續翻回合數快捷求法原理，應尋找**數線右邊最接近且同奇偶的完全平方數 9**

最少翻轉回合數為 3，杯子翻轉總次數為 9(1+3+5)

9 – 7 = 2　(杯子只有 7 個，翻轉總次數為 9，多出 2 次翻轉)

2 ÷ 2 = 1　(多出的 2 次翻轉可由 1 個杯子多翻轉一下一上抵銷)

把杯子分二邊，一邊 **1** 個杯，一邊 **6** 個杯

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
1						
2	**2**	**2**				
3			**3**	**3**	**3**	**3**

說明：①--⑦表 7 個杯子，1 表第 1 回合翻動 1 號，**2** 表第 2 回合翻動 1-3 號 3 個杯，**3** 表第 3 回合翻動 1、4、5、6、7 號 5 個杯

(C) 以連續偶數 2、4、6、8……翻轉(第一回合翻 2 個杯，第二回合翻 4 個杯等等)，使所有的杯子杯口都朝下。

因翻量給定爲偶數，故僅杯數爲偶數時才能翻轉成功，若杯數 m 非連續偶數和，同連續翻回合數快捷求法原理，尋找**數線右邊第一接近的**連續偶數和即爲杯子翻轉總次數，連續偶數的個數即爲杯子翻轉成功的最少回合數。

★杯數爲 8，m=8，以連續偶數 2、4、6…翻轉(第一回合翻 2 個杯，第二回合翻 4 個，第三回合翻 6 個杯等等)

由回合數快捷求法知最少翻轉回合數爲 3，杯子翻轉總次數爲 12(2+4+6)

$12 - 8 = 4$　　(杯子只有 8 個，翻轉總次數爲 12，多出 4 次翻轉)

$4 \div 2 = 2$　　(多出的 4 次翻轉可由 2 個杯子，多翻轉一上一下抵銷)

把杯子分二邊，一邊 **1** 個杯，一邊 **7** 個杯

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
1	**1**						
2	**2**	**2**	**2**				
3	**3**			**3**	**3**	**3**	**3**

說明：①--⑧表 8 個杯子，1 表第 1 回合翻動 1、2 號兩個杯，**2** 表第 2 回合翻動 1-4 號 4 個杯，**3** 表第 3 回合翻動 1、2、5、6、7、8 號 6 個杯

拾、結論

一、一般研究杯子的翻法，常是列出翻法及計算其交換正反杯數的數字差，然後一步一步逼近尋找適當的數字差的翻法，在本文的研究中，從實作發現以「折半法」、「對稱法」及「折半法」加「對稱法」這三個簡易的方法翻轉，可以不需在過程中反覆計算正反杯數的數字差，而輕易達到翻轉的目的，利用這三個方法，翻杯子的數學問題，老嫗能解！

二、文獻探討中的疑義部分，主要為本研究的**類型 1 問題，即** m÷n＝p…q ，**而** p＝**1**、 q **為奇數且不等於 1**，翻轉較為複雜，若使用傳統數字差的算法，會使翻轉過程複雜，增加翻轉的困難度，如果以本研究中發現的「對稱法」搭配「折半法」翻轉，可以在最短的時間內翻轉成功。在〔捌、討論 4〕已證明為最少回合數。

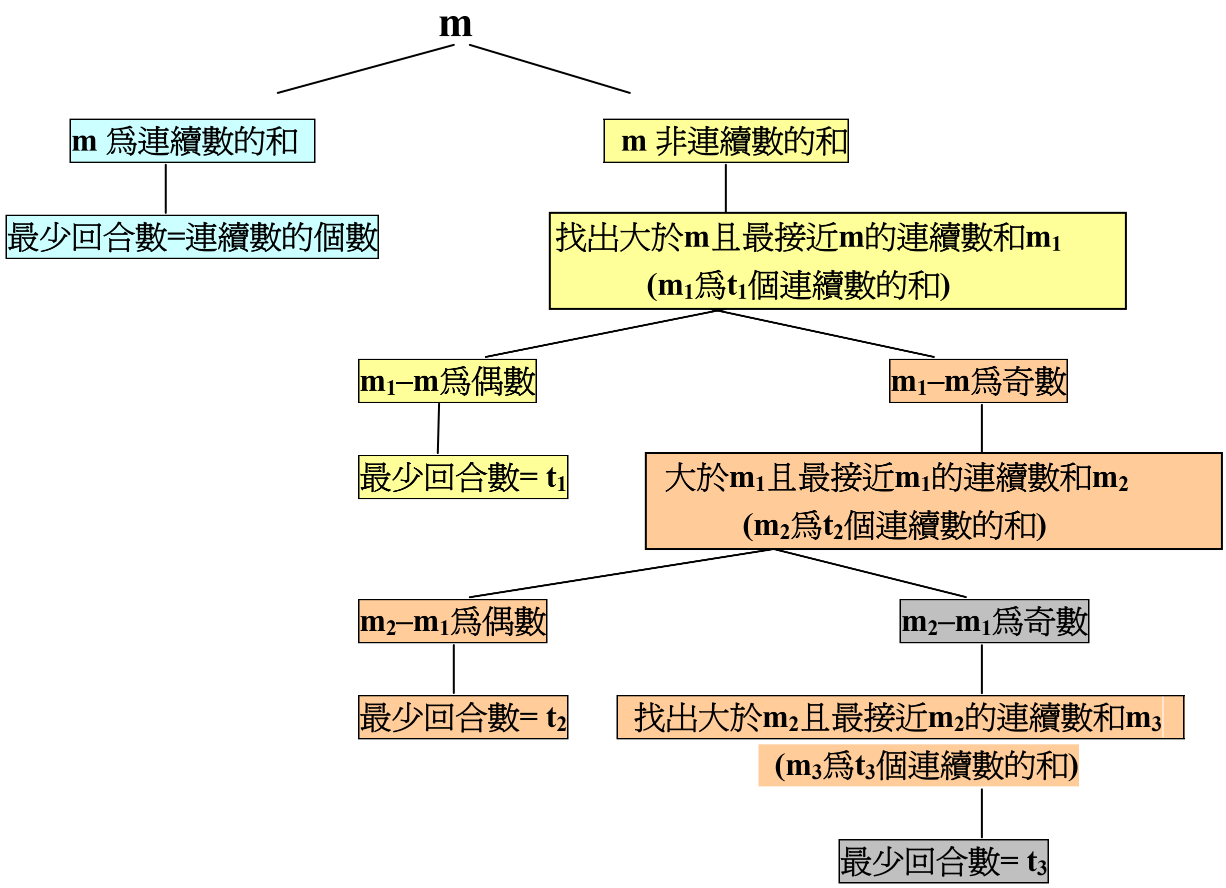
三、在〔捌、討論〕已討論當杯數為奇數翻量為偶數時無法翻轉成功，除此以外的翻轉都能成功，歸納「m個開口朝上的杯子，每次翻轉n個杯子〈m≥n〉，使全部杯子開口朝下的最少翻轉回合數及快捷翻法」如下表所示：

類型	快捷翻法	最少翻轉回合數
類型 1　m÷n＝p…q p＝**1**， q 為奇數且不等於 **1**	「對稱法」搭配「折半法」	m /(m－n)＝a，a 為整數， **a** 回合 m /(m－n)＝b…c **b 為偶數，(b＋2)** 回合 **b 為奇數，(b＋1)** 回合
類型 2　m-n＝**1**	「對稱法」	**m** 回合
類型 3　m÷n＝p…q　p＝**1**， q 為偶數	「折半法」	3 回合
類型 4　m÷n＝p…q　p≥2	「折半法」	(n＋q)為偶數，(p＋1) 回合 (n＋q)為奇數，(p＋2) 回合
類型 5　m÷n＝p ，p 為整數	每次翻 **n** 個	p 回合

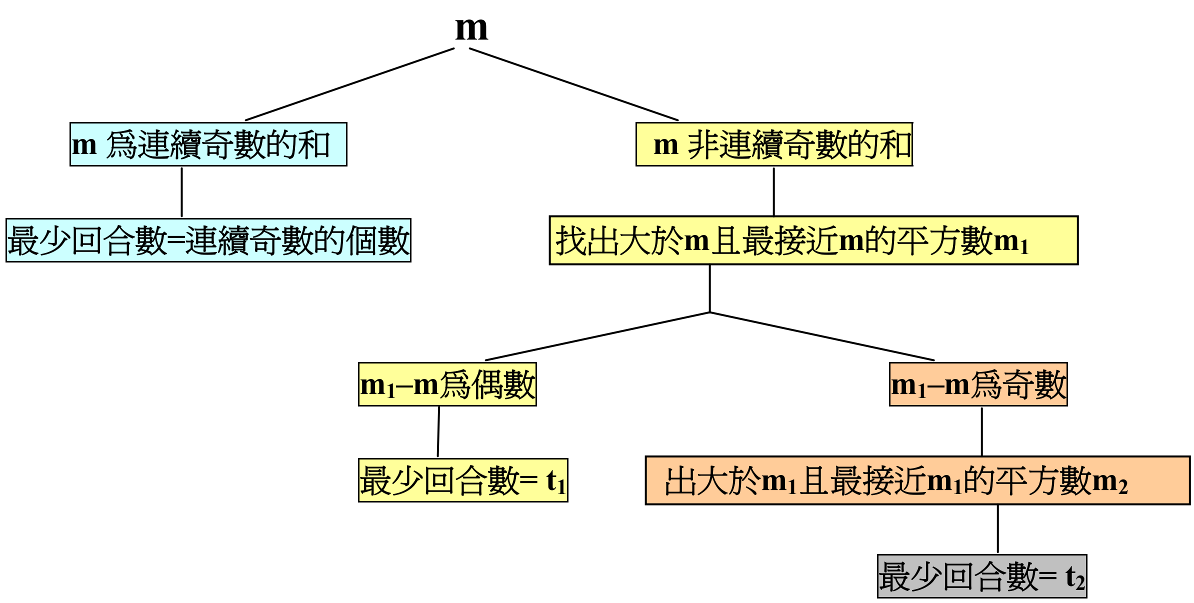
四、在〔玖、延伸〕以**連續數翻轉**的部分，無論是(A)以連續數正整數 1、2、3、、翻轉，或者是(B)以連續奇數 1、3、5、7……翻轉，又或者是(C)以連續偶數 2、4、6、8……翻轉，針對這個延伸的部分，本研究也找出最少翻轉回合數的快捷求法，並創造不需在每回合計算正反杯差的簡易翻法「二分法」，以求迅速翻轉成功。

五、**連續數翻轉回合數快捷求法流程圖：**

(A)m 個開口朝上的杯子，從 1 開始的連續正整數翻轉，使全部杯子開口朝下最少翻轉回合數　(m_1、 m_2 、m_3皆為連續正整數的和，且$m_1 < m_2 < m_3$)



(B)以連續奇數 1、3、5、7……翻轉(m_1為t_1個連續奇數的和，m_2為t_2個連續奇數的和))



(C) 以連續偶數 2、4、6、8……翻轉，(翻轉僅在杯子數為偶數的情況下才能翻轉成功)
(m_1為t_1個連續偶數的和)

m

m 為連續偶數的和

最少回合數=連續偶數的個數

m 非連續偶數的和

找出大於**m**且最接近**m**的連續偶數和$\mathbf{m_1}$

最少回合數= $\mathbf{t_1}$

拾壹、應用

在參加市中運啦啦隊的舉牌表演後，我發現可以把翻杯子的數學概念應用在生活中，例如以下的趣題：

題目、今有一支總計 17 人的表演旗隊，每人左手執白旗，右手執黑旗。開始時全體只舉起白旗，表演的方式是每 30 秒都必需有 7 人轉換舉起旗的顏色，其餘的隊員不用轉旗色，問最快要多久可以讓所用人同時舉起黑旗？

答：17÷7 = 2⋯3　，7+3 為偶數

2 + 1 = 3（要換手 3 次）

每次要用半分鐘，3　次共 1 分鐘 30 秒。

答：共 1 分鐘 30 秒。

本研究甲類固定翻杯生活應用題

類型 4　m÷n＝p⋯q　，　p＞2

（n ＋ q)為偶數，要(p ＋ 1)　回合

題目、一隊 30 人的啦啦隊，每人手執正反分別為紅色和藍色的牌子，出場時只舉起紅色牌向前，表演過程是每 5 秒必須有人改變所舉牌的顏色，而且規定第一次(開演 5 秒後)須有 1 人改變牌的顏色，第二次(開演 10 秒後)須有 2 人改變牌的顏色，依此連續數法則類推⋯⋯，結束時全體要舉起藍色牌，請問這次表演至少需時多久？

答：最接近 30 的連續正整數和為 36

36 與 30　同奇偶

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8= 36

36 為 8 個連續正整數的和，回合數為 8

故 8 x 5 = 40　　　　答：40 秒。

本研究乙類連續數翻轉杯子的生活應用題

拾貳、參考資料

一、翰林版七年級上學期國中數學　第二章　數與數線

二、翰林版七年級上學期國中數學　第三章　數量的規律

三、翰林版九年級下學期國中數學　第三章　生活應用

四、國立台灣科學教育館http://www.ntsec.gov.tw/第四十五屆全國科展