
030405

--	--

壹、摘要

m 個杯口向上的杯子，每次翻轉 n 個，讓所有的杯子朝下最少需要翻轉幾回合？去年的全國科展有一優勝作品，探討的正是這類問題。經過研究，我發現該文因較缺乏系統性，沒有提出快捷翻轉杯子的策略，在未證明翻轉次數確實是最少的情況下，即從所得數據歸納最少翻轉次數的公式，所以沒有發現部份結論有誤。

一般研究杯子翻轉的問題都是在每一回合計算正反杯的數量變化，可是當杯數和翻量變大，這種計算杯數差的方法會十分複雜。因此本研究創造了三種特殊且簡易的操作法，分別稱為折半法、對稱法及折半法+對稱法。文內將介紹如何用這幾種快捷的翻法解各類型翻轉杯子的問題，並證明所得的確實是最少翻轉回合數。

最後，本研究還會討論以連續數翻轉杯子的延伸問題，並設計一些生活應用題，以推廣研究的結果。

貳、研究動機

幾年前，曾聽到一場中研院的教授對中小學生的演講，在演講中教授問大家假如有 9 個杯口向上的杯子，每一次要翻轉 6 個，翻轉是指讓本來杯口是朝下的杯子轉成杯口朝上，本來朝上的杯子則轉成朝下，問是否可以成功的讓所有的杯子朝下？這個問題的解法，讓我第一次領會到數字奇偶性的重要，以及用符號解題的妙用。

去年「第四十五屆全國科展」有一優勝作品「翻出一片天」，探討的正是這類翻杯子的問題，因為對這問題有興趣，所以在參觀時，我小心閱讀了一些例子，發現部份結論是對的，但是當我另外用其他數字驗證時，竟然發現與結論不合，當時我不能確定是我做錯了，還是該作品取樣的範圍有些疏漏，於是決定嘗試把這個翻轉杯子的問題做一番較深入的研究。

參、研究目的

- 一、將一個開口朝上的杯子翻轉一次（轉 180 度），杯子的開口便會朝下，朝下的杯子經過一次翻轉後，開口便會朝上。現有 m 個開口朝上的杯子，如果每回合翻轉 n 個杯子（ $m \geq n$ ），且同一個回合內，同一個杯子僅能翻轉一次，研究最少需要多少回合的翻轉，才能使所有的杯子開口朝下？是否可找到迅速達成目標的策略？
- 二、透過歸納猜測一般化的公式，並證明公式是否成立。
- 三、推廣研究若以連續數翻轉杯子，最少需要多少回合的翻轉才能使所有的杯子開口朝下？此外並會尋找是否有迅速達成目標的策略。

肆、研究器材：紙、筆

伍、文獻探討

- 一、第四十五屆全國科展數學科小學組第三名優勝作品「翻出一片天」
其結論二之第 3 點是：如果執行 杯數÷翻量 <即 $m \div n$ >，當商=1 時：
翻量與餘數同為奇數時，最少次數=1+3=4 次。
翻量與餘數或同為偶數或一個是奇數一個是偶數時，最少次數=1+2=3 次。
- 二、倘若原文結論成立，則當商=1 時，最少的翻轉次數不是 3 次就是 4 次，然而這結論並不正確，可以找到很多反例：

杯數	翻量	餘數	最少的翻轉次數
9	8	1	9
14	11	3	6
16	13	3	6
20	17	3	8

這顯然與該文結論不符。

- 三、文獻探討後的心得：

- 1、要有系統地進行研究，該作品的弱點之一，是較缺乏系統性，也沒有快捷翻轉杯子的策略，因此所歸納的結論並不完全。
- 2、該作品的另一弱點，是沒有證明所翻轉的次數確實是最少的，即直接從所得數據歸納出最少翻轉次數的公式，因此沒有發現部份結論有誤。
- 3、後續的研究可先從該作品有問題的杯數÷翻量，當商=1時部份開始重新探討，找出可能導致錯誤的原因。
- 4、應找出較為簡易的操作方法，無須如同該作品在每一回合計算朝上或朝下杯子數量的變化，以避免錯誤。

陸、研究過程

設杯子的個數為 m ，每次翻轉的杯數以 n 表示。本研究的過程包括以下幾個步驟：

- 一、先有系統地進行初步的嘗試，從 $m=1$ 至 $m=20$ ，而且 $n \leq m$ 的情況下，每一種組合皆進行操作，瞭解各種情況的特色，研究箇中隱藏的關係。
- 二、從實作中，尋找快捷的翻轉杯子的操作方法，這樣才能減少翻杯子的回合數。
- 三、從實作中，歸納出翻轉杯子的問題共有多少種類型，再有系統地對每一種類型進行研究。
- 四、運用所發現的快捷翻轉杯子的操作方法，找出各類型翻轉杯子問題的最少回合數。
- 五、推導出 m 個杯子每次翻轉 n 個杯最少回合數的一般化公式。
- 六、證明該公式確實是翻轉最少的回合數。
- 七、探討並提出翻杯子的延伸問題，以及設計一些生活應用題。

柒、研究結果

- 一、經實作後的整理，把翻轉杯子的問題分為甲、每回合翻量為固定數，乙、每回合翻量為連續數 兩大類型：

甲、每回合翻量為固定數，每回合翻轉 n 個杯子 ($\text{杯子數 } m \geq \text{翻量 } n$)

此類可將 m 與 n 的關係分為五種類型研究。*這 5 個類型已包含所有 m 和 n 的可能組合。*

設杯子數為 m ，每回合翻量為 n ， p 為商， q 為餘數：

- (1) $m \div n = p \cdots q$ $p=1$ ， q 為奇數且不等於 1 (參考文獻中的錯誤所在)
- (2) $m - n = 1$
- (3) $m \div n = p \cdots q$ $p=1$ ， q 為偶數
- (4) $m \div n = p \cdots q$ $p \geq 2$
- (5) $m \div n = p$ ， p 為整數

乙、每回合翻量並非固定數，而是以連續數翻轉 ($\text{杯子數 } m \geq \text{翻量 } n$)

- (1) 從翻量 $n=1$ 開始，以連續正整數數翻轉

- (2) 從翻量 $n=1$ 開始，以連續奇數翻轉
- (3) 從翻量 $n=2$ 開始，以連續偶數翻轉

以下先處理翻轉杯子的甲類問題，即 n 為定數，每回合翻轉 n 個杯子 ($m \geq n$)

二、創造快捷翻轉杯子的方法

經長期實作後，我創造了三種特殊且簡易的翻轉杯子的操作方法，分別稱為「折半法」、「對稱法」及「折半法」+「對稱法」。只要靈活運用這些快捷的策略，無需如同參考文獻中在每一回合計算朝上或朝下杯子的價量變化，即可輕鬆的翻轉成功。為了方便介紹，以下將用定義的方式來說明。

1、名詞定義 1：

(1) 符號 1 和 0：

為方便記錄，每一個杯子向上狀態以 1 表示，杯子向下狀態以 0 表示。

(2) m 、 n 和回合：杯子的個數以 m 表示，每次翻轉的杯數以 n 表示，回合是指從 m 個杯子中，每完成翻轉 n 個杯子 ($m \geq n$) 稱一個回合。在翻轉的過程中，原來開口朝上的杯子便會朝下，而朝下的杯子經翻轉後便會朝上。

(3) s ：符號 s 代表 m 個杯子被翻動的總次數。

總次數和回合數容易被誤解，我舉一個例子說明：

m (杯數)=18， n (翻量)=15

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	18	0
1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1	3	15
2	0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0	12	6
3	1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1	9	9
4	0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0	6	12
5	1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1	15	3
6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0	18

說明：回合數為 6，翻動的總次數為 $15 \times 6 = 90$

(4) r ：在杯子翻動的回合中，符號 r 代表該回合翻轉後剩下的開口朝上的杯子數。

2、名詞定義 2：「折半法」

(1) m 個開口朝上的杯子，如果每回合翻轉 n 個杯子 ($m \geq n$)，經過至少一回合 n 個杯子被翻轉後，若開口朝上的杯子剩下 r 個，且 r 為偶數，即可將這偶數個杯子折成兩半，其中一半保留暫不翻轉，而以其他的杯子補足翻轉數目。

注意：「折半法」的特點是，從確定適當的 r 值開始使用「折半法」起，只要經過兩個回合，翻轉就能成功，如下舉例說明。

(2) 例 1, $m=10, n=4$

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	10	0
1	0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 剩 6 個 “1” 下回合可使用「折半法」	6	4
2	0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 保留 3 個 “1” 不翻	4	6
3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0	10

說明：A、綠色粗體字表被翻動的杯子

B、從回合 1 結束剩 6 個偶數杯，回合 2 開始以「折半法」翻轉，使用「折半法」起再 2 個回合後翻轉成功。

(3) 「折半法」最佳偶數值的選擇：

當 m 數字較大時，在翻轉過程中，可能會有好幾次剩下 “1” 的個數為偶數的情況，如何確定從哪個偶數 r 出現後，開始使用「折半法」？

①根據「折半法」的翻轉要訣，會固定 $r/2$ 個 “1” 不動，因此可翻轉的杯子數剩下 $(m-r/2)$ 個，因此 $(m-r/2)$ 必需大於或等於一次翻轉的個數 n ，簡化式子得

$$r \leq 2(m-n)$$

②因為要固定 $r/2$ 個 “1” 不動，所以 $r/2$ 也應 $\leq n$ ，即 $r \leq 2n$ 。

③為儘快使用「折半法」翻轉並考量①、②的限制，因此 r 應取符合 $r \leq 2(m-n)$ 且 $r \leq 2n$ 兩條件的偶數中的最大值。(如例 1，第一回合結束後有 6 個開口向上的杯子，第二回合結束後有 4 個開口向上的杯子，皆符合①、②的限制，但因 $6 > 4$ ，故取 6，於第一回合後，即可開始以「折半法」翻轉。

④在至少一次的 n 個杯子被翻轉後，當杯口向上的杯子剩下 r_{\max} 個，即可開始使用「折半法」翻轉，而 r_{\max} 是符合小於或等於 $2(m-n)$ ，且不大於 $2n$ 的幾個偶數中的最大值。整個翻轉將在開始使用「折半法」起，再兩個步驟即可結束。

「折半法」最佳偶數值 r_{\max} ：

r_{\max} 是符合 $\leq 2(m-n)$ 且 $\leq 2n$ 兩條件的偶數中的最大值

(4)使用「折半法」後兩個步驟結束的證明：

設總杯數為 m ，翻量為 n ，在 y 回合翻轉結束後剩下 $2x$ 個 1(向上的杯子)，如下表：

回合	1 的數目	0 的數目	說明
y	$2x$	$m-2x$	剩下 $2x$ 個 1
$y+1$	$x+(n-x)=n$	$m-2x+x-(n-x)=m-n$	折半法保留 x 個 1 不翻轉
$y+2$	0	m	在 $y+2$ 回合後翻轉成功

3、**名詞定義 3**：「對稱法」

(1) 對稱法的翻法如下：

第一回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 1 不翻、第二回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 0 不翻

第三回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 1 不翻、第四回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 0 不翻等等。

翻法也可變化如下：

第一回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 0 不翻、第二回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 1 不翻

第三回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 0 不翻、第四回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 1 不翻等等。

雖然，「對稱法」並不確保必能將所有開口朝上的杯子全數翻轉成朝下，但在一些特殊的 m 與 n 的組合，可只用「對稱法」將開口朝上的杯子全數翻轉為止。如下所示的特例，即可用「對稱法」全數翻轉完成。

(2) 例 2， $m=4$ ， $n=3$ ， $m-n=1$

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1	4	0
1	<u>0</u> 0 0 1 留 1 個 0 不翻	1	3
2	0 <u>1</u> 1 0 留 1 個 1 不翻	2	2
3	1 1 <u>0</u> 1 留 1 個 0 不翻	3	1
4	0 0 0 0	0	4

說明：**綠色粗體字**表被翻動的杯子，**藍色下標線粗體字**表對稱法中 $\langle m-n \rangle$ 個不翻的杯子。

4、**名詞定義 4**： 「對稱法」+「折半法」

(1) 翻法如下：

第一回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 1 不翻

第二回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 0 不翻

第三回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 1 不翻

第四回合留 $\langle m-n \rangle$ 個 0 不翻、、、、直到開口朝上的杯子剩下為偶數個且可開始以「折半法」翻轉為止。如下舉例說明。

(2) 例 3， $m=14$ ， $n=11$

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	14	0
1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 留 3 個 1 不翻	3	11
2	0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 留 3 個 0 不翻	8	6
3	1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 留 3 個 1 不翻	9	5
4	0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 留 3 個 0 不翻， 剩 2 個 “1”，在這個回合後使用「折半法」。	2	12
5	1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 使用「折半法」。	11	3
6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0	14

說明：A、綠色粗體字表被翻動的杯子，藍色下標線粗體字表對稱法中 $\langle m-n \rangle$ 個不翻的杯子。

B、先使用「對稱法」翻轉， $m-n=3$ ，第一回合留 3 個 “1” 未翻轉，第二回合留 3 個 “0” 不翻轉，第三回合留 3 個 “1” 不翻轉、、、、

C、第二回合結束雖然 “1” 的個數為偶數個 $\langle 8 \text{ 個} \rangle$ ，但 $8 > 2(14-11)$ ，不符合 $r \leq 2(m-n)$ ，直到第四步結束，剩下 2 個向上的杯子，符合前述 $r \leq 2(m-n)$ 及 $r \leq 2n$ 兩條件，可開始以「折半法」翻轉，再經兩個回合後結束。

注意：一般研究 m 、 n 翻轉的問題，常是(1)先列出翻法及產生的數字差，(2)先用『最大數字差』逐次逼近目標數，(3)接近目標數時尋找適當數字差的翻法，使正數等於目標量（翻量）。但我發現以獨創的「折半法」、「對稱法」及「對稱法」+「折半法」，可以不須計算翻轉過程上下杯子的數字差，很容易地完成翻轉。

三、用獨創的快捷翻轉法解各類型的翻轉杯子問題

以下敘述如何使用「折半法」、「對稱法」及「對稱法」+「折半法」解決甲類每回合翻量為固定數的 5 個類型問題。

類型 1 $m \div n = 1 \cdots q$ q 為奇數且 $\neq 1$ ：以「對稱法」+「折半法」翻轉

1、此類型即第四十五屆科展優勝作品中的錯誤所在。因為商是 1 且餘數為奇數，所以 m

和 n 不能同為偶數，也不能同為奇數。實作顯示，當 m 為奇數，n 為偶數，無法翻轉成功(原因及證明將在文後討論部分說明)，因此，在這類型中，**m 必為偶數，n 必為奇數**。原參考文獻以實驗、推演、猜測和演算找出最少次數，在這個類型舉的例子是(p17)：

當商=1，翻量與餘數都是奇數時：

杯數 10，翻量 7 時【 $10 \div 7 = 1 \cdots 3$ ，最少次數 $4 = 1 + 3$ 】

杯數 16，翻量 9 時【 $16 \div 9 = 1 \cdots 7$ ，最少次數 $4 = 1 + 3$ 】

其他相似組合也都符合，當商=1 時，不論餘數是多少，只要翻量和餘數都是奇數，最少次數都是 4 次。

- 2、當 m=10、n=7 和 m=16、n=9 時，完成翻轉的回合數皆為 4，但當 m、n 數字變大時，上述結論就不符實際結果。
- 3、此類型當 m、n 數字越大，以數字差逐次逼近目標數的方法會使翻轉過程難度大增，但若先以「對稱法」翻轉再用「折半法」翻轉，可以很快完成！

(1)例 4，m=18，n=15

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	18	0
1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1	3	15
2	0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0	12	6
3	1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1	9	9
4	0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0	6	12
5	1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1	15	3
6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0	18

說明：A、先使用「對稱法」翻轉，第一回合留有 3 個“1”未翻轉，第二回合留 3 個“0”不翻轉，第三回合留有 3 個“1”不翻轉、、、
 B、第二回合結束雖然“1”的個數為偶數個（12 個），但 $12 > 2(18-15)$ ，還不能開始用「折半法」翻轉，直到第四回合結束，剩下 6 個向上的杯子〔 $6 \leq 2(18-15)$ 且 $\leq 2 \times 3$ 〕後，才開始用「折半法」翻轉，再經兩回合後結束。

(2)例 5，m=20，n=17

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	20	0
1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1	3	17
2	0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0	14	6
3	1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1	9	11
4	0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0	8	12
5	1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1	15	5
6	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	2	18
7	1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0	17	3
8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0	20

說明：A、先使用「對稱法」翻轉。

B、第二回合和第四回合結束雖然“1”的個數為偶數個（分別為 14 個和 8 個），但 14 和 8 均大於 $2(20-17)$ ，還不能開始用「折半法」翻轉，直到第六回合結束，剩下 2 個向上的杯子後才開始用「折半法」翻轉，再經兩回合後結束。

4、心得：

用「對稱法」+「折半法」，先以「對稱法」翻轉，依次留 $(m-n)$ 個 1、 $(m-n)$ 個 0、不翻轉，因此若能求出以「對稱法」翻轉的次數，再加上用「折半法」翻轉的兩個步驟，就是最少翻轉步驟。證明如下：

證明：可從下列兩種情況分別進行。

(1) 如果 $m \div (m-n) = a$ ，其中 a 為整數，沒有餘數

因 m 為偶數， n 為奇數，故 $(m-n)$ 為奇數，上式中的 a 必為偶數。

由 $m \div (m-n) = a$

$$\text{得 } m = (a-2)(m-n) + 2(m-n) \quad \dots\dots\dots \text{甲}$$

$$\text{及 } m = (a-3)(m-n) + 3(m-n) \quad \dots\dots\dots \text{乙}$$

$$\text{及 } m = (a-4)(m-n) + 4(m-n) \quad \dots\dots\dots \text{丙}$$

因 a 為偶數，故 $a-2$ 、 $a-3$ 及 $a-4$ 分別為偶、奇、偶數。「對稱法」的特色是，奇數回合剩餘的 1 有奇數個，偶數回合剩餘的 1 有偶數個，所以乙式中 $a-3$ 回合後，剩奇數個 1，不適用「折半法」翻轉。

丙式中 $a-4$ 回合後，餘下 $4(m-n)$ 個 1，但明顯不符合前述 r_{\max} 要符合 $\leq 2(m-n)$ 且 $\leq 2n$ 的條件，所以也不適用「折半法」翻轉。

甲式中 $(a-2)$ 、 $2(m-n)$ 均為偶數，因 $2(m-n) < 2n$ (這是因為 $m \div n = 1$ 餘 q ，故 $m = n + q$ ，且 $n > q$ 及 $m-n = q$ ，即 $2(m-n) = 2q < 2n$)，所以 $2(m-n)$ 符合前述「折半法」所要求的 $\leq 2(m-n)$ 及 $< 2n$ 的條件，故從此回合(即第 $a-2$ 回合)可開始以「折半法」翻轉，再 2 個回合後翻轉成功。

最少翻轉步驟為 $(a-2)+2 \Rightarrow$ **故最少翻轉回合數即為 a 。**

如： $m=18, n=15$ $18-15=3$

$$18 \div 3 = 6 \cdots 0$$

$$18 = (6-2) \times 3 + 6 = 4 \times 3 + 6$$

第 4 回合開始以「折半法」翻轉，再 2 個回合後翻轉成功。

$4+2=6$ 最少翻轉回合數為 6

$m=12, n=9$ $12-9=3$

$$12 \div 3 = 4 \cdots 0$$

$$12 = (4-2) \times 3 + 6 = 2 \times 3 + 6$$

第 2 回合開始以「折半法」翻轉，再 2 個回合後翻轉成功。

$2+2=4$ 最少翻轉回合數為 4

(2) 如果 $m \div (m - n) = b \cdots c$

可用類似前述的証法。

因 m 為偶數， n 為奇數，故 $(m - n)$ 為奇數，上式中的 b 、 c 奇偶性必相同。

由 $m \div (m - n) = b \cdots c$

得 $m = (b)(m - n) + c$ 甲

及 $m = (b - 1)(m - n) + (m - n + c)$ 乙

及 $m = (b - 2)(m - n) + (2m - 2n + c)$ 丙

及 $m = (b - 3)(m - n) + (3m - 3n + c)$ 丁

由前述證明中已知 $2(m - n) < 2n$ ，而 $c < (m - n)$ ，因此 $(m - n + c)$ 必定 $< 2(m - n)$ 且 $< 2n$ 。另外，上面四個方程式的餘數中，僅甲及乙式中的 c 、 $(m - n + c)$ 符合 $\leq 2(m - n)$ 且 $\leq 2n$ 的條件，

因此：

(i) 當 b 為偶數時，只有甲式剩下的偶數 c 個 1 可適用「折半法」翻轉。

最少翻轉回合數為 $\boxed{b+2}$ ，其中 b 回合來自「對稱法」翻轉，2 回合來自「折半法」翻轉，故**最少翻轉回合數為 $(b+2)$** 。

如： $\boxed{m=20, n=17}$ ， $20 - 17 = 3$

$$20 \div 3 = 6 \cdots 2$$

$$20 = 6 \times 3 + 2 = 5 \times 3 + 5 \quad 6 + 2 = 8, \text{ 最少翻轉回合數為 } 8$$

$\boxed{m=14, n=11}$ ， $14 - 11 = 3$

$$14 \div 3 = 4 \cdots 2$$

$$14 = 4 \times 3 + 2 = 3 \times 3 + 5 \quad 4 + 2 = 6, \text{ 最少翻轉回合數為 } 6$$

(ii) 當 b 為奇數時， c 亦為奇數，而 $(m - n + c)$ 為偶數，只有乙式剩下 $(m - n + c)$ 個 1 可適用「折半法」翻轉。

最少翻轉回合數為 $\boxed{(b-1)+2}$ ，其中 $b-1$ 回合來自「對稱法」翻轉，2 回合來自「折半法」，故**最少翻轉回合數為 $(b+1)$** 。

如： $\boxed{m=16, n=13}$ ， $16 - 13 = 3$

$$16 \div 3 = 5 \cdots 1$$

$$16 = 5 \times 3 + 1 = 4 \times 3 + 4 \quad (5-1) + 2 = 5 + 1 = 6, \text{ 最少翻轉回合數為 } 6$$

$\boxed{m=10, n=7}$ ， $10 - 7 = 3$

$$10 \div 3 = 3 \cdots 1$$

$$10 = 3 \times 3 + 1 = 2 \times 3 + 4 \quad (3-1) + 2 = 3 + 1 = 4, \text{ 最少翻轉回合數為 } 4$$

類型 2 $m \div n = 1 \cdots q$, $q=1$, 即 $m-n=1$: 以「對稱法」翻轉

1、例 6 , $m=6$, $n=5$

步驟	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1	6	0
1	0 0 0 0 0 <u>1</u>	1	5
2	<u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>0</u> <u>0</u>	4	2
3	0 0 0 <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u>	3	3
4	<u>1</u> <u>1</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>0</u>	2	4
5	0 <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u>	5	0
6	<u>0</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>0</u>	0	0

2、心得：當 $m-n=1$, m 個杯子各保留一次不翻轉，最少翻轉次數為 m 步

類型 3 $m \div n = 1 \cdots q$, q 為偶數 : 以「折半法」翻轉

1、例 7 , $m=6$, $n=4$

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1	6	0
1	0 0 0 0 <u>1</u> <u>1</u> <2 個 1 , 其中 1 個暫不翻轉>	2	4
2	0 <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>0</u> <u>1</u>	4	2
3	0 0 0 0 0 0	0	0

說明：在第一個回合結束後，剩下 2 個朝上的杯子，便開始使用「折半法」翻轉

2、例 8 , $m=15$, $n=7$

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	15	0
1	0 0 0 0 0 0 0 <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> 4 個 1 暫不翻轉	8	7
2	0 0 0 <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>0</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u>	7	8
3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0	0

3、心得： $m \div n = p \cdots q$, $p=1$, q 為偶數 , $m = n + q$ 在第一個回合結束後，就可以開始使用「折半法」翻轉，然後於兩回合後結束，因此，最少翻轉回合數為 $1 + 2 = 3$ 。

類型 4 $m \div n = p \cdots q$, $p \geq 2$: 以「折半法」翻轉

1、例 9 , $m=8$, $n=3$

回合	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1	8	0
1	0 0 0 1 1 1 1 1	5	3
2	0 0 0 0 0 0 <u>1</u> <u>1</u> 這個回合後使用「折半法」1 個 1 暫不翻轉	2	6
3	0 0 0 0 <u>1</u> <u>1</u> <u>0</u> <u>1</u>	3	5
4	0 0 0 0 0 0 0 0	0	8

2、例 10， $m=10$ ， $n=4$

因為 $6 \leq 2(10-4)$ 且 $\leq 2 \times 4$ ，從回合 1 結束後就可以開始使用「折半法」翻轉，最少翻轉回合數為 3！

3、例 11， $m=13$ ， $n=5$

步驟	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	13	0
1	0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1	8	5
2	0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1	5	8
3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0	0

4、心得：

由 $m \div n = p \cdots q$

得 $m = n p + q$

且 $m = n(p-1) + (n+q)$

當 $m \div n = p \cdots q$ ， $p \geq 2$ ，則 m 、 n 、 p 和 q 之間的奇偶關係如下表所示：

m	n	p	q	$p-1$	$n+q$
偶	偶	不一定	偶	不一定	偶
偶	奇	奇	奇	偶	偶
		偶	偶	奇	奇
奇	奇	奇	奇	偶	偶
		偶	偶	奇	奇

當 $(n+q)$ 為偶數時，因 $q < n$ ，故 $n+q < 2n$ 。又因 $p \geq 2$ ， $q = m - n p \leq m - 2n$ ，故 $n+q \leq m - n \leq 2(m-n)$ ，即 $n+q$ 符合 r_{\max} 的條件，所以翻轉 $(p-1)$ 回合後，就可以開始運用「折半法」，2 回合後翻轉成功。

因此最少翻轉回合數為 $(p-1)+2 = p+1$ 。

當 $(n+q)$ 為奇數時， q 必為偶數(如上表所示)，因 $q < n < 2n$ ，又因 $p \geq 2$ ， $q = m - n p \leq m - 2n \leq 2m - 2n = 2(m-n)$ ，即 q 符合 r_{\max} 的條件，所以翻轉 p 回合後，就可以開始運用「折半法」，2 回合後翻轉成功。

因此最少翻轉回合數為 $(p+2)$ 次。

類型 5 $m \div n = p$, p 為整數

1、例 12 , $m=6$, $n=2$

步驟	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0	1 1 1 1 1 1	6	0
1	0 0 1 1 1 1	4	2
2	0 0 0 0 1 1	2	4
3	0 0 0 0 0 0	0	0

2、心得：若 n 能整除 m , $m \div n = p$, 最少翻轉回合數為 p 。

表 1、 m 個開口朝上的杯子 , 每次翻轉 n 個杯子 ($m \geq n$) , 使全部杯子開口朝下最少翻轉回合數的結果整理表

$m \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6	×	7	×	8	×	9	×	10
3	1	4	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8
4		1	×	3	×	2	×	3	×	3	×	4	×	4	×	5	×	5
5			1	6	3	4	3	2	3	4	3	4	3	4	5	4	5	4
6				1	×	3	×	3	×	2	×	3	×	3	×	3	×	4
7					1	8	3	4	3	4	3	2	3	4	3	4	3	4
8						1	×	3	×	3	×	3	×	2	×	3	×	3
9							1	10	3	4	3	4	3	4	3	2	3	4
10								1	×	3	×	3	×	3	×	3	×	2
11									1	12	3	6	3	4	3	4	3	4
12										1	×	3	×	3	×	3	×	3
13											1	14	3	6	3	4	3	4
14												1	×	3	×	3	×	3
15													1	14	3	6	3	4
16														1	×	3	×	3
17															1	18	3	8
18																1	×	3
19																	1	20
20																		1

類型一(1) $m \div n = p \cdots q$ $p=1$, q 為奇數且不等於 1 (參考文獻中的錯誤所在)

類型二(2) $m-n=1$

類型三(3) $m \div n = p \cdots q$ $p=1$, q 為偶數

類型四(4) $m \div n = p \cdots q$ $p \geq 2$

類型五(5) $m \div n = p$, p 為整數

捌、討論

一、 m 個開口朝上的杯子，每次翻轉 n 個杯子 ($m \geq n$)，要使其所有的杯子開口朝下，杯子被翻動的總次數必大於或等於杯子數。

〔定理一〕：次數基本定理：杯子被翻動的總次數必大於或等於杯數，即 $s \geq m$ 。
(s 代表 m 個杯子被翻動的總次數)

理由明顯，證明從略，但舉例說明如下：

參考表 1 結果之整理

當 $m=8$ ， $n=2$ 最少翻轉回合數為 4，即每次翻兩個杯，經 4 回合可成功，每個杯子剛好被翻轉一次，8 個杯子被翻動的總次數為 8 次。($s=8$ ， $m=8$)

當 $m=8$ ， $n=3$ 最少翻轉回合數為 4，4 回合共翻轉了 $3 \times 4=12$ 個杯次才成功，有的杯子不只被翻轉 1 次，因此 8 個杯子被翻動的總次數為 12 次。($s=12$ ， $m=8$)

〔定理二〕：奇偶基本定理：奇數杯若翻轉成功，杯子被翻動的總次數必為奇數。
偶數杯若翻轉成功，杯子被翻動的總次數必為偶數。
即 $s \equiv m \pmod{2}$ (s 代表 m 個杯子被翻動的總次數)

舉例說明如下：

參考表 1 結果整理

當 $m=7$ ， $n=3$ 最少翻轉回合數為 3，即每次翻 3 個杯，經 3 回合可成功，杯子被翻動的

總次數為 $3 \times 3=9$ 次，奇數。

當 $m=8$ ， $n=3$ 最少翻轉回合數為 4，杯子被翻動的總次數為 $3 \times 4=12$ 次，偶數。

〔定理三〕 回合數基本定理：奇數杯若翻轉成功，翻動的總回合數必為奇數。
偶數杯一次翻轉奇數杯，翻動的總回合數必為偶數。

說明如下：

以 t 表回合數，由奇偶基本定理可知：

當 m 為奇數，若翻轉成功，杯子被翻動的總次數 s 必為奇數。

又因 $n \times t = s$ ，故 t 必為奇數。

當 m 為偶數，杯子被翻動的總次數 s 必為偶數。

由於定理假設的條件是 n 為奇數，又因 $n \times t = s$ ，故 t 必為偶數。

二、當杯子數 m 為奇數、若每次翻轉 n 個杯子， n 為偶數，則無法使全數杯口朝下。因為要將 m 個開口朝上的杯子經過數次翻轉後變成 m 個開口朝下的杯子，所需翻動的回合數應該是奇數，但每次翻動 n 個杯子，而 n 是偶數，所以實際上翻動的總次數應為偶數而不可能為奇數，故為矛盾。而偶數個杯子翻轉奇數個杯子，以及偶數個杯子翻轉偶數個杯子時都可以成功。

三、 m 個開口朝上的杯子，每次翻轉 n 個杯子 ($m \geq n$)，要使其所有的杯子開口朝下的必要條件是 m 為偶數，或者 m 、 n 都是奇數。

理由如下：

$$s \equiv m \pmod{2}, \text{ 因 } s = nt$$

$$\Rightarrow nt \equiv m \pmod{2}$$

(s 代表 m 個杯子被翻動的總次數， t 代表 m 個杯子翻轉成功所需的回合數)

\Rightarrow 若 m 為偶數，則 ① n 為偶數 $\Rightarrow t$ 為奇或偶數

② n 為奇數 $\Rightarrow t$ 為偶數

\Rightarrow 若 m 為奇數，則 ① n 為奇數 $\Rightarrow t$ 為奇數

② 但若 n 為偶數 \Rightarrow 矛盾 (違背 $nt \equiv m \pmod{2}$)

四、**類型 1** $m \div n = 1 \cdots q$ q 為奇數且 $\neq 1$ 最少回合數的第二種證明方法：

除了前述(p9-10)以「對稱法」+「折半法」的翻法所提出的最少翻轉回合數之證明外，亦可以**奇偶基本定理**和**回合數基本定理**來證明本研究的結果為最少翻轉回合數，這個證明更為一般化。

證明：

因 m 為偶數， n 為奇數，故 $(m - n)$ 為奇數，一次翻 n 杯 = 全翻 + 翻 $(m - n)$ 杯
例如 20 個杯子一次翻 17 個杯子等於一次翻 20 個杯子後再翻 3 ($3=20-17$) 個杯子

由**奇偶基本定理**和**回合數基本定理**知

m 為偶數， n 是奇數，要翻轉成功，杯子被翻動的總次數必為偶數，杯子翻轉成功所需的回合數 t 必為偶數

\therefore 杯子被全翻偶數次等同狀態不動

\therefore **一次翻 n 杯 \times 回合數** 後杯子狀態等同 **一次翻 $(m - n)$ 杯 \times 回合數** 後杯子狀態
由**次數基本定理**，杯子被翻動的總次數必大於等於杯數

$$(m - n) \times t (\text{回合數}) \geq m$$

$$\Rightarrow t (\text{回合數}) \geq m / (m - n)$$

若 $m / (m - n) = a$ ， a 為整數 $\Rightarrow t (\text{回合數}) \geq a$ ，所以最少翻轉回合數為 a 。

若 $m / (m - n) = b \cdots c \Rightarrow t (\text{回合數})$ 為偶數且 $\geq m / (m - n) > b$ ，

如果 b 為偶數 $\Rightarrow t \geq (b+2)$ ，故最少翻轉回合數為 $(b+2)$ 。

如果 b 為奇數 $\Rightarrow t \geq (b+1)$ ，故最少翻轉回合數為 $(b+1)$ 。

玖、延伸：

翻轉杯子的乙類問題，即以連續數翻轉

m 個杯口朝上的杯子，將分成三部分探討：

(A) 以連續數正整數 1、2、3、... 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個杯等等)使所有的杯子杯口都朝下。

(B) 以連續奇數 1、3、5、7、... 翻轉

(C) 以連續偶數 2、4、6、8、... 翻轉

(A) 以連續數正整數 1、2、3、... 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個杯等等)，使所有的杯子杯口都朝下。

一、例 1， $m=8$ ，以連續數 1、2、3、... 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個杯等等)

回合	翻量	該回合結束後杯子的狀態	1 的數目	0 的數目
0		1 1 1 1 1 1 1 1	8	0
1	1	0 1 1 1 1 1 1 1	7	1
2	2	0 0 0 1 1 1 1 1	5	3
3	3	0 0 1 0 0 1 1 1	4	4
4	4	0 0 0 0 0 0 0 0	0	8
杯子被翻動的次數		1 1 3 1 1 1 1 1		

說明：4 個回合可將 8 個杯子全翻轉為杯口朝下，翻量分別為 1、2、3、4。

8 個杯子被翻動的總次數為 10 次(1+1+3+1+1+1+1+1)

二、 m 個開口朝上的杯子，從 1 開始，以連續數翻轉，使全部杯子開口朝下最少翻轉回合數 t 的結果整理(m ：杯數 t ：最少回合數 s ：杯子被翻動的總次數)

表 2

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
t	1	X	2	3	5	3	5	4	5	4	5	7	5	7	5	7	6	7
s	1	X	3	6	15	6	15	10	15	10	15	28	15	28	15	28	21	28

m	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
t	6	7	6	7	9	7	9	7	9	7	9	8	9	8	9	8	9	8
s	21	28	21	21	45	28	45	28	45	28	45	36	45	36	45	36	45	36

m	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
t	6	7	6	7	9	7	9	10	9	7	9	8	9	8	9	8	9	11
s	21	28	21	28	45	28	45	55	45	28	45	36	45	36	45	36	45	66

m	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
t	10	11	13	11	13	11	13	11	13	11	13	11	13	12	13	12	13	12
s	55	66	91	66	91	66	91	66	91	66	91	66	91	78	91	78	91	78

m	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
t	13	12	13	12	13	12	13	15	13	15	13	15	13	15	13	15	13	15
s	91	78	91	78	91	78	91	120	91	120	91	120	91	120	91	120	91	120

三、我的觀察及發現：

1、m 個開口朝上的杯子，從 1 開始，以連續數翻轉，當全部杯子開口朝下，杯子被翻動的總次數 s 必為從 1 起連續正整數的和。

2、當 m 本身即為從 1 起連續正整數的和，翻轉成功的最少回合數 t 即為連續正整數的個數。杯子被翻動的總次數 $s = t(t+1)/2$ ，且 $s = m$ 。

例如下表 3，

m=1、3、6、10、15、21、28 等等時，m 為連續正整數的和，每個杯子正好被翻轉 1 次
 杯子被翻動的總次數(s)= 每回合的翻量總和= $t(t+1)/2$ = 杯子數

3、從 1 起的連續正整數和，呈奇奇偶偶、奇奇偶偶……的排列，因此杯子被翻動的總次數亦呈奇奇偶偶、奇奇偶偶……的排列，如下表 3 所示。

4、表 3， m 為連續正整數的和的連續翻結果觀察

m(杯數)	t(最少回合數)	翻量	杯子被翻動的總次數 $t(t+1)/2$
1	1	1	1 (奇)
3	2	1, 2	3 (奇)
6	3	1, 2, 3	6 (偶)
10	4	1, 2, 3, 4	10 (偶)
15	5	1, 2, 3, 4, 5	15 (奇)
21	6	1, 2, 3, 4, 5, 6	21 (奇)
28	7	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	28 (偶)
36	8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	36 (偶)
45	9	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	45 (奇)
55	10	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	55 (奇)
66	11	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	66 (偶)
78	12	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	78 (偶)

四、我的發現：

(1)、由〔定理 1〕「**次數基本定理**」，杯子被翻動的總次數必大於或等於杯數，即 $s \geq m$ ，例如當杯數為 4，杯子被翻動的總次數必要大於等於 4 才可能把 4 個杯子都翻轉過來。因翻量為由 1 開始的連續數，杯數為 4，杯子被翻動的總次數必定是一個大於 4 的連續正整數和，又由〔定理 2〕「**奇偶基本定理**」可知此連續正整數和亦為偶數，故 $m=4$

- 杯子被翻動的總次數同 $m=6$ ，杯子被翻動的總次數： $1+2+3=6$ ，翻轉成功回合數： 3 。
- (2)、由「**次數基本定理**」和「**奇偶基本定理**」得知 12 個杯子要翻轉成功杯子被翻動的總次數必為**偶數**，且必大於或等於 12，又由 $s=t(t+1)/2$ 得知**最接近 12 且大於 12 的連續正整數和為 15**，但 15 為奇數，與定理矛盾，第二接近的連續正整數和為 21，但 21 亦為奇數，再下一個連續正整數和為 28， $28 \equiv 12 \pmod{2}$ ， $m=12$ 與 $m=28$ 杯子被翻動的總次數 s 相等，7 個回合可翻轉成功($1+2+3+4+5+6+7$)。

五、快捷求出連續數翻轉回合數的方法

1、設杯數為 m ，連續數翻轉成功的回合數為 t

- (1)、若杯數 m 為連續正整數的和， t 則為連續正整數的個數。
- (2)、若杯數 m 非連續數的和，如下數線圖

數線 _____
 m m_1 m_2 m_3

m_1 、 m_2 、 m_3 皆為連續正整數的和，且 $m_1 < m_2 < m_3$

(i)找出大於 m 且最接近 m 的連續數正整數和 m_1 ，

若 m_1-m 為偶數，即 m_1 和 m 同奇偶性，則 $t = t_1$

(m 個杯子翻轉成功的回合數等同 m_1 個杯子翻轉成功的回合數)

(ii)若 m_1-m 為奇數，則往數線右邊尋找第二接近 m 的連續數和 m_2 ，

若 m_2-m 為偶數，則 $t = t_2$

(m 杯子翻轉成功的回合數等同 m_2 個杯子翻轉成功的回合數)

(iii)若 m_2-m 為奇數，則往數線右邊尋找第三接近 m 的連續數和 m_3 ，

此時， m_3 和 m 必同奇偶性，理由如下：

由表 2，由 1 開始的連續正整數和以(奇奇偶偶)(奇奇偶偶).....排列，因此若杯數 m 非連續數的和，則**最多往數線右端尋找到第三接近的連續正整數和 m_3** ，必與 m 同奇偶。

此時 m_3-m 為偶數，則 $t = t_3$

(m 杯子翻轉成功的回合數等同 m_3 個杯子翻轉成功的回合數)

2、 例子： 杯數為 12，以連續數正整數 1、2、3、、翻轉、

$m=12$ $m_1=15$ $m_2=21$ $m_3=28$

觀察 15-12 和 21-12 的差皆為奇數，

由於 $m_3=28$ ， $28-12=16$ 為偶數，因此 12 個杯子翻轉成功的回合數等同 28 個杯子翻轉成功的回合數，皆為 7，杯子被翻動的總次數 $7(7+1)/2=28$ 。

六、連續數翻轉回合數快捷求法的證明

1、連續數翻轉數的杯子問題中，杯子被翻動的總次數 s 與翻轉成功的回合數 t 之間，存在以下的關係：

〔定理四〕：**s-t 定理** (s ：杯子被翻動的總次數 t ：翻轉成功的回合數)
回合數被 4 除餘 1 或餘 2 時，總次數必為奇數；
回合數被 4 除餘 3 或整除時，總次數必為偶數。
註：s-t 定理僅適用連續數翻轉的杯子問題

說明如下：

因為在連續數翻轉的規則下， $s=t(t+1)/2$ ，故

當 $t \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow s = t(t+1)/2 \equiv 1 \pmod{2}$

當 $t \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow s = t(t+1)/2 \equiv 1 \pmod{2}$

當 $t \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow s = t(t+1)/2 \equiv 0 \pmod{2}$

當 $t \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow s = t(t+1)/2 \equiv 0 \pmod{2}$

2、連續數翻轉回合數快捷求法的證明：

在前面甲類固定數翻轉的討論中，已得知「次數基本定理」，由「次數基本定理」知連續翻的杯子被翻動總次數 $s = t(t+1)/2 \geq m$

$$\therefore t \geq \frac{-1 + \sqrt{8m+1}}{2},$$

將 $\frac{-1 + \sqrt{8m+1}}{2}$ 設為 k ，以便討論

若 k 為整數，則 $t = k$

若 k 為小數，則 t 必大於 k ，即 $t \geq \lceil k+1 \rceil$ ， $\lceil \ \rceil$ 為高斯符號

將杯數 m 分別為奇偶數的情況討論如下：

(1) 杯數 m 為偶數

根據甲類固定數翻轉的討論中，根據「奇偶基本定理」，知 s 必為偶數，分下列四種情況討論：

(i) $\lceil k+1 \rceil \div 4$ 餘 1

$\therefore t \geq \lceil k+1 \rceil$ 且 s 必為偶數

\therefore 根據 s-t 定理得知 t 之最小可能為 $\lceil k+1 \rceil + 2$

(ii) $\lceil k+1 \rceil \div 4$ 餘 2

$\therefore t \geq \lceil k+1 \rceil$ 且 s 必為偶數

\therefore 根據 s-t 定理得知 t 之最小可能為 $\lceil k+1 \rceil + 1$

(iii) $\lceil k+1 \rceil \div 4$ 餘 3

$\therefore t \geq \lceil k+1 \rceil$ 且 s 必為偶數

\therefore 根據 s-t 定理得知 t 之最小可能為 $\lceil k+1 \rceil$

(iv) $\lceil k+1 \rceil \div 4$ 餘 0

$\therefore t \geq \lfloor k+1 \rfloor$ 且 s 必為偶數
 \therefore 根據 $s-t$ 定理得知 t 之最小可能為 $\lfloor k+1 \rfloor$

(2) 杯數 m 為奇數

根據奇偶基本定理， s 必為奇數，分下列四種情況討論：

(i) $\lfloor k+1 \rfloor \div 4$ 餘 1

$\therefore t \geq \lfloor k+1 \rfloor$ 且 s 必為奇數
 \therefore 根據 $s-t$ 定理得知 t 之最小可能為 $\lfloor k+1 \rfloor$

(ii) $\lfloor k+1 \rfloor \div 4$ 餘 2

$\therefore t \geq \lfloor k+1 \rfloor$ 且 s 必為奇數
 \therefore 根據 $s-t$ 定理得知 t 之最小可能為 $\lfloor k+1 \rfloor$

(iii) $\lfloor k+1 \rfloor \div 4$ 餘 3

$\therefore t \geq \lfloor k+1 \rfloor$ 且 s 必為奇數
 \therefore 根據 $s-t$ 定理得知 t 之最小可能為 $\lfloor k+1 \rfloor + 2$

(iv) $\lfloor k+1 \rfloor \div 4$ 餘 0

$\therefore t \geq \lfloor k+1 \rfloor$ 且 s 必為奇數
 \therefore 根據 $s-t$ 定理得知 t 之最小可能為 $\lfloor k+1 \rfloor + 1$

七、創造連續數翻轉快捷翻法

1、**名詞定義 5**： 二分法

由上述回合數快捷求法求出杯子的翻轉總次數，將杯子翻轉總次數減去總杯數所得的差可視為某些杯子需「**多浪費掉**」一些翻轉步驟，這些步驟以一下一上的方式抵銷並不會影響到杯子原始的狀態，因此二分法的翻法是：

將杯子把杯子分二邊，一邊是需浪費翻轉步驟的杯子，一邊是僅需翻轉一次的杯子，然後從需浪費翻轉步驟的杯子開始依序翻轉，以實例說明如下：

★杯數為 4， $m=4$ ，以連續數 1、2、3 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個，第三回合翻 3 個杯)

由回合數快捷求法知最少翻轉回合數為 3，杯子翻轉總次數為 6

$6 - 4 = 2$ (杯子只有 4 個，翻轉總次數為 6，多出 2 次翻轉，必須「**浪費掉**」)

$2 \div 2 = 1$ (多出的 2 次翻轉可由 1 個杯子(①)，將該杯子多翻轉一下一上抵銷)

因此可以把杯子分二邊，一邊 1 個杯，一邊 3 個杯

①	②	③	④
1			
2	2		
3		3	3

說明：①--④表 4 個杯子，**1.**表第 1 回合翻動，**2** 表第 2 回合翻動，**3** 表第 3 回合翻動。在左例中第 1 回合翻 1 號杯，第 2 回合翻 1、2 號杯，第 3 回合翻 1、2、3 號杯

★杯數為 7，m=7，以連續數 1、2、3 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個，第三回合翻 3 個杯等等)

由回合數快捷求法知最少翻轉回合數為 5，杯子翻轉總次數為 15
 $15 - 7 = 8$ (杯子只有 7 個，翻轉總次數為 15，多出 8 次翻轉)
 $8 \div 2 = 4$ (多出的 8 次翻轉可由 4 個杯子，每個杯子多翻轉一下一上抵銷)
 因此可以把杯子分二邊，一邊 4 個杯，一邊 3 個杯

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
1	2	2	3			
3	3	4	4			
4	4	5	5	5	5	5

說明：①--⑦表 7 個杯子，第 1 回合翻 1 號杯，第 2 回合翻 2、3 號杯，第 3 回合翻 4、1、2 號杯，第 4 回合翻 3、4、1、2 號杯……

★杯數為 8，m=8，以連續數 1、2、3 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 2 個，第三回合翻 3 個杯等等)

由回合數快捷求法知最少翻轉回合數為 4，杯子翻轉總次數為 10
 $10 - 8 = 2$ (杯子只有 8 個，翻轉總次數為 10，多出 2 次翻轉)
 $2 \div 2 = 1$ (多出的 2 次翻轉可由 1 個杯子，多翻轉一下一上抵銷)
 因此可以把杯子分二邊，一邊 1 個杯，一邊 7 個杯

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
1	2	3	3	4	4	4	4
2							
3							

說明：①--⑧表 8 個杯子，第 1 回合翻 1 號杯，第 2 回合翻 1、2 號杯，第 3 回合翻 1、3、4 號杯，第 4 回合翻 5、6、7、8 號杯。

★因為有所謂「多浪費掉」的下一一上的翻轉方式再加上一一次往下翻的步驟，因此翻轉回合數為 3 以上的連續翻才適用此法。

(B) 以連續奇數 1、3、5、7……翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 3 個杯等等)，使所有的杯子杯口都朝下。

★杯數為 7，m=7，以連續數 1、3、5 翻轉(第一回合翻 1 個杯，第二回合翻 3 個，第三回合翻 5 個杯等等)

連續奇數和必為完全平方數，若杯數 m 非連續奇數和
 同連續翻回合數快捷求法原理，應尋找數線右邊最接近且同奇偶的完全平方數 9
 最少翻轉回合數為 3，杯子翻轉總次數為 $9(1+3+5)$
 $9 - 7 = 2$ (杯子只有 7 個，翻轉總次數為 9，多出 2 次翻轉)
 $2 \div 2 = 1$ (多出的 2 次翻轉可由 1 個杯子多翻轉一下一上抵銷)

把杯子分二邊，一邊 1 個杯，一邊 6 個杯

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
1						
2	2	2				
3			3	3	3	3

說明：①--⑦表 7 個杯子，1 表第 1 回合翻動 1 號，2 表第 2 回合翻動 1-3 號 3 個杯，3 表第 3 回合翻動 1、4、5、6、7 號 5 個杯

(C) 以連續偶數 2、4、6、8.....翻轉(第一回合翻 2 個杯，第二回合翻 4 個杯等等)，使所有的杯子杯口都朝下。

因翻量給定為偶數，故僅杯數為偶數時才能翻轉成功，若杯數 m 非連續偶數和，同連續翻回合數快捷求法原理，尋找數線右邊第一接近的連續偶數和即為杯子翻轉總次數，連續偶數的個數即為杯子翻轉成功的最少回合數。

★杯數為 8， $m=8$ ，以連續偶數 2、4、6...翻轉(第一回合翻 2 個杯，第二回合翻 4 個，第三回合翻 6 個杯等等)

由回合數快捷求法知最少翻轉回合數為 3，杯子翻轉總次數為 $12(2+4+6)$

$12 - 8 = 4$ (杯子只有 8 個，翻轉總次數為 12，多出 4 次翻轉)

$4 \div 2 = 2$ (多出的 4 次翻轉可由 2 個杯子，多翻轉一上一下抵銷)

把杯子分二邊，一邊 1 個杯，一邊 7 個杯

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
1	1						
2	2	2	2				
3	3			3	3	3	3

說明：①--⑧表 8 個杯子，1 表第 1 回合翻動 1、2 號兩個杯，2 表第 2 回合翻動 1-4 號 4 個杯，3 表第 3 回合翻動 1、2、5、6、7、8 號 6 個杯

拾、結論

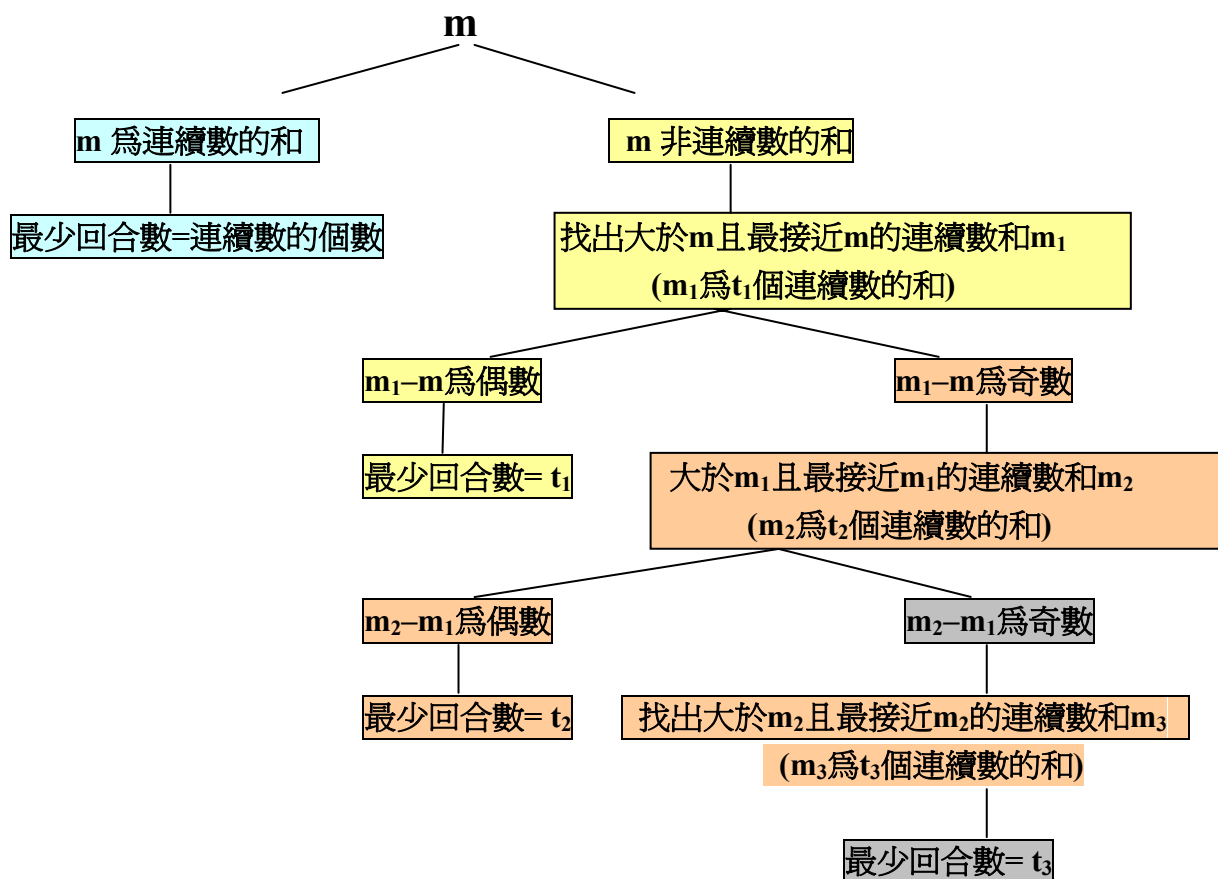
- 一、一般研究杯子的翻法，常是列出翻法及計算其交換正反杯數的數字差，然後一步一步逼近尋找適當的數字差的翻法，在本文的研究中，從實作發現以「折半法」、「對稱法」及「折半法」加「對稱法」這三個簡易的方法翻轉，可以不需在過程中反覆計算正反杯數的數字差，而輕易達到翻轉的目的，利用這三個方法，翻杯子的數學問題，老嫗能解！
- 二、文獻探討中的疑義部分，主要為本研究的**類型 1 問題**，即 $m \div n = p \cdots q$ ，而 $p=1$ 、 q 為奇數且不等於 1，翻轉較為複雜，若使用傳統數字差的算法，會使翻轉過程複雜，增加翻轉的困難度，如果以本研究中發現的「對稱法」搭配「折半法」翻轉，可以在最短的時間內翻轉成功。在〔捌、討論 4〕已證明為最少回合數。
- 三、在〔捌、討論〕已討論當杯數為奇數翻量為偶數時無法翻轉成功，除此以外的翻轉都能成功，歸納「 m 個開口朝上的杯子，每次翻轉 n 個杯子 ($m \geq n$)，使全部杯子開口朝下的最少翻轉回合數及快捷翻法」如下表所示：

類型	快捷翻法	最少翻轉回合數
類型 1 $m \div n = p \cdots q$ $p=1$ ， q 為奇數且不等於 1	「對稱法」搭配「折半法」	$m \div (m-n) = a$ ， a 為整數， a 回合 $m \div (m-n) = b \cdots c$ b 為偶數， $(b+2)$ 回合 b 為奇數， $(b+1)$ 回合
類型 2 $m-n=1$	「對稱法」	m 回合
類型 3 $m \div n = p \cdots q$ $p=1$ ， q 為偶數	「折半法」	3 回合
類型 4 $m \div n = p \cdots q$ $p \geq 2$	「折半法」	$(n+q)$ 為偶數， $(p+1)$ 回合 $(n+q)$ 為奇數， $(p+2)$ 回合
類型 5 $m \div n = p$ ， p 為整數	每次翻 n 個	p 回合

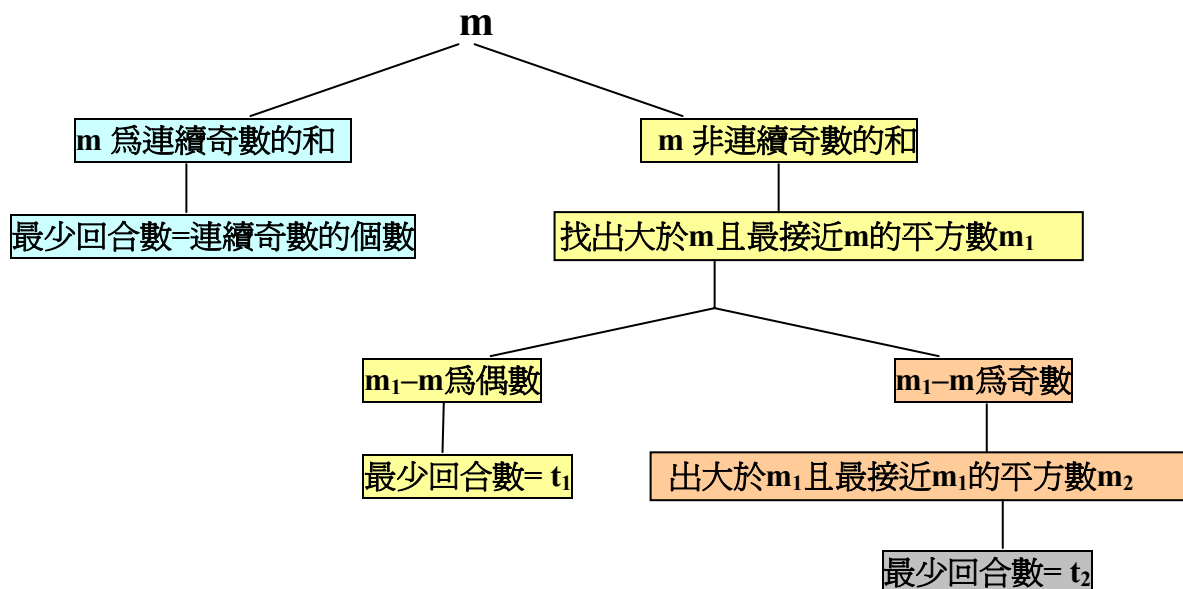
- 四、在〔玖、延伸〕以**連續數翻轉**的部分，無論是(A)以連續數正整數 1、2、3、... 翻轉，或者是(B)以連續奇數 1、3、5、7、... 翻轉，又或者是(C)以連續偶數 2、4、6、8、... 翻轉，針對這個延伸的部分，本研究也找出最少翻轉回合數的快捷求法，並創造不需在每回合計算正反杯差的簡易翻法「二分法」，以求迅速翻轉成功。

五、連續數翻轉回合數快捷求法流程圖：

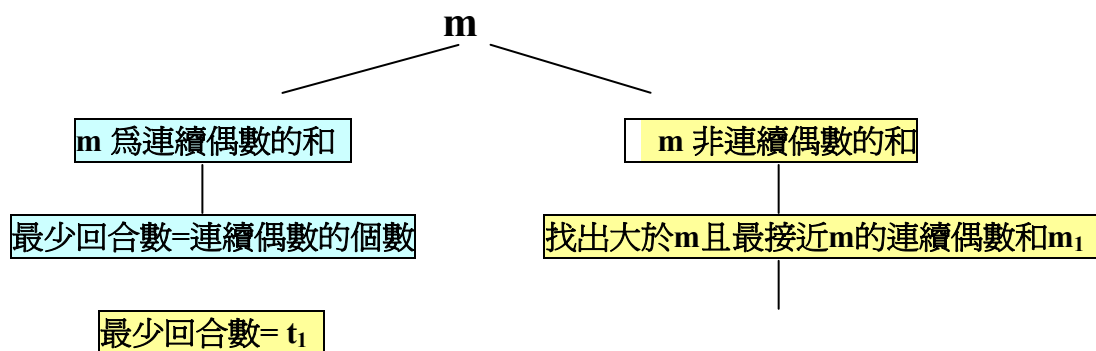
- (A) m 個開口朝上的杯子，從 1 開始的連續正整數翻轉，使全部杯子開口朝下最少翻轉回合數 (m_1 、 m_2 、 m_3 皆為連續正整數的和，且 $m_1 < m_2 < m_3$)



(B)以連續奇數 1、3、5、7.....翻轉(m_1 為 t_1 個連續奇數的和， m_2 為 t_2 個連續奇數的和))



(C) 以連續偶數 2、4、6、8.....翻轉，(翻轉僅在杯子數為偶數的情況下才能翻轉成功)
(m_1 為 t_1 個連續偶數的和)



拾壹、應用

在參加市中運啦啦隊的舉牌表演後，我發現可以把翻杯子的數學概念應用在生活中，例如以下的趣題：

題目、今有一支總計 17 人的表演旗隊，每人左手執白旗，右手執黑旗。開始時全體只舉起白旗，表演的方式是每 30 秒都必需有 7 人轉換舉起旗的顏色，其餘的隊員不用轉旗色，問最快要多久可以讓所用人同時舉起黑旗？

答：17÷7 = 2...3 ，7+3 為偶數

2 + 1 = 3 (要換手 3 次)

每次要用半分鐘，3 次共 1 分鐘 30 秒。

答：共 1 分鐘 30 秒。

本研究甲類固定翻杯生活應用題

類型 4 $m \div n = p \cdots q$, $p > 2$

(n + q) 為偶數，要 (p + 1) 回合

題目、一隊 30 人的啦啦隊，每人手執正反分別為紅色和藍色的牌子，出場時只舉起紅色牌向前，表演過程是每 5 秒必須有人改變所舉牌的顏色，而且規定第一次(開演 5 秒後)須有 1 人改變牌的顏色，第二次(開演 10 秒後)須有 2 人改變牌的顏色，依此連續數法則類推……，結束時全體要舉起藍色牌，請問這次表演至少需時多久？

答：最接近 30 的連續正整數和為 36

36 與 30 同奇偶

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36

36 為 8 個連續正整數的和，回合數為 8

故 $8 \times 5 = 40$ 答：40 秒。

本研究乙類連續數翻轉杯子的生活應用題

拾貳、參考資料

- 一、翰林版七年級上學期國中數學 第二章 數與數線
- 二、翰林版七年級上學期國中數學 第三章 數量的規律
- 三、翰林版九年級下學期國中數學 第三章 生活應用
- 四、國立台灣科學教育館 <http://www.ntsec.gov.tw/> 第四十五屆全國科展

