

漩渦鳴人－n 次方和黑洞探討

摘要

本研究主要是研究將任意一個數字的每個位數數字分別求一次方和、二次方和、三次方和、……，觀察其是否具有特殊的性質。我們得出以下的結論：

- 一、任意一個數字經過數次求一次方和（即數字和）的動作後，一定會得到「1」、「2」、「3」、…、「9」等 9 個數的其中一個數。
- 二、任意一個數字經過數次求二次方和的動作後，一定會得到「1」或者落到「16→37→58→89→145→42→20→4→16」的循環中。
- 三、任意一個數字經過數次求三次方和的動作後，一定會得到「1」、「153」、「370」、「371」、「407」或落到「136→244→136」、「1459→991→1459」、「217→352→160→217」、「133→55→250→133」的循環中。
- 四、四次方和至十二次方和的上界
 - 1.任意數字經過數次求四次方和的上界為 22605。
 - 2.任意數字經過數次求五次方和的上界為 295246。
 - 3.任意數字經過數次求六次方和的上界為 3188710。
 - 4.任意數字經過數次求七次方和的上界為 33480911。
 - 5.任意數字經過數次求八次方和的上界為 344374024。
 - 6.任意數字經過數次求九次方和的上界為 3486784913。
 - 7.任意數字經過數次求十次方和的上界為 34867845034。
 - 8.任意數字經過數次求十一次方和的上界為 345191657747。
 - 9.任意數字經過數次求十二次方和的上界為 3389154441868。
- 五、m 次方和的上界：任意數字的 m 次方和的上界為 $m \times 9^m + b^m$ ，其中 b 為介於 1 至 9 的整數

壹、研究動機

有一天我和同學很無聊，就把 16 的兩個位數數字分別二次方後相加，得到 37，重複求二次方和的動作，接著依序得 37、58、89、145、42、20、4、16。我們發現最後又回到 16，亦即將一個數求位數數字二次方和，好像會形成一個循環，對於這個現象我們覺得很神奇，於是我們去請教老師，老師鼓勵我們可以試著研究其中的規律。

貳、研究目標

- 一、重複「將一個數字每個位數數字一次方之後相加」的動作，最後會有什麼結果？
- 二、重複「將一個數字每個位數數字二次方之後相加」的動作，最後會有什麼結果？
- 三、重複「將一個數字每個位數數字三次方之後相加」的動作，最後會有什麼結果？
- 四、重複「將一個數字每個位數數字 m 次方之後相加」的動作，最後所得的結果的上界為何？

參、研究過程

- 一、重複「將一個數字每個位數數字一次方之後相加」的動作的探討

定義 1

$\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ 為表示一個有 n 位數的數字，其中， a_n 為個位數數字、 a_{n-1} 為十位數數字、依此類推，其中， a_1 為 1~9 的整數， a_2, \dots, a_n 為 0~9 的整數。

引理 1

若 $\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ 與 $\underline{b_1 b_2 \dots b_n}$ 的組成數字相同，但組成順序不一樣，將此兩個數字的每個位數數字 m 次方之後相加，則和會相等。

證明：

$$\text{設 } S_a = a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m, \quad S_b = b_1^m + b_2^m + \dots + b_n^m$$

因為 $\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ 與 $\underline{b_1 b_2 \dots b_n}$ 的組成數字相同

$$\text{所以 } S_a = S_b$$

亦即， $\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ 與 $\underline{b_1 b_2 \dots b_n}$ 的每個位數數字 m 次方之後相加，和會相等。 ■

引理 2

若 $\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ 為一任意正整數，則

$$a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \times 10 + a_n \times 1 \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \pmod{9}。$$

證明：

設任意一個數字為 $\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ ，則 $\underline{a_1 a_2 \dots a_n} = a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \times 10 + a_n \times 1$

因為 1、10、 10^2 、 \dots 、 10^{n-1} 除以 9 之後，所得的餘數均為 1。

根據同餘的性質，可得

$$a_1 \times 10^{n-1} \equiv a_1 \pmod{9}$$

$$a_2 \times 10^{n-2} \equiv a_2 \pmod{9}$$

...

$$a_{n-1} \times 10 \equiv a_{n-1} \pmod{9}$$

$$a_n \times 1 \equiv a_n \pmod{9}$$

則 $a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \times 10 + a_n \times 1 \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \pmod{9}$ ■

定理 1

任意一個數字經過數次求一次方和（即數字和）的動作後，一定會得到「1」、「2」、「3」、「 \dots 」、「9」等 9 個數的其中一個數。

證明：

設任意一個數字為 $\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ ，根據引理 2 可得

$$a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \times 10 + a_n \times 1 \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \pmod{9}$$

若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ 不為「1」、「2」、「3」、「 \dots 」、「9」等 9 個數的其中一個數，則重複引理 2 相同的步驟，直到所得的結果為「1」、「2」、「3」、「 \dots 」、「9」等 9 個數的其中一個數。

因此，任意一個數字經過數次求一次方和（即數字和）的動作後，一定會得到「1」、「2」、「3」、「 \dots 」、「9」等 9 個數的其中一個數。 ■

二、重複「將一個數字每個位數數字二次方之後相加」的動作的探討

我們先求出 1~100 的位數二次方和會有什麼結果，利用引理 1 的結果，我們發現不需要求 1~100 中的每一個數，只要求表 1 中的 54 個的數即可。

表 1

2 個位數數字不一樣的情況：（「1」要視為是十位數是 0，個位數是 1。）共有 45 個。

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 47, 48, 49, 56, 57, 58, 59, 67, 68, 69, 78, 79, 89

2 個位數數字都一樣的情況：共有 9 個。

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99

我們先各別將以上 54 個數的每個位數數字二次方和求出它的結果，例如：

2 的結果如下：

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow \dots \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$$

7 的結果如下：

$$7 \rightarrow 49 \rightarrow 97 \rightarrow 130 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

將每一個數都做出來後，我們再將它們連接起來，發現以下的結果，如圖 1-1 和圖 1-2。
數字有圓圈的部份，即是表 1 的 54 個數字。

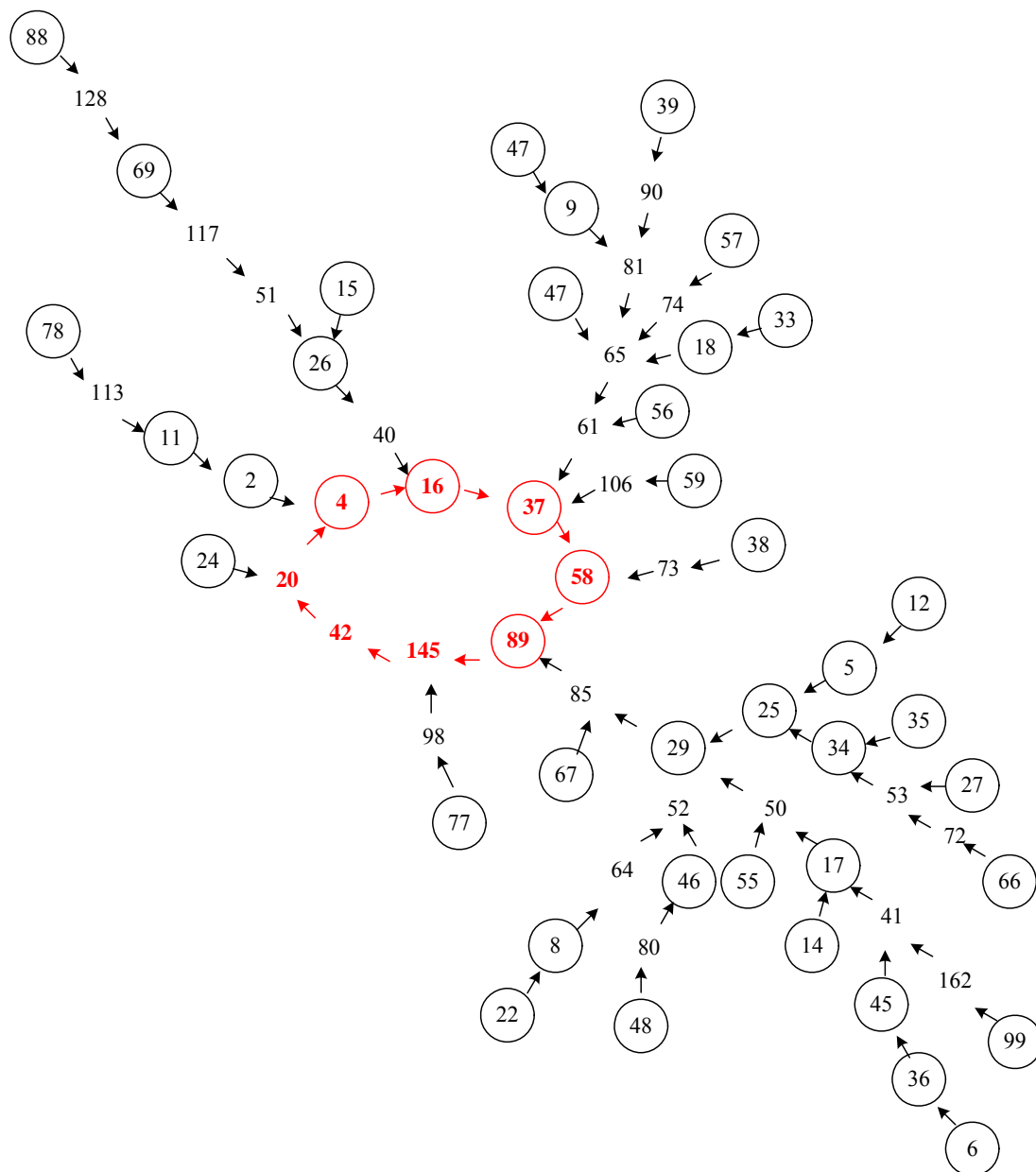


圖 1-1

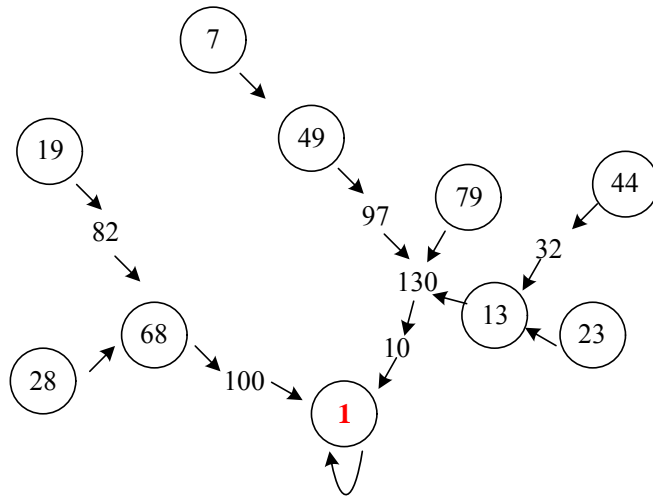


圖 1-2

圖 1-1 會形成一個像漩渦的圖形，漩渦的中心是由 16、37、58、89、145、42、20、4 構成，如圖 2 所示。圖 1-2 中所有的數最後都會歸結到 1。

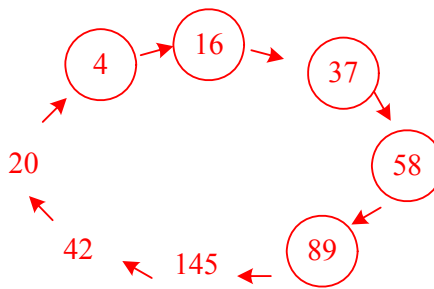


圖 2

接著我們想到，圖 1-1 和圖 1-2 我們要把它擴展到多大的數才行？
我們先觀察 3 位數的部份。

設 $\underline{a_1 a_2 a_3}$ 為一個任意的 3 位數

1. $\underline{a_1 a_2 a_3}$ 的每個位數數字的二次方和要最大，是當 $\underline{a_1 a_2 a_3} = 999$ 時，即

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 9^2 + 9^2 + 9^2 = 243$$

亦即，所有 3 位數的每個位數數字二次方和都不大於 243。

2. 所有不大於 243 的數中，每個位數數字二次方和要最大，是當 $\underline{a_1 a_2 a_3} = 199$ 時，即

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1^2 + 9^2 + 9^2 = 163$$

亦即，所有不大於 243 的數，其每個位數數字二次方和都不大於 163。

3.所有不大於 163 的數中，每個位數數字二次方和要最大，是當 $\underline{a_1 a_2 a_3} = 99$ ，即：

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0^2 + 9^2 + 9^2 = 162。$$

亦即，所有不大於 163 的數，其每個位數數字二次方和都不大於 162。

因此，我們就試著求出 100~162 每個位數數字二次方和的結果，發現除 159 外，其餘的數只要求一次每個位數數字二次方和便會小於 100，而 159 也只要求 2 次，就會小於 100 (159→107→50)。

對於任意位數的數字，我們得到以下結果：

引理 3

任何位數的數字經過數次求二次方和的動作後，都會落到 1~99 之間。

證明：

1.由前面的討論可知一個 3 位數的數字，經過數次求二次方和的動作後，一定都會落到 1~99 之間。

2. $\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ 的每個位數數字的二次方和要最大，是當 $\underline{a_1 a_2 \dots a_n} = 99 \dots 9$ 時，即

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 9^2 + 9^2 + \dots + 9^2 = 81n$$

亦即，所有的 n 位數的每個位數數字二次方和都不大於 81n。

因此，若 n 不大於 12，則 $81n < 1000$ ，亦即 81n 會是一個 3 位數或 2 位數。

也就是說，對於 2 位數至 12 位數，求二次方和數次後，一定會落到 1~99 之間。

3.若 $n < 12345679012$ ，則 $81n < 1000000000000$ ，亦即 81n 會是一個小於 1000000000000 的數字，也就是最大為 12 位數的數字。

因此，對於 13 位數至 12345679012 位數的數字而言，求二次方和一次後，一定會落到 12 位數以下，再根據第 1 點，最後必落到 1~99 之間。

4.重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求二次方和的動作後，都會落到 1~99 之間。」 ■

定理 2

任意一個數字經過數次求二次方和的動作後，一定會得到「1」或者落到「16→37→58→89→145→42→20→4→16」的循環中。

證明：

根據引理 1 和引理 2，以及圖 1-1 和圖 1-2 的結果，這是很明顯的結論。 ■

二、重複「將一個數字每個位數數字三次方之後相加」的動作的探討

有了求二次方和的經驗後，在探討位數數字三次方和的時候，我們先猜測所有的數字經過數字求三次方和的動作後，一定會落至 1~999 之間，所以先討論以下的內容：

設 $a_1a_2a_3a_4$ 為一個任意的 4 位數

1. $a_1a_2a_3a_4$ 的每個位數數字的三次方和要最大，是當 $a_1a_2a_3a_4=9999$ 時，即

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = 9^3 + 9^3 + 9^3 + 9^3 = 2916$$

亦即，所有 4 位數的每個位數數字三次方和都不大於 2916。

2. 所有不大於 2916 的數中，每個位數數字三次方和要最大，是當 $a_1a_2a_3a_4=1999$ 時，即

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = 1^3 + 9^3 + 9^3 + 9^3 = 2188$$

亦即，所有不大於 2916 的數，其每個位數數字三次方和都不大於 2188。

3. 所有不大於 2188 的數中，每個位數數字三次方和要最大，是當 $a_1a_2a_3a_4=1999$ 時，即

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = 1^3 + 9^3 + 9^3 + 9^3 = 2188。$$

因此，我們就試著求出 1000~2188 中，每個位數數字三次方和的結果，發現除了表 2 這些數之外，其餘的數只要求一次每個位數數字三次方和便會小於 1000。

表 2

1079, 1088, 1089, 1099, 1179, 1188, 1189, 1199, 1279, 1288, 1289, 1299, 1379, 1388, 1389, 1399, 1479, 1488, 1489, 1499, 1579, 1588, 1589, 1599, 1669, 1679, 1688, 1689, 1699, 1777, 1778, 1779, 1788, 1789, 1799, 1879, 1889, 1899, 1999, 2079, 2088, 2089, 2099, 2179, 2188
--

我們將表 2 的數都求出它們每個位數數字三次方和的結果，如下表 3：

表 3

1079→1073→371	1399→1468→793	1777→1030→28
1088→1025→134	1479→1137→372	1778→1199→1460→281
1089→1242→81	1488→1089→1242→81	1779→1416→282
1099→1459→919	1489→1306→244	1788→1368→756
1179→1074→408	1499→1523→161	1789→1585→763
1188→1026→225	1579→1198→1243→100	1799→1802→521
1189→1243→100	1588→1150→127	1889→1754→533
1199→1460→281	1589→1367→587	1899→1971→1074→408
1279→1081→514	1599→1584→702	1999→2188→1033→55
1288→1033→55	1669→1162→226	2079→1080→513
1289→1250→135	1678→1072→352	2088→1032→36
1299→1467→624	1679→1289→1250→134	2089→1249→802
1379→1100→2	1688→1241→74	2099→1466→497
1388→1052→134	1689→1458→702	2179→1081→514
1389→1269→954	1699→1675→685	2188→1033→55

從表 3 可知，表 2 的所有數只要經過數次求三次方和的動作後，一定都會出現小於 1000 的數。也就是說，任意一個 4 位數，只要經過數次求三次方和的動作後，一定都會出現小於 1000 的數。

因此，我們可以獲得引理 3 的結論。

引理 4

任何位數的數字經過數次求三次方和的動作後，都會落到 1~999 之間。

證明：

1. 由前面的討論可知一個 4 位數的數字，經過數次求三次方和的動作後，一定都會落到 1~999 之間。

2. $a_1a_2\dots a_n$ 的每個位數數字的三次方和要最大，是當 $a_1a_2\dots a_n=99\dots 9$ 時，即

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = 9^3 + 9^3 + \dots + 9^3 = 729n$$

亦即，所有的 n 位數的每個位數數字三次方和都不大於 729n。

因此，若 n 不大於 13，則 $729n < 10000$ ，亦即 729n 會是一個 4 位數以下的數。

也就是說，對於 5 位數至 13 位數，求三次方和數次後，一定會落到 1~999 之間。

3. 若 $n < 13717421124$ ，則 $729n < 10000000000000$ ，亦即 729n 會是一個小於 10000000000000 的數字，也就是最大為 13 位數的數字。

因此，對於 14 位數至 13717421124 位數的數字而言，求三次方和一次後，一定會落到 13 位數以下，再根據第 1 點和第 2 點，最後必落到 1~999 之間。

4. 重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求三次方和的動作後，都會落到 1~999 之間。」 ■

定理 3

任意一個數字經過數次求三次方和的動作後，一定會得到「1」、「153」、「370」、「371」、「407」或落到「136→244→136」、「1459→991→1459」、「217→352→160→217」、「133→55→250→133」的循環中。

證明：

1. 利用引理 1 和引理 3 的結果，在 1~999 中，找出所有要求三次方和的代表數，如表 4 的數，它們的三次方和結果，再把它們連接起來即可。

表 4

3 個位數數字不一樣的情況：（「12」要視為是百位數是 0，十位數是 1，個位數是 2）共有 120 個。

12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 47, 48, 49, 56, 57, 58, 59, 67, 68, 69, 78, 79, 89, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 145, 146, 147, 148, 149, 156, 157, 158, 159, 167, 168, 169, 178, 179, 189, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 245, 246, 247, 248, 249, 256, 257, 258, 259, 267, 268, 269, 278, 279, 289, 345, 346, 347, 348, 349, 356, 357, 358, 359, 367, 368, 369, 378, 379, 389, 456, 457, 458, 459, 467, 468, 469, 478, 479, 489, 567, 568, 569, 578, 579, 589, 678, 679, 689, 789

2 個位數數字一樣，另一個不一樣的情況：（「11」要視為是百位數和十位數都是 0，個位數是 1；「11」要視為是百位數是 0，十位數和個位數都是 1）共有 90 個。

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 122, 133, 144, 155, 166, 177, 188, 199, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 233, 244, 255, 266, 277, 288, 299, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 344, 355, 366, 377, 388, 399, 445, 446, 447, 448, 449, 455, 466, 477, 488, 499, 556, 557, 558, 559, 566, 577, 588, 599, 667, 668, 669, 677, 688, 699, 778, 779, 788, 799, 889, 899

3 個位數數字都一樣的情況：共有 9 個。

111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999

2. 我們先各別將以上 219 個數的每個位數數字三次方和求出它們的結果，例如：

59 的結果如下：

$$59 \rightarrow 846 \rightarrow 792 \rightarrow 1080 \rightarrow 513 \rightarrow 153 \rightarrow 108 \rightarrow 513 \rightarrow 153 \rightarrow 108 \rightarrow \dots$$

66 的結果如下：

$$66 \rightarrow 432 \rightarrow 99 \rightarrow 1442 \rightarrow 137 \rightarrow 371 \rightarrow 371 \rightarrow 108 \rightarrow 513 \rightarrow 153 \rightarrow 108 \rightarrow \dots$$

3. 接著，再將它們連接起來，發現以下的結果，如圖 3-1 至圖 3-9。數字有圓圈的部分，即是表 4 的 218 個數字。



圖 3-1

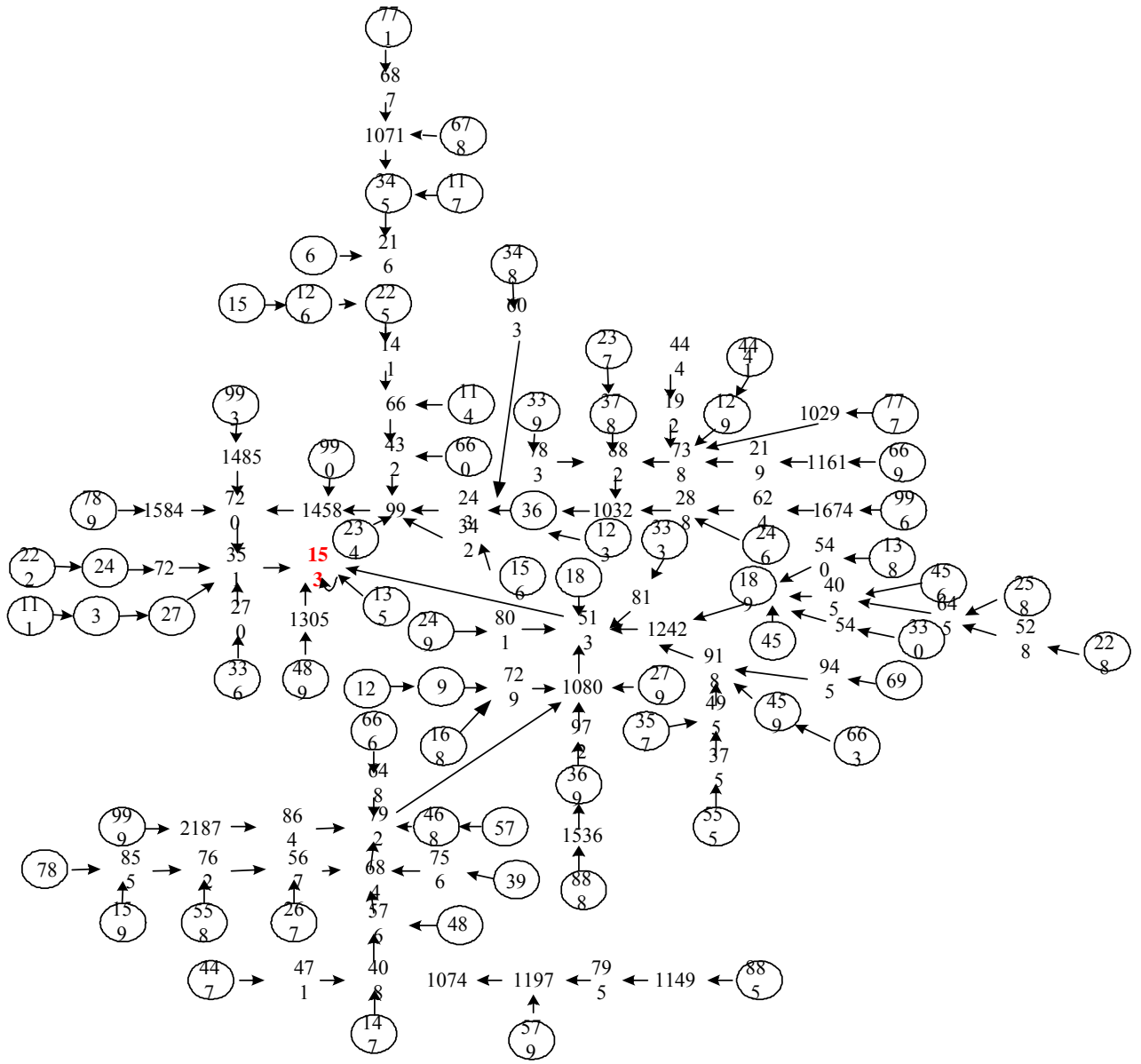


圖 3-2

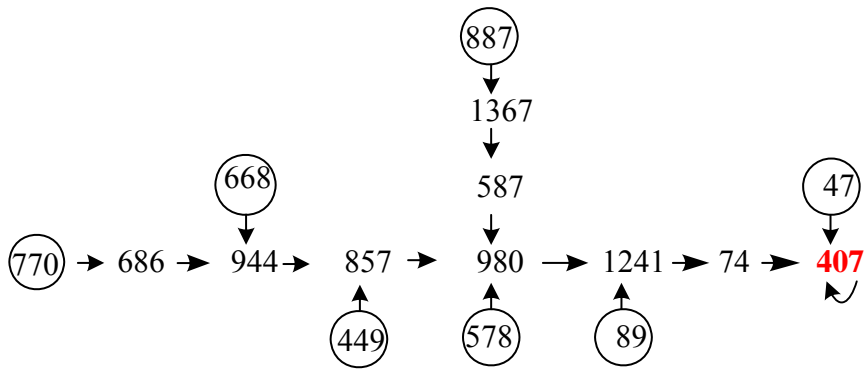


圖 3-3

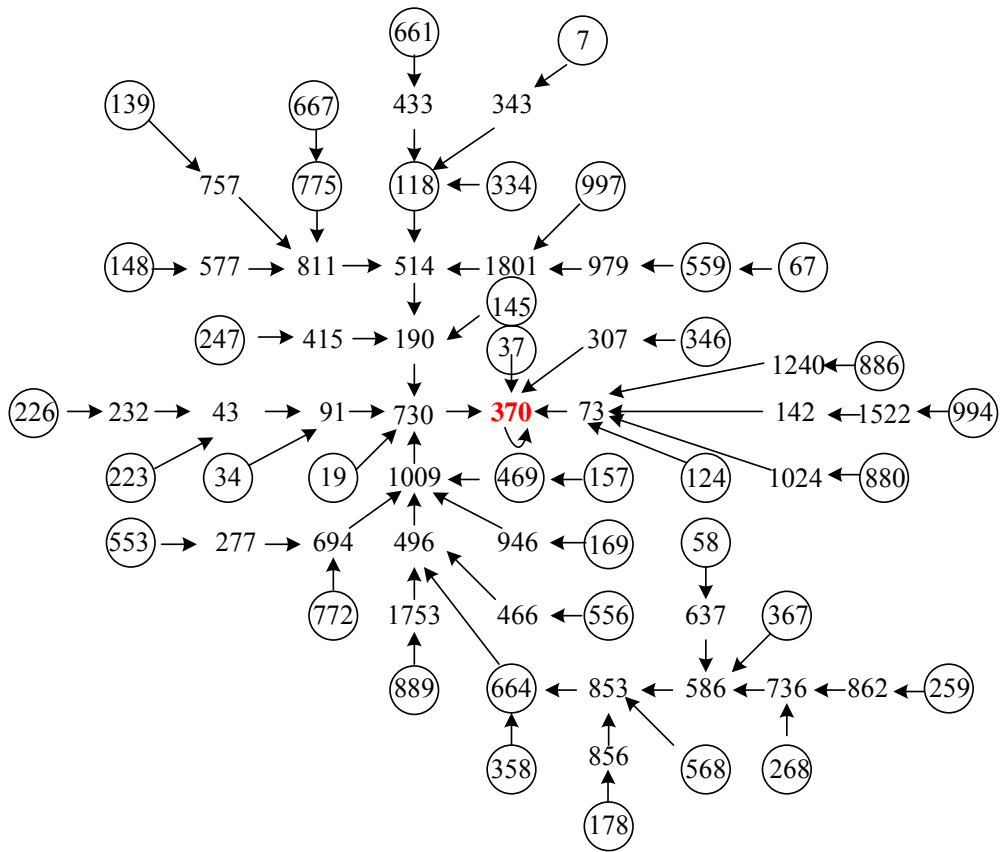


圖 3-4

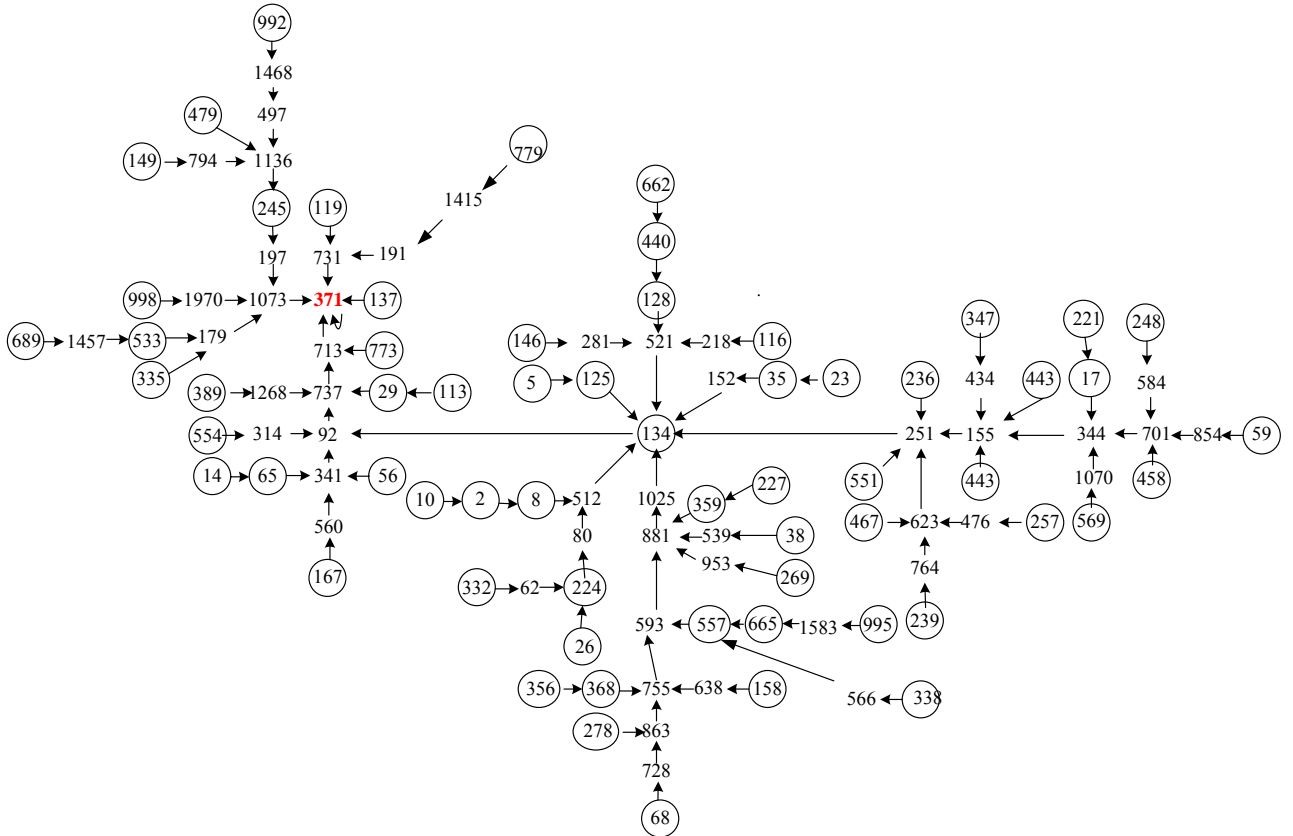


圖 3-5



圖 3-6

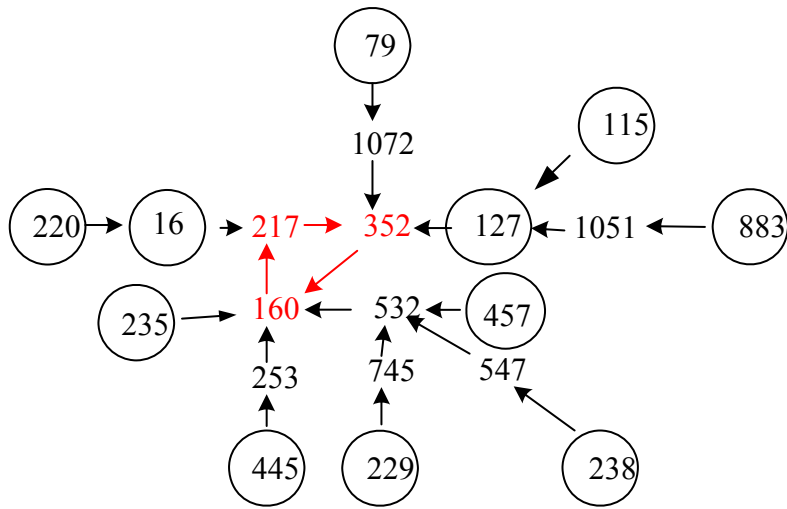


圖 3-7

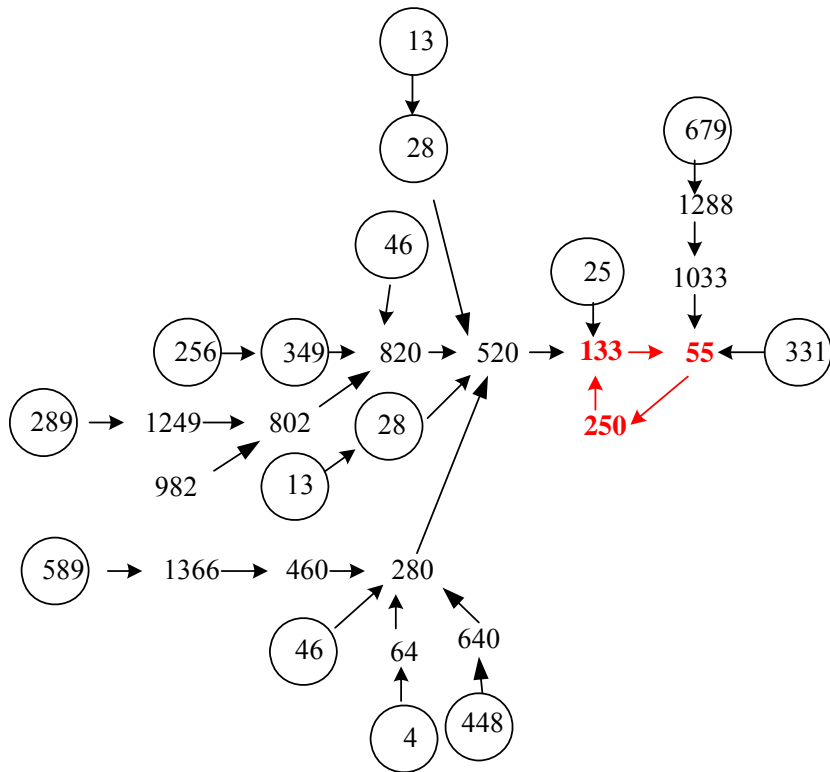


圖 3-8

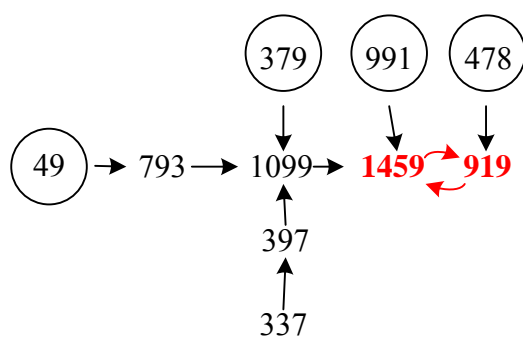


圖 3-9

四、重複「將一個數字每個位數數字 m 次方之後相加」的上界探討

1. 四次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 $n=1$ 至 7 時，四次方和的最大值及其位數。如下表 5：

表 5

n	1	2	3	4	5	6	7
四次方和的 最大值(註)	5651	11302	16953	22604	28255	33906	39557
最大值的位數	4	5	5	5	5	5	5

註： n 位數要產生四次方和的最大值，必定是當每個位數數字均為 9 時。

由表 5 可觀察出，當數字的位數大於 5 時，其四次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求四次方和的上界為何？

定理 4

任意數字經過數次求四次方和的上界為 22605。

證明：

(1) 設 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 為一個任意的 5 位數

a. $a_1a_2a_3a_4a_5$ 的每個位數數字四次方和要最大，是當 $a_1a_2a_3a_4a_5=99999$ 時，即

$$a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 + a_5^4 = 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 = 28255$$

亦即，所有 5 位數的每個位數數字四次方和都不大於 28255。

b. 所有不大於 28255 的數中，每個位數數字四次方和要最大，是當 $a_1a_2a_3a_4a_5=19999$

$$\text{時，即 } a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 + a_5^4 = 1^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 = 22605$$

亦即，所有不大於 28255 的數，其每個位數數字四次方和都不大於 22605。

c. 所有 5 位數經過數次求四次方和的動作後，一定都會小於 22605。

- (2) $a_1a_2\dots a_n$ 的每個位數數字四次方和要最大，是當 $a_1a_2\dots a_n=99\dots 9$ 時，亦即，所有的 n 位數的每個位數數字四次方和都不大於 $5651n$ 。
 因此，若 n 不大於 17，則 $5651n < 100000$ ，亦即 $5651n$ 會是一個 5 位數以下的數。
 也就是說，對於 6 位數至 17 位數，求四次方和數次後，一定會小於 22605。
- (3) 重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求四次方和的動作後，都會小於 22605。」亦即，任意數字經過數次求四次方和的上界為 22605。 ■

2.五次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 $n=1$ 至 8 時，五次方和的最大值及其位數。如下表 6：

表 6

n	1	2	3	4	5	6	7	8
五次方和的最大值	59049	118098	177147	236196	295245	354294	413343	472392
最大值的位數	5	6	6	6	6	6	6	6

由表 6 可觀察出，當數字的位數大於 6 時，其五次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求五次方和的上界為何？

定理 5

任意數字經過數次求五次方和的上界為 295246。

證明：

- (1) 設 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 為一個任意的 6 位數

- a. $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 的每個位數數字五次方和要最大，是當 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6=999999$ 時，即

$$a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 + a_5^5 + a_6^5 = 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 = 354294$$

亦即，所有 6 位數的每個位數數字五次方和都不大於 354294。

- b. 所有不大於 354294 的數中，每個位數數字五次方和要最大，是當

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6=299999 \text{ 時，即}$$

$$a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 + a_5^5 + a_6^5 = 2^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 = 295277$$

亦即，所有不大於 354294 的數，其每個位數數字五次方和都不大於 295277。

- c. 所有不大於 295277 的數中，每個位數數字五次方和要最大，是當

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6=199999 \text{ 時，即}$$

$$a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 + a_5^5 + a_6^5 = 1^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 + 9^5 = 295246$$

亦即，所有不大於 295277 的數，其每個位數數字五次方和都不大於 295246。

d. 所有 6 位數經過數次求五次方和的動作後，一定都會小於 295246。

(2) $a_1a_2\dots a_n$ 的每個位數數字五次方和要最大，是當 $a_1a_2\dots a_n = 99\dots 9$ 時，亦即，所有的

n 位數的每個位數數字五次方和都不大於 $59049n$ 。

因此，若 n 不大於 16，則 $59049n < 1000000$ ，亦即 $59049n$ 會是一個 6 位數以下的數。

也就是說，對於 7 位數至 16 位數，求五次方和數次後，一定會小於 295246。

(3) 重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求五次方和的動作後，都會小於 295246。」亦即，任意數字經過數次求五次方和的上界為 295246。 ■

3. 六次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 $n=1$ 至 9 時，六次方和的最大值及其位數。如下表 7：

表 7

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
六次方和的最大值	531441	1062882	1594323	2125764	2657205	3188646	3720087	4251528	4782969
最大值的位數	6	7	7	7	7	7	7	7	7

由表 1 可觀察出，當數字的位數大於 7 時，其六次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求六次方和的上界為何？

定理 6

任意數字經過數次求六次方和的上界為 3188710。

證明：

(1) 設 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ 為一個任意的 7 位數

a. $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ 的每個位數數字六次方和要最大，是當 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 = 9999999$

時，即 $a_1^6 + a_2^6 + a_3^6 + a_4^6 + a_5^6 + a_6^6 + a_7^6 = 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 = 3720087$

亦即，所有 7 位數的每個位數數字六次方和都不大於 3720087。

b. 所有不大於 3720087 的數中，每個位數數字六次方和要最大，是當

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 = 2999999$ 時，即

$$a_1^6 + a_2^6 + a_3^6 + a_4^6 + a_5^6 + a_6^6 + a_7^6 = 2^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 = 3188710$$

亦即，所有不大於 3720087 的數，其每個位數數字六次方和都不大於 3188710。

c.所有不大於 3187710 的數中，每個位數數字六次方和要最大，是當

$$\underline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} = 2999999 \text{ 時，即}$$

$$a_1^6 + a_2^6 + a_3^6 + a_4^6 + a_5^6 + a_6^6 + a_7^6 = 2^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 = 3188710$$

亦即，所有不大於 3187710 的數，其每個位數數字六次方和都不大於 3187710。

d.所有 7 位數經過數次求六次方和的動作後，一定都會小於 3187710。

(2) $\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ 的每個位數數字的六次方和要最大，是當 $\underline{a_1 a_2 \dots a_n} = 99 \dots 9$ 時，亦即，所有的

n 位數的每個位數數字六次方和都不大於 $531441n$ 。

因此，若 n 不大於 18，則 $531441n < 10000000$ ，亦即 $59049n$ 會是一個 6 位數以下的數。

也就是說，對於 8 位數至 18 位數，求六次方和數次後，一定會小於 3187710。

(3) 重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求六次方和的動作後，都會小於 3187710。」亦即，任意數字經過數次求六次方和的上界為 3187710。 ■

4.七次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 $n=1$ 至 10 時，七次方和的最大值及其位數。如下表 8：

表 8

n	1	2	3	4	5	6
七次方和的最大值	4782969	9565938	14348907	19131876	23914845	28697814
最大值的位數	7	7	8	8	8	8
n	7	8	9	10		
七次方和的最大值	33480783	38263752	43046721	47829690		
最大值的位數	8	8	8	8		

由表 8 可觀察出，當數字的位數大於 8 時，其七次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求七次方和的上界為何？

定理 7

任意數字經過數次求七次方和的上界為 33480911。

證明：

1. 設 $\underline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$ 為一個任意的 8 位數

(1) $\underline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$ 的每個位數數字的七次方和要最大，是當 $\underline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = 99999999$

時，即

$$a_1^7 + a_2^7 + a_3^7 + a_4^7 + a_5^7 + a_6^7 + a_7^7 + a_8^7 = 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 = 38263752$$

亦即，所有 8 位數的每個位數數字七次方和都不大於 38263752。

(2) 所有不大於 38263752 的數中，每個位數數字七次方和要最大，是當

$$\underline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = 29999999 \text{ 時，即}$$

$$a_1^7 + a_2^7 + a_3^7 + a_4^7 + a_5^7 + a_6^7 + a_7^7 + a_8^7 = 2^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 = 33480911$$

亦即，所有不大於 38263752 的數，其每個位數數字七次方和都不大於 33480911。

(3) 所有不大於 33480911 的數中，每個位數數字七次方和要最大，是當

$$\underline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} = 29999999 \text{ 時，即}$$

$$a_1^7 + a_2^7 + a_3^7 + a_4^7 + a_5^7 + a_6^7 + a_7^7 + a_8^7 = 2^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 = 33480911$$

亦即，所有不大於 33480911 的數，其每個位數數字七次方和都不大於 33480911。

(4) 所有 8 位數經過數次求七次方和的動作後，一定都會小於 33480911。

2. $\underline{a_1 a_2 \dots a_n}$ 的每個位數數字的七次方和要最大，是當 $\underline{a_1 a_2 \dots a_n} = 99 \dots 9$ 時，亦即，所有的 n

位數的每個位數數字六次方和都不大於 $531441n$ 。

因此，若 n 不大於 20，則 $4782969n < 100000000$ ，亦即 $4782969n$ 會是一個 8 位數以下的數。

也就是說，對於 9 位數至 20 位數，求七次方和數次後，一定會小於 3187710。

3. 重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求七次方和的動作後，都會小於 3187710。」亦即，任意數字經過數次求七次方和的上界為 3187710。 ■

5. 八次方的情況

我們分別求出 n 位數，當 n=1 至 11 時，八次方和的最大值及其位數。如下表 9：

表 9

n	1	2	3	4	5	6
八次方和的最大值	43046721	86093442	129140163	172186884	215233605	258280326
最大值的位數	8	8	9	9	9	9
n	7	8	9	10	11	
八次方和的最大值	301327047	344373768	387420489	43046721	473513931	
最大值的位數	9	9	9	9	9	

由表 9 可觀察出，當數字的位數大於 9 時，其八次方和的最大值均小於該數字，由此我們可以導出任意數字經過數次求八次方和的上界為何？

定理 8

任意數字經過數次求八次方和的上界為 344374024。

證明：

1. 設 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$ 為一個任意的 9 位數

(1) $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$ 的每個位數數字的八次方和要最大，是當

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9 = 999999999$ 時，即

$$9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 = 387420489$$

亦即，所有 9 位數的每個位數數字八次方和都不大於 387420489。

(2) 所有不大於 387420489 的數中，每個位數數字八次方和要最大，是當

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9 = 299999999$ 時，即

$$2^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 + 9^8 = 344374024$$

亦即，所有不大於 387420489 的數，其每個位數數字八次方和都不大於 344374024。

(3) 所有 9 位數經過數次求八次方和的動作後，一定都會小於 387420489。

2. $a_1a_2\dots a_n$ 的每個位數數字的八次方和要最大，是當 $a_1a_2\dots a_n = 99\dots 9$ 時，亦即，所有的 n

位數的每個位數數字八次方和都不大於 $43046721n$ 。

因此，若 n 不大於 23，則 $43046721n < 1000000000$ ，亦即 $43046721n$ 會是一個 9 位數以下的數。

也就是說，對於 10 位數至 23 位數，求八次方和數次後，一定會小於 387420489。

3. 重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求八次方和的動作後，都會小於 387420489。」亦即，任意數字經過數次求八次方和的上界為 387420489。 ■

4. 九次方至十二次方的情況

仿照上述 1 和 2 的做法，我們分別求出九次方至十二次方的情況：(詳細證明參見附錄)

(1) 任意數字經過數次求九次方和的上界為

$$2^9 + 9^9 + 9^9 + 9^9 + 9^9 + 9^9 + 9^9 + 9^9 + 9^9 = 3486784913$$

(2) 任意數字經過數次求十次方和的上界為

$$2^{10} + 9^{10} + 9^{10} + 9^{10} + 9^{10} + 9^{10} + 9^{10} + 9^{10} + 9^{10} + 9^{10} = 34867845034$$

(3) 任意數字經過數次求十一次方和的上界為

$$2^{11} + 9^{11} + 9^{11} + 9^{11} + 9^{11} + 9^{11} + 9^{11} + 9^{11} + 9^{11} + 9^{11} + 9^{11} = 345191657747$$

(4) 任意數字經過數次求十二次方和的上界為

$$2^{12} + 9^{12} + 9^{12} + 9^{12} + 9^{12} + 9^{12} + 9^{12} + 9^{12} + 9^{12} + 9^{12} + 9^{12} + 9^{12} = 3389154441868$$

定理 9

任意數字的 m 次方和的上界為 $m \times 9^m + b^m$ ，其中 b 為介於 1 至 9 的整數。

證明：

1. 設 $\underline{a_1 a_2 \cdots a_m a_{m+1}}$ 為一個任意的 $(m+1)$ 位數

(1) $\underline{a_1 a_2 \cdots a_m a_{m+1}}$ 的每個位數數字的 m 次方和要最大，是當 $\underline{a_1 a_2 \cdots a_m a_{m+1}} = 999 \cdots 999$ 時，

$$\text{即 } a_1^m + a_2^m + \cdots + a_m^m + a_{m+1}^m = 9^m + 9^m \cdots + 9^m = (m+1) \times 9^m$$

亦即，所有 $(m+1)$ 位數的每個位數數字 m 次方和都不大於 $(m+1) \times 9^m$ 。

(2) 所有不大於 $(m+1) \times 9^m$ 的數中，每個位數數字 m 次方和要最大，是當

$$\underline{a_1 a_2 \cdots a_m a_{m+1}} = \underline{b_1 999 \cdots 999} < (m+1) \times 9^m \quad (b_1 999 \cdots 999 \text{ 為最高位數字為 } b, \text{ 後面有 } m$$

$$\text{個 } 9 \text{ 的數}) \text{ 時，即 } a_1^m + a_2^m + \cdots + a_m^m + a_{m+1}^m = b_1^m + 9^m + 9^m \cdots + 9^m = b_1^m + m \times 9^m$$

亦即，所有不大於 $(m+1) \times 9^m$ 的數，其每個位數數字 m 次方和都不大於 $b_1^m + m \times 9^m$ 。

(3) 所有 $(m+1)$ 位數經過 2 次求 m 次方和的動作後，一定都會小於 $m \times 9^m + b^m$ 。

2. $\underline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的每個位數數字的 m 次方和要最大，是當 $\underline{a_1 a_2 \cdots a_n} = 99 \cdots 9$ 時，亦即，所有的 n

位數的每個位數數字四次方和都不大於 $9^m \times n$ 。

因此，若 n 不大於 $\left\lceil \frac{10^{m+1}}{9^m} \right\rceil$ ($\lceil \]$ 為高斯符號)，則 $9^m \times n < 10^{m+1}$ ，亦即 $9^m \times n$ 會是一個

$(m+1)$ 位數以下的數。

也就是說，對於 $(m+2)$ 位數至 $\left\lceil \frac{10^{m+1}}{9^m} \right\rceil$ 位數，求 m 次方和數次後，一定會小於

$$m \times 9^m + b^m。$$

3. 重複相同的步驟，即可推至對於「任何位數的數字經過數次求 m 次方和的動作後，都會小於 $m \times 9^m + b^m$ 。」亦即，任意數字的 m 次方和的上界為 $m \times 9^m + b^m$ 。 ■

肆、研究結果

一、任意一個數字經過數次求一次方和（即數字和）的動作後，一定會得到「1」、「2」、

「3」、...、「9」等 9 個數的其中一個數。

二、任意一個數字經過數次求二次方和的動作後，一定會得到「1」或者落到

「16→37→58→89→145→42→20→4→16」的循環中。

三、任意一個數字經過數次求三次方和的動作後，一定會得到「1」、「153」、「370」、「371」、

「407」或落到「136→244→136」、「1459→991→1459」、「217→352→160→217」、

「133→55→250→133」的循環中。

四、四次方和至十二次方和的上界

1.任意數字經過數次求四次方和的上界為 22605。

2.任意數字經過數次求五次方和的上界為 295246。

3.任意數字經過數次求六次方和的上界為 3188710。

4.任意數字經過數次求七次方和的上界為 33480911。

5.任意數字經過數次求八次方和的上界為 344374024。

6.任意數字經過數次求九次方和的上界為 3486784913。

7.任意數字經過數次求十次方和的上界為 34867845034。

8.任意數字經過數次求十一次方和的上界為 345191657747。

9.任意數字經過數次求十二次方和的上界為 3389154441868。

五、 m 次方和的上界：任意數字的 m 次方和的上界為 $m \times 9^m + b^m$ ，其中 b 為介於 1 至 9 的整數。

伍、研究討論

1.在定理 9 中，得到「任意數字的 m 次方和的上界為 $m \times 9^m + b^m$ ，其中 b 為介於 1 至 9 的整數。」其中， b 的值我們無法確定，於是請教老師，老師告訴我們可能需要用到「對數」，這是屬於高中數學的範圍，對我們而言太過艱深。

2.我們藉由定理 1 至 3，得到一個猜想，對於任意數經過 m 次方和後，一定後落到一個定數或是一個循環中，而且這些定數或循環的數一定都會介於 1 至 999...999（共有 m 個 9）之中。所以如果是四次方和的部份，我們尚須確認 10000 至 22605 中的數經過四次方和數次是否一定都會落至 1 至 9999 之中。其餘以此類推。

陸、參考文獻

樂在其中的數學（2005），談祥柏，頁 282~286，北京市：科學出版社。

030406

- N

N

1