

---

030409

~

---

--	--

— — —

## 壹、 摘要

我們一開始從雪花**繁複又有規律**的圖形得到靈感，並尋找了一些水結晶成冰、霜的圖片，發現其形狀雖然複雜，但皆同時具有「**相似**」及「**無限規律**」的特性。因此便以這兩者為方向，找尋符合此特色的圖形進行討論及研究。其中我們將它們分為兩個單元：（一）**不斷向外/內延伸的內切/外接圖形**；（二）**相似形重覆以規則方式相疊的碎形**。我們的研究方式是先以較簡單的內切/外接圖形為基礎，再針對一些參考資料上較常見的基本碎形圖案（如三角形相疊成爲星形...等）進行演算。有了上述的經驗後，便可以開始對碎形的形狀等特性進行變化，進而製造出我們有特色的碎形，並探討其圖形間**奇妙的關聯性**。

## 貳、 研究動機

哇！好漂亮的雪花！雪花的形狀爲什麼是**那麼的有規律、那麼的美麗而複雜**？簡直百看不厭呢！應該是他本身的**形狀**關係吧！生活中還有許多圖形具有無限的規律及相似的特性，我們便朝著此二單元做深入研究：（一）內外縮放的內切/外接圖形、（二）重覆相疊的碎形。於是我們先研究基本知識，接著在老師的帶領下，以創意的鑰匙開啓碎形的大門！

## 參、 研究目的

- 一、 把內切/外接圖形做推廣，研究基礎圖形。
- 二、 認識碎形，並以相關規律延伸，找出**比例關係**。
- 三、 對碎形**作變化，創造自我的圖形**，展現創意及風格。

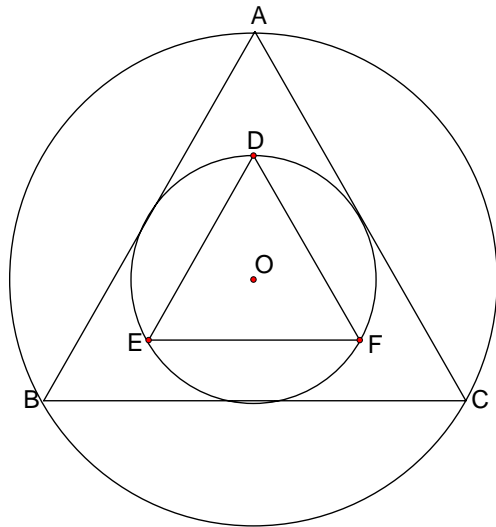
## 肆、 研究方法及步驟

- 一、 找尋有關於碎形之知識，並利用網際網路與各種圖書資料，了解碎形的「**面積範圍不超過外圍點與點的連線**」、「**圖形中任何一部分皆相似於主體圖形**」、「**面積持續延伸的公式發現成等比級數**」.....等等特性。
- 二、 先以內切外接圖形的知識爲基礎，研究書本、參考資料上的現成碎形，作爲我們進一步**創新改進的前提**。
- 三、 再來將已有的碎形，加以改良、自製、創造，衍生出只屬於我們**獨特的創新碎形**！

## 伍、 研究過程

### 一、 內切/外接圖形

#### (一)、 正三角形內切/外接圓形



(令小圓半徑為X)

面積

$$\begin{aligned} \Delta DEF & \text{爲 } \frac{\sqrt{3}}{2} X \cdot \frac{X}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \\ & = \frac{3\sqrt{3}}{4} X^2 \end{aligned}$$

小圓爲  $X^2\pi$

$$\begin{aligned} \Delta ABC & = \sqrt{3} X \cdot X \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \\ & = 3\sqrt{3} X^2 \end{aligned}$$

$$\text{大圓} = (2X)^2\pi$$

$$= 4X^2\pi$$

周長

$$\Delta DEF \text{ 爲 } 3\sqrt{3} X$$

小圓爲  $2X\pi$

$$\begin{aligned} \Delta ABC & \text{ 爲 } 6\sqrt{3} X \\ \text{大圓} & \text{ 爲 } 4X\pi \end{aligned}$$

小正三角形:內切圓:正三角形:外接圓

$$\text{周長比} = 3\sqrt{3} : 2\pi : 6\sqrt{3} : 4\pi$$

$$\text{面積比} = \frac{3\sqrt{3}}{4} : \pi : 3\sqrt{3} : 4\pi$$

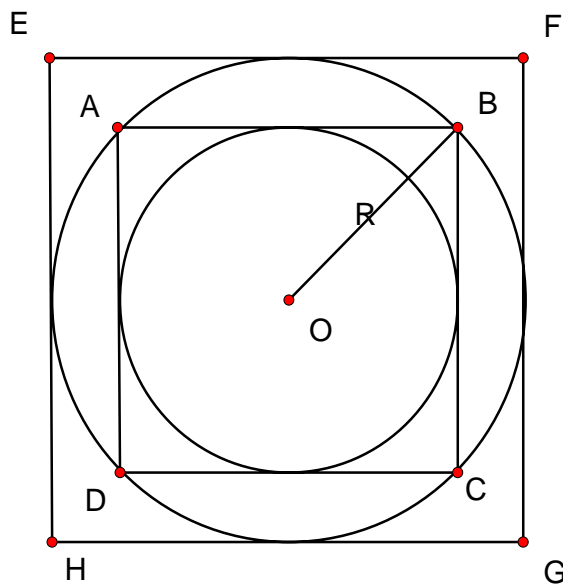
## 結論

當正三角形和圓形多層內切外接時

外層正三角形和內層正三角形周長比為 2 : 1 面積比為 4 : 1

外層圓形和內層圓形周長比為 2 : 1 面積比為 4 : 1

(二)、正方形內切/外接圓形



(設大圓半徑為R )

周長

$$\begin{aligned} \text{小正方形} &= \sqrt{2}R \cdot 4 \\ &= 4\sqrt{2}R \end{aligned}$$

$$\text{大圓} = 2\pi R$$

$$\begin{aligned} \text{小圓} &= \sqrt{2}R \cdot \pi \\ &= \sqrt{2}\pi R \end{aligned}$$

$$\text{大正方形} = 8R$$

面積

$$\begin{aligned} \text{小正方形} &= (\sqrt{2}R)^2 \\ &= 2R^2 \end{aligned}$$

$$\text{大圓} = \pi R^2$$

$$\text{小圓} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$\text{大正方形} = 4R^2$$

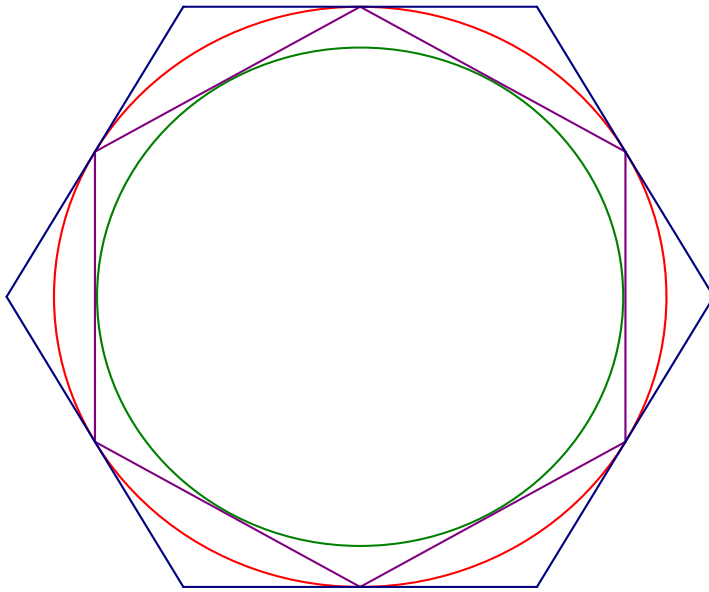
## 結論

當正方形和圓形多層內切外接時

外層正方形和內層正方形周長比為  $2 : \sqrt{2}$  面積比為  $2 : 1$

外層圓形和內層圓形周長比為  $2 : \sqrt{2}$  面積比為  $2 : 1$

(三)、正六邊形內切/外接圓形



(令大圓半徑為R)

周長

小正六邊形(紫) $=6R$

大圓(紅) $=2\pi R$

小圓(綠) $=\frac{\sqrt{3}}{2}R \cdot 2 \cdot \pi$

$=\sqrt{3}\pi R$

大正六邊形(藍) $=\frac{12R}{\sqrt{3}}$

$=4\sqrt{3}R$

面積

小正六邊形 $=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$

大圓 $=R^2\pi$

小圓 $=\frac{3}{4}\pi R^2$

大正六邊形 $=\frac{6\sqrt{3}}{3}R^2=2\sqrt{3}R^2$

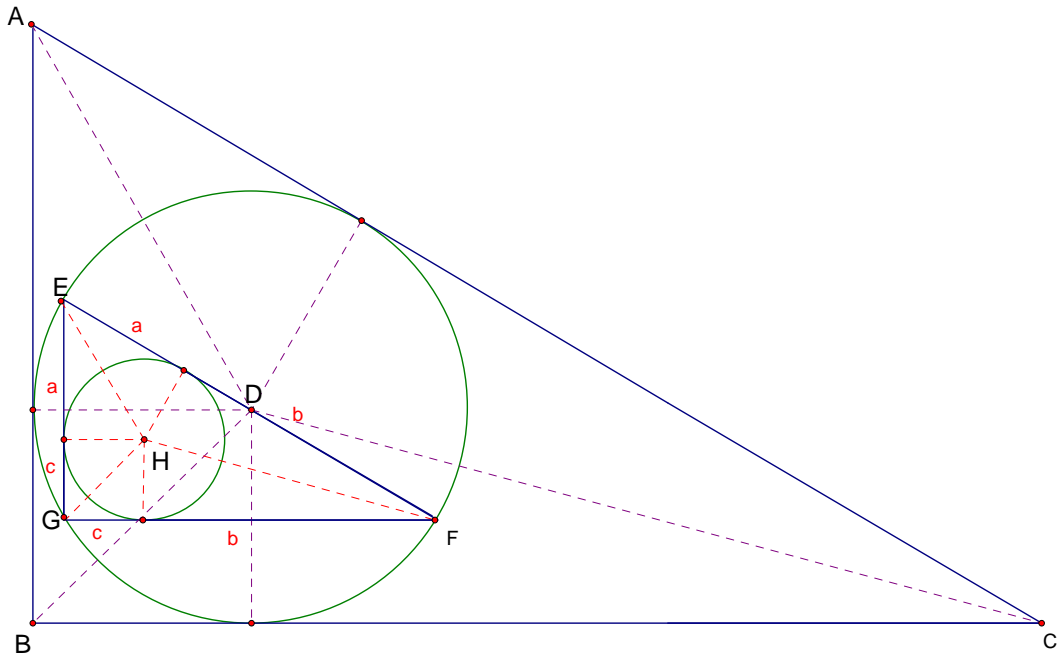
## 結論

當正六邊形和圓形多層內切外接時

外層正六邊形和內層正六邊形周長比為  $2 : \sqrt{3}$  面積比為  $4 : 3$

外層圓形和內層圓形周長比為  $2 : \sqrt{3}$  面積比為  $4 : 3$

(四)、自製特殊角三角形內切/外接圓形



設圓D半徑為X

$$\overline{AK} = \sqrt{3}X$$

$$\overline{KB} = X$$

$$\overline{AB} = (\sqrt{3}+1)X$$

$$\overline{EF} = 2X$$

$$\overline{EG} = X$$

$$\overline{GF} = \sqrt{3}X$$

<圓形>

$$2a+2b+2c=2X+X+\sqrt{3}X$$

$$a+b+c = \frac{3+\sqrt{3}}{2}X$$

$$c = \frac{3+\sqrt{3}}{2}X - 2X = \frac{\sqrt{3}-1}{2}X \rightarrow \text{圓H半徑}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

<三角形>

$$\overline{AB} : \overline{EG} = \text{周長比} = (\sqrt{3}+1) : 1$$

$$\text{面積比} = (\sqrt{3}+1)^2 : 1 = (4+2\sqrt{3}) : 1$$

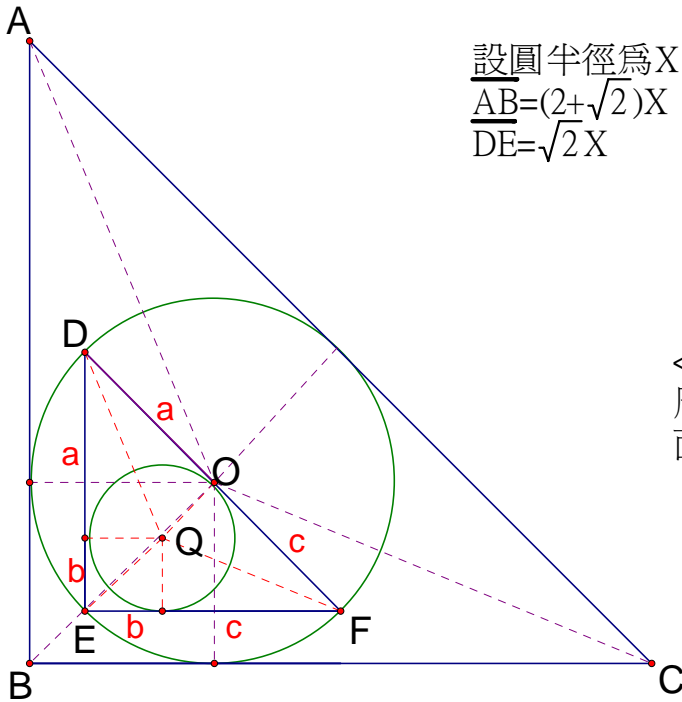
## 結論

當三角形和圓形多層內切外接時

外層三角形和內層三角形周長比為  $\sqrt{3}+1 : 1$  面積比為  $4+2\sqrt{3} : 1$

外層圓形和內層圓形周長比為  $1 : \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  面積比為  $4 : \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

(五)、自製等腰直角三角形內切/外接圓形



設圓半徑為X  
 $\overline{AB} = (2 + \sqrt{2})X$   
 $\overline{DE} = \sqrt{2}X$

<圓形>  
 $2a + 2b + 2c = 2X + 2\sqrt{2}X$   
 $a + b + c = (\sqrt{2} + 1)X$   
 $c = (\sqrt{2} - 1)X$   
 圓O : 圓Q  
 周長比 =  $1 : (\sqrt{2} - 1)$   
 面積比 =  $1^2 : (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 : (3 - 2\sqrt{2})$

<三角形>  
 周長比 =  $\overline{AB} : \overline{DE} = (2 + \sqrt{2}) : \sqrt{2}$   
 面積比 =  $(2 + \sqrt{2})^2 : (\sqrt{2})^2 = (3 + 2\sqrt{2}) : 1$

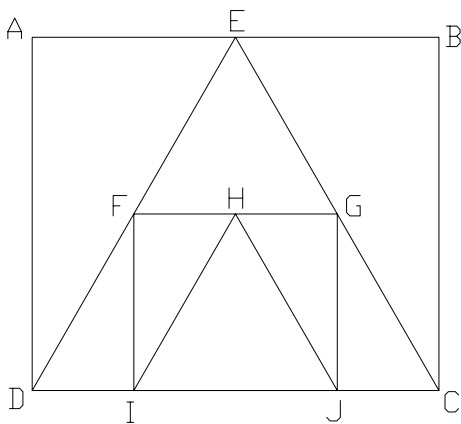
**結論**

當三角形和圓形多層內切外接時

外層三角形和內層三角形周長比為  $2 + \sqrt{2} : 2$  面積比為  $3 + 2\sqrt{2} : 1$

外層圓形和內層圓形周長比為  $1 : \sqrt{2} - 1$  面積比為  $1 : 3 - 2\sqrt{2}$

(六)、矩形疊合/縮放三角形



$\therefore \triangle HIJ \cong \triangle EDC$

$\therefore \overline{HI} = \frac{1}{2} \overline{EC}$  小長方形與大長方形的長與寬成等比例

**結論**

當任意三角形和矩形多層疊和/縮放時

外層任意三角形和內層任意三角形

周長比為  $2 : 1$  面積比為  $4 : 1$

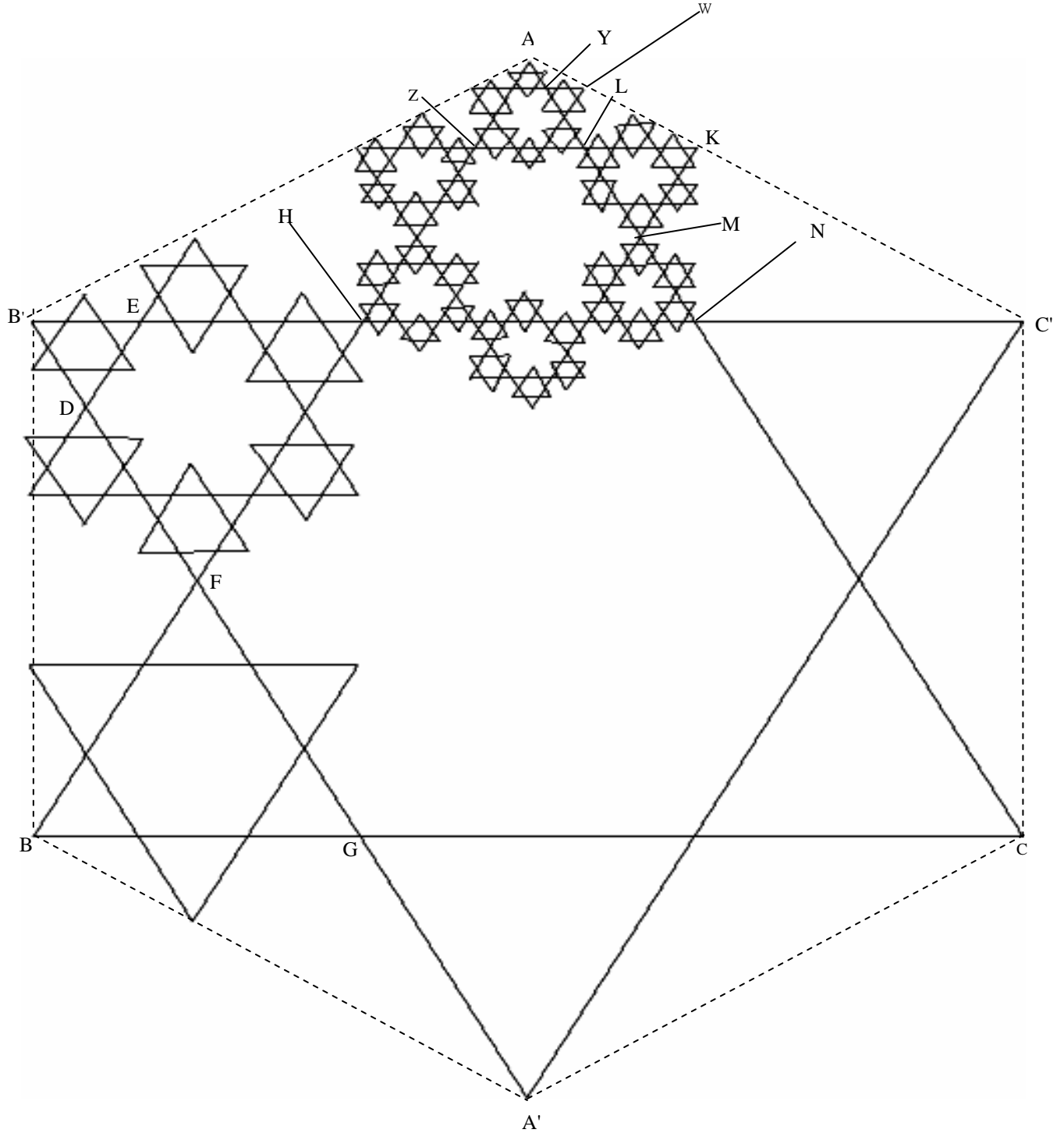
外層矩形和內層矩形

周長比為  $2 : 1$  面積比為  $4 : 1$

## 二、碎形

### (一)、六邊形碎形

作法：作  $\triangle ABC$ ，再作全等於  $\triangle ABC$  的  $\triangle A'B'C'$ ，將兩三角型以上下顛倒的方式相疊做成一星形(一正六邊形+六正三角形)  
，將所得的新三角形再以同方式做後面依此類推。



面積

$$\overline{FB} = \frac{1}{3}\overline{AB} \quad \Delta FBG = \frac{1}{9}\Delta ABC \text{ 其他五個亦是如此}$$

$$\overline{B'E} = \frac{1}{3}\overline{B'H} \quad \Delta B'ED = \frac{1}{9}\Delta B'FH = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}\Delta ABC \text{ 其他亦是如此}$$

$$\begin{aligned} & \Delta ABC + \frac{1}{9}\Delta ABC \cdot 3 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}\Delta ABC \cdot 2 \cdot 6 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \cdot 6 \Delta ABC \\ & + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \Delta ABC \cdot \left[ (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \cdot 3 + \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2} \cdot 2 \right] \dots \dots \dots \\ & = \Delta ABC + \frac{1}{9}\Delta ABC \cdot 3 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 \Delta ABC \cdot 12 + \left(\frac{1}{9}\right)^3 \Delta ABC \cdot 48 + \left(\frac{1}{9}\right)^4 \Delta ABC \cdot 192 \\ & = \Delta ABC + \frac{1}{9}\Delta ABC \cdot 3 \cdot 4^0 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 \Delta ABC \cdot 3 \cdot 4^1 + \left(\frac{1}{9}\right)^3 \Delta ABC \cdot 3 \cdot 4^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^4 \Delta ABC \cdot 3 \cdot 4^3 \dots \dots \dots \\ & = \Delta ABC + \frac{1}{3}\Delta ABC + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}\Delta ABC + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}\Delta ABC + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \Delta ABC \cdot \frac{1}{3} + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

周長

每當增加1個自己  $\frac{1}{9}$  倍的三角形時，會多出2個  $\frac{1}{9}$  倍本來三角形的周長，但又因原三角形的1個  $\frac{1}{9}$  倍周長被消掉，故只增加1個原三角形  $\frac{1}{9}$  倍的周長。

$$\begin{aligned} & \Delta ABC \text{ 周長} + \frac{1}{9}\Delta ABC \text{ 周長} \cdot 3 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 6 \Delta ABC + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \Delta ABC (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \cdot 6 \\ & + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \Delta ABC \left[ (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \cdot 3 + \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2} \cdot 2 \right] \dots \dots \text{算法如求面積} \\ & \text{此圖形面積範圍必不可能超過六邊形 } AB'BA'CC' \text{， } \Delta KML \cong \Delta ALZ \end{aligned}$$

$$\overline{AL} = \overline{LK} \text{ 且 } \angle L = \angle N = 120^\circ \quad \overline{3AK} = \overline{AC'} \quad \overline{3KL} = \overline{C'N}$$

$$\therefore \Delta ALK \sim \Delta ANC', \quad \Delta ALK = \frac{1}{9}\Delta ANC', \quad \Delta AEW = \left(\frac{1}{9}\right)^2 \Delta ANC'$$

$\Delta LKA$  和  $\Delta NCA$  的最長邊都會在  $\overline{AC}$  上，其他亦是如此。

無限延伸周長與面積之相同近似值皆為

$$\Delta ABC + \frac{\frac{1}{3}\Delta ABC}{\frac{5}{9}} = \frac{8}{5}\Delta ABC$$

### 結論

當作出上述之碎形時，第 n 層

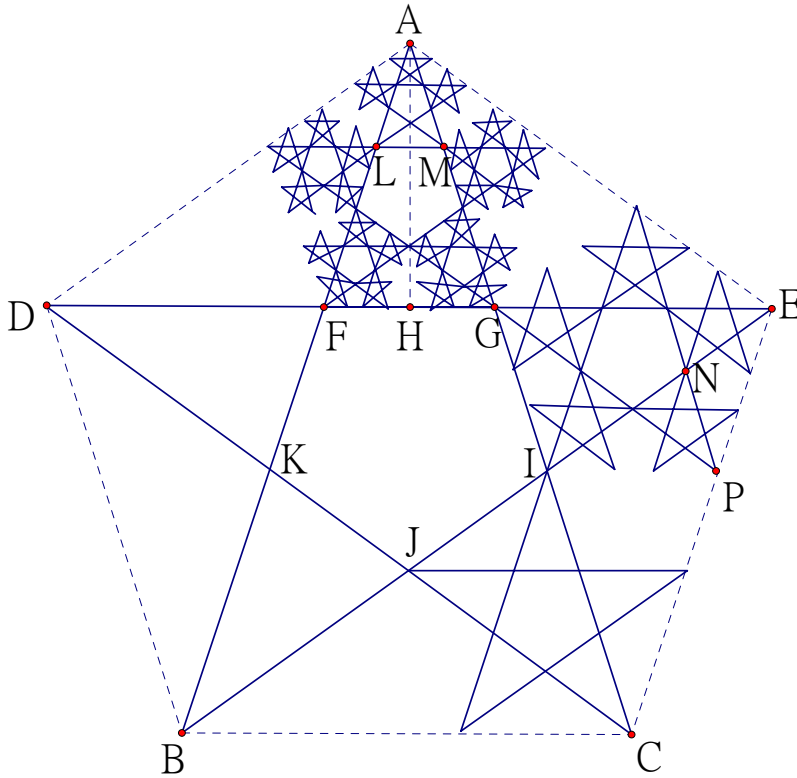
面積增加: 周長增加: 六邊形碎形面積和周長  $= \frac{8}{5}\Delta ABC$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \frac{1}{3} \cdot \Delta ABC \quad \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \frac{1}{3} \cdot \Delta ABC$$

(二)、五邊形碎形

即使作出六邊形面積與周長規律及其特性和特徵，但無法證明其他碎形亦是如此，我們就模仿六邊形碎形，畫出了五邊形碎形。求出其面積與周長，來證明六邊形碎形特徵是否可適用於其他碎形。

設  $\overline{BC}$  為  $x$   $\overline{FG}$  為  $y$ ， $\overline{AH}$  垂直  $\overline{DE}$ ，



邊長

$$\sqrt{(x-y)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} + \left(x - \frac{y}{2}\right) = x^2$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - \frac{y^2}{4} + x^2 + \frac{y^2}{4} - xy = x^2$$

$$x^2 - 3xy + y^2 = 0$$

$$1 - 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \quad y < x$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ or } \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$y : x = (3 - \sqrt{5}) : 2$$

$$\overline{AG} : \overline{AC} = \overline{AF} : \overline{AB} = \overline{FG} : \overline{BC} = (3 - \sqrt{5}) : 2$$

$$\Delta AFG : \Delta ABC = (3 - \sqrt{5})^2 : 4 = 8 - \sqrt{30} : 4$$

$$\Delta AFG = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \Delta ABC$$

$$\Delta ALM = \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Delta ABC \text{ 其他亦如此}$$

面積

$$\begin{aligned}
 &FGIJK + \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \Delta ABC \cdot 5 + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Delta ABC \cdot 2 \cdot 5 + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^3 \Delta ABC \cdot (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \cdot 5 \\
 &+ \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^4 \Delta ABC \left[ (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \cdot 3 + \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2} \cdot 2 \right] \cdot 5 \\
 &=FGIJK + \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \Delta ABC \cdot 5 + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Delta ABC \cdot 10 + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^3 \Delta ABC \cdot 40 + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^4 \Delta ABC \cdot 160 \dots \\
 &=FGIJK + \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \Delta ABC \cdot 5 + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Delta ABC \cdot 10 + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^3 \Delta ABC \cdot 10 \cdot 4 + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^4 \Delta ABC \cdot 10 \cdot 4 \cdot 2 \dots \\
 &=FGIJK + \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \Delta ABC \cdot 5 + (235-105\sqrt{5}) \Delta ABC + (235-105\sqrt{5})(14-6\sqrt{5}) \Delta ABC \\
 &+ (235-105\sqrt{5})(14-5\sqrt{5})^2 \Delta ABC \dots
 \end{aligned}$$

周長

$$\frac{z}{x} = \frac{2-(3-\sqrt{5})}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \overline{BC} \quad y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \overline{BC}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \overline{BC} \cdot 2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \overline{BC}\right) \cdot 5 + \left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \overline{BC} \cdot 2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \overline{BC}\right] \cdot 2 \cdot 5 \\
 &+ \left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \overline{BC} \cdot 2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \overline{BC}\right] \cdot (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \cdot 5 + \\
 &\left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 \overline{BC} \cdot 2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^4 \overline{BC}\right] \cdot \left[\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2} \cdot 2 + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) \cdot 3\right] \cdot 5 \dots \\
 &= \overline{BC} \left[ 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \right] \cdot 5 + \overline{BC} \left[ 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \right] \cdot 2 \cdot 5 + \\
 &\overline{BC} \left[ 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \right] \cdot 4 \cdot 5 + \overline{BC} \left[ 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3 \right] \cdot 4^2 \cdot 5 + \dots
 \end{aligned}$$

面積範圍不會超過ADBCE

因為  $\overline{EN} = \overline{NP}$  且等長  $\overline{PN} // \overline{CI}$   $\overline{PE}$  與  $\overline{EC}$  重疊  $\therefore \Delta ENP \sim \Delta EIC$

$\therefore C, P, E$  共線 其他亦是如此

面積

$$\begin{aligned}
 &FGIJK + \frac{35-15\sqrt{5}}{2} \Delta ABC + \frac{(235-105\sqrt{5}) \Delta ABC}{6\sqrt{5}-13} \\
 &=FGIJK + \frac{35-15\sqrt{5}}{2} \Delta ABC + \frac{(235-105\sqrt{5})(6\sqrt{5}+13)}{11} \Delta ABC \\
 &=FGIJK + \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot 5 \Delta ABC + \frac{6\sqrt{5}+13}{11} \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot 10 \Delta ABC \\
 &=FGIJK + 5 \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \left(1 + \frac{6\sqrt{5}+13}{11} \cdot \frac{7-3\sqrt{5}}{4} \cdot 5\right) \Delta ABC \\
 &=FGIJK + 5 \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{16+15\sqrt{5}}{11}\right) \Delta ABC \\
 &=FGIJK + \frac{285\sqrt{5}-565}{22} \Delta ABC
 \end{aligned}$$

# 結論

當作出上述之碎形時，第 n 層  
面積增加:

$$(235-105\sqrt{5})(14+5\sqrt{5})^n \Delta ABC$$

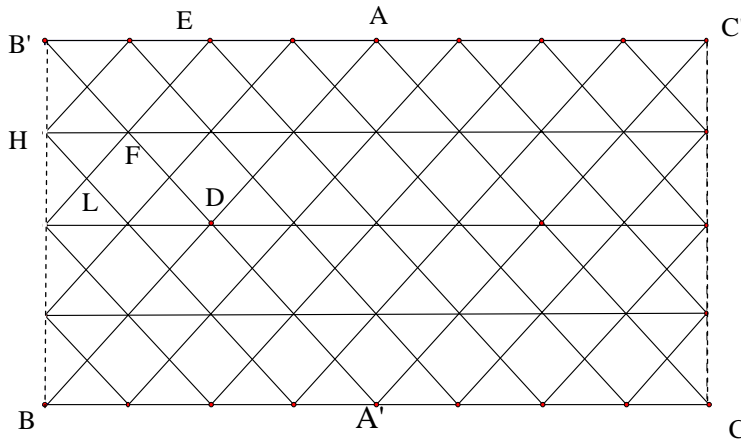
周長增加:

$$\overline{BC} \left[ 2 \cdot \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \cdot 4^{n-1} \cdot 5$$

$$\text{五邊形碎形面積} = \text{FGIJK} + \frac{285\sqrt{5}-565}{22} \Delta ABC$$

## (三) 自製三角碎形

作法：依照五邊形及六邊形碎形的特徵及特性，而畫出來新的碎形，並求出其面積與周長來檢驗它是碎形；並比較它與五邊形及六邊形碎形有何不同(適用於等腰三角形)



作  $\Delta ABC$  和  $\Delta A'B'C'$  ( $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ ) 以上下顛倒相疊，會多出 2 個與  $\Delta ABC$  相似的三角形，如  $\Delta A'BD$ ，再以相同方法使新出現的小三角型相疊，其他依此類推

每當增加一個  $\frac{1}{4}$  倍的三角形時，會多出 2 邊，其中 1 邊與遮住的 1 邊互消，故只會多出較短的一邊，其他依此類推。

$$\overline{BC} + \frac{1}{4} \overline{BC} \cdot 2 + \frac{1}{8} \overline{BC} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{16} \overline{BC} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots = \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{BC} \dots$$

面積

$$\Delta A'BD = \frac{1}{4} \Delta ABC$$

$$\Delta B'EF = \left( \frac{1}{4} \right)^2 \Delta ABC \text{ 其他依此類推}$$

$$\Delta LFK = \left( \frac{1}{4} \right)^3 \Delta ABC$$

$$\Delta ABC + \frac{1}{4} \Delta ABC \cdot 2 + \left( \frac{1}{4} \right)^2 \Delta ABC \cdot 2 \cdot 2 + \left( \frac{1}{4} \right)^3 \Delta ABC \cdot 2 \cdot 4 \dots$$

$$= \Delta ABC + \frac{1}{4} \Delta ABC \cdot 2 + \left( \frac{1}{4} \right)^2 \Delta ABC \cdot 2 \cdot 2 + \left( \frac{1}{4} \right)^3 \Delta ABC \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots$$

$$= \Delta ABC + \frac{1}{2} \Delta ABC + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \Delta ABC + \left( \frac{1}{2} \right)^3 \Delta ABC \dots$$

$$\text{面積} : \frac{\Delta ABC}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \Delta ABC$$

面積範圍不超過B'BCC'因以全等三角形上下顛倒平行，例如： $\overline{BA'} \parallel \overline{HF}$ 且 $\overline{BA'} \perp \overline{HB}$ ，因此分出來的新三角形不會超過 $BB'$ ，分下去後亦是如此。

## 結論

當作出上述之碎形時，第  $n$  層

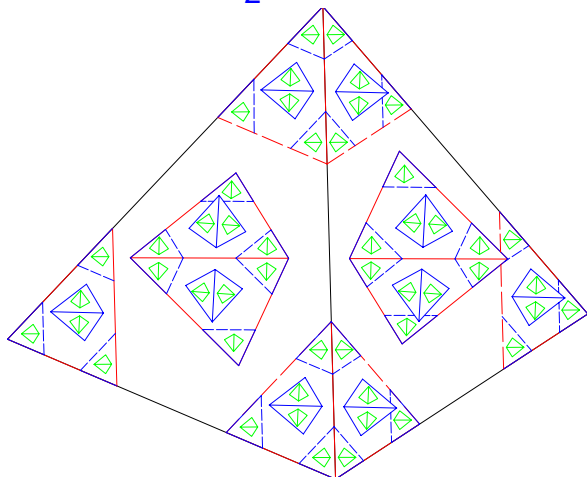
面積增加:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \Delta ABC$$

周長增加:

$$\frac{1}{2} BC$$

自製碎形面積 =  $2 \Delta ABC$



平面碎形是那麼的有趣和有規律，但是，不知道立體碎形又是怎樣呢？於是，我們依照六邊形碎形平面來求證三角錐的碎形體積與表面積

將兩個正三角錐，以相反方向相疊，使其出現8個全等的小正三角錐。會

發現小正三角錐邊長為大正三角錐的  $\frac{1}{3}$ ，體積變為  $\frac{1}{27}$ 。

將最大的三角錐設為  $a_1$ ，邊長為  $a_1$  的  $\frac{1}{3}$  倍的三角錐為  $a_2$

小正方形表面積是大正方形表面積的  $\frac{1}{9}$

$\Rightarrow$  邊長為  $a_1$  的  $\frac{1}{3^n}$  倍的三角錐即為  $a_{n+1}$

$$\dots a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot 4 + a_3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 + a_4 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 4 + 2 \cdot 3) \cdot 8 + \dots$$

$$a_1 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 8 + a_4 \cdot (3 \cdot 4 + 2 \cdot 3) \cdot 8 + \dots$$

$$= a_1 + \frac{1}{9} a_1 \cdot 8 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 a_1 \cdot 48 + \left(\frac{1}{9}\right)^3 a_1 \cdot 288 + \dots$$

$$= a_1 + \frac{1}{27} a_1 \cdot 4 + \left(\frac{1}{27}\right)^2 a_1 \cdot 24 + \left(\frac{1}{27}\right)^3 a_1 \cdot 144 + \dots$$

$$= a_1 + \frac{1}{9} a_1 \cdot 8 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 a_1 \cdot 8 \cdot 6 + \left(\frac{1}{9}\right)^3 a_1 \cdot 8 \cdot 6^2 + \dots$$

$$= a_1 + \frac{1}{27} a_1 \cdot 4 + \left(\frac{1}{27}\right)^2 a_1 \cdot 4 \cdot 6 + \left(\frac{1}{27}\right)^3 a_1 \cdot 4 \cdot 6^2 + \dots$$

$$= a_1 + \frac{8}{9} a_1 + \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} a_1 + \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 a_1 \dots$$

周長約等於

$$\frac{8}{9} a_1$$

$$a_1 + \frac{\frac{8}{9} a_1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{11}{3} a_1$$

面積約等於

$$\frac{4}{27} a_1$$

$$a_1 + \frac{\frac{4}{27} a_1}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{25}{21} a_1$$

$$\text{立體碎形面積} = \frac{25}{21} a_1$$

$$\text{立體碎形周長} = \frac{11}{3} a_1$$

## 結論

當作出上述之碎形時，第  $n$  層

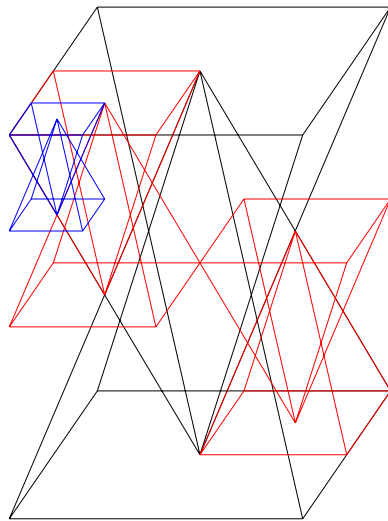
體積增加:

$$\left(\frac{1}{27}\right)^n a_1 \cdot 4 \cdot 6^{n-1}$$

表面積增加:

$$\frac{8}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} a_1$$

(五)自製「達文西」四角錐碎形



體積

$a_1$  為下層最大四角錐之體積

$$\begin{aligned}
 & a_1 + 4 \cdot \frac{1}{8} a_1 + 4 \cdot \frac{1}{16} a_1 + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{8} a_1 + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 a_1 \dots \\
 & = a_1 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} a_1 + \frac{13}{128} a_1 + \frac{13}{128} \cdot \frac{1}{8} a_1 \dots + \frac{13}{128} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n \\
 & \frac{7}{4} a_1 + \frac{\frac{13}{128}}{\frac{7}{8}} a_1 = \frac{75}{28} a_1 \quad \Leftrightarrow \text{此圖無限延伸後體積近似值}
 \end{aligned}$$

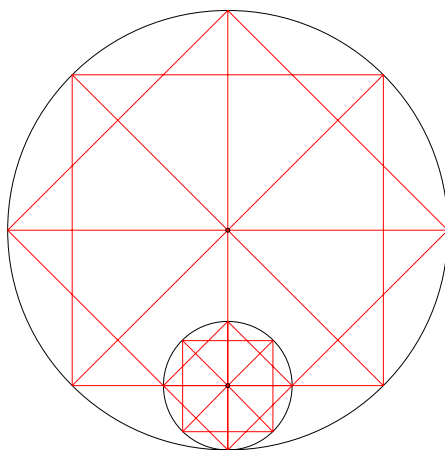
結論

當作出上述之碎形時，第  $n$  層體積增加:

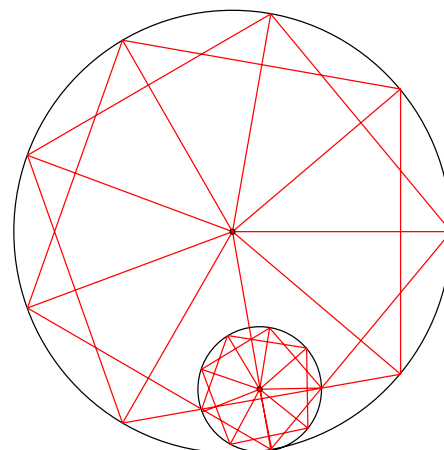
$$\frac{13}{128} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-3}$$

(六)、其他正多邊形碎形補充 (製法範例)

1、八邊形碎形



2、九邊形碎形



- 作法: 1.畫一圓，作正多邊形頂點，隔一頂點相連，做出星形。  
 2.以突出的三角形做外接圓，重複步驟一。  
 3.其它依此類推。

## 陸、 討論

- 一、 一開始我們先做內切及外接圖形。本來想用基本的三角形，以正多邊形加以研究。以特殊角之三角形（30 度 - 60 度 - 90 度）（45 度 - 45 度 - 90 度）和三角形內切/外接矩形當作比較，如此便能求出關聯性。發現三角形疊和/縮放矩形時周長比必成 1:2，面積比必成 1:4（但鈍角三角形之最長邊須與長方形其中一邊相等疊和！），這是我們的意外收獲。
- 二、 繪圖計算中，我們採用精準的紙上方格紙繪圖；在電腦則用專業的繪圖軟體(GSP 4.03 中文版)，來減少繪圖上的不精準問題。
- 三、 由於三角形內切外接等圓形有應用到往後才教的「畢氏定理」，我們便先請教數學老師，並一起討論面積的問題，老師也順便借我們幾本有關水結晶成雪花知識的書籍，幫助研究進行。
- 四、 研究碎形時，我們發現小的多邊形都是接在固定的三分之一邊上，雖然曾經嘗試接在二分之一或者另外的地方，但都無法找出比較好的圖形。所以只能依照雪花結晶比較有規律性。
- 五、 第三個碎形雖然也屬於碎形此類，但是較為特殊。製作此一圖形的靈感源自於煎餅的紋路，似乎也是碎形，接連不絕，綿延不斷。沒想到真的可以進行研究，也是一樣有規律。
- 六、 討論後發現：我們研究的圖形都可以從圓形衍生出來，十分特別。

## 柒、 結論

- 一、 依內切外接圖形的研究結果，我們得到內切與外接圖形皆有一定的周長與面積比例關係可循。（由各圖形之下方藍色結論部份分述！）
- 二、 依碎形的研究結果，我們發現都是由最大的圖形縮減一定比例的排在固定的邊上而成。並且周長與面積也是等比例增加，且面積範圍不會超過點與點之間的連線，十分的有規律性。

## 捌、 參考資料及其他

- 一、 嚴夢輝 譯。「函數與圖形探趣」。台北市。徐氏文教出版社（民 82）。
- 二、 沈文選 著。「初中卷 7 四邊形-從分解到組合」。台北市。九章出版社（民 95）。
- 三、 沈文選 著。「初中卷 6 三角形-從全等到相似」。台北市。九章出版社（民 95）。
- 四、 邢維禮 著。「國中幾何動動動(四)」。台北市。聯經出版社（民 94）。
- 五、 江本 勝 著。長安靜美 譯。「生命的答案，水知道」。台北市。如何出版社（民 91）。

030409

~