摘要

逛夜市時看到有人在射飛鏢，我們突然想到，如果飛鏢射中每個點的機率都相等，那我們是不是可以由射中圓的機率，及外圍的面積來推知圓周率呢？我們先後進行射飛鏢及擲黑豆的實驗發現，實驗過程都不夠隨機而宣告失敗。於是我們以解析幾何的方式將實驗的樣本空間座標化，然後用 EXCEL 試算表的亂數製造隨機點，並判斷隨機點的落點。

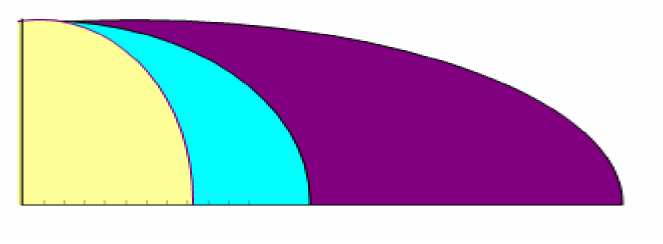
我們共製造了 10^9 個亂數數對，由所得數據分析 π 的近似值為 3.141607304。

我們並以同樣的方法實驗得到以下無理數的近似值分別為：

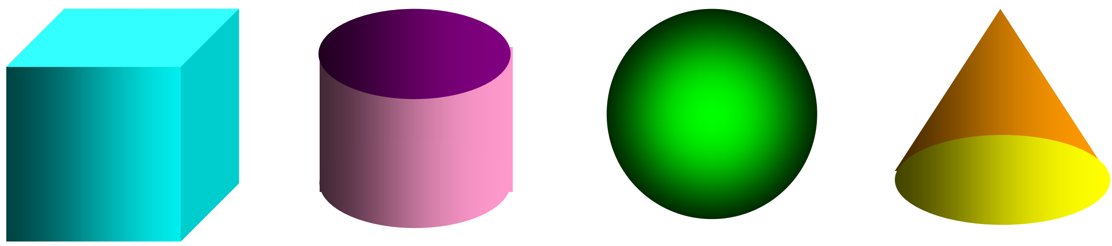
$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41426008$ 、$\sqrt[3]{2} \fallingdotseq 1.25992866$ 、$\sqrt[4]{2} \fallingdotseq 1.18918404$、

$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73195133$、$\sqrt[3]{3} \fallingdotseq 1.44236028$、$\sqrt[4]{3} \fallingdotseq 1.31623044$

我們並進一步實驗發現當短軸的長度固定時，橢圓的面積與長軸的長度成正比。進而推得橢圓面積為 $\frac{1}{4}\times$長軸$\times$短軸$\times\pi$



透過實驗我們也發現，邊長為 2r 的正立方體最大圓柱、球體、圓錐體積比為 3:2:1。並進一步推得半徑為 r 的球體體積為 $\frac{4}{3}r^3\pi$



此外，我們思索幾個可以再深入探討的主題：

1. 三角函數 Sinθ 的近似值。
2. 對數表的製作。
3. 無理數逼近速度及準確性的探討。

壹、 研究動機

某一個星期六，我們去逛夜市。看到有人在射飛鏢，便好奇地走過去看。有一位中年男子的技術奇差，整個靶面都佈滿了飛鏢。心裡想，射中紅心有那麼難嗎？看著千瘡百孔的靶面，突然想到，如果飛鏢射中每個點的機率都相等，那我們是不是可以由射中圓的機率，及外圍的面積來推知圓周率呢？

當我們有了初步的構想之後，便興奮了玩起了飛鏢實驗。我們準備了 60cm×60cm 見方的壁報紙，因圓規不易畫出較大的圓，所以我們以細繩爲工具，在紙中央畫了一個半徑爲 18cm 的圓。約定好實驗的相關細節包括：有效實驗次數爲飛鏢落在靶紙上的次數、邊界上的點以較靠近圓內或圓外作判定、每人負責實驗 500 次。我們四人分頭進行實驗， 每人負責實驗 500 次，然後彙整大家所得實驗數據(圓內,圓外)分別爲

(407,93)、(392,108)、(366,134)、(379,121)

一番誰的技術較神準的爭論之後，我們推算了圓週率如下：

靶紙總面積爲 3600 平方公分，圓面積爲 324π ，靶落在圓內的機率爲 $\frac{324\pi}{3600}$ ，我們總實驗的次數爲 2000 次，圓內的次數總共 407+392+366+379=1544 次。靶落在圓內的比率爲 $\frac{1544}{2000}$ ，由機率的理論來看，當實驗次數夠多時靶落在圓內的機率與實驗所得靶落在圓內的機率是很接近的，也就是 $\frac{324\pi}{3600} \fallingdotseq \frac{1544}{2000}$ ，推得 $\pi \fallingdotseq 8.577778$

怎麼會有這麼大的誤差呢?是實驗次數太少嗎？有其他原因嗎？還是想要以機率實驗來計算圓週率 π 的想法根本行不通？這些疑惑不斷地在我們腦中盤旋。

貳、 研究目的

一、透過機率的實驗設計與研究來計算圓週率 π 的近似值。

二、透過機率實驗設計與研究來計算其他無理數的近似值。

參、 文獻探討

想要以機率實驗來計算圓週率 π 的想法是否可行呢？回答這個問題必須先了解圓週率 π 的沿革。上網搜尋資料後，我們發現淡江大學數學系網站中的數學天地(http://www.math.tku.edu.tw/chinese/index.htm)，詳細地記載著圓週率 π 的淵源。

圓周率就是圓周長與直徑的比率，通常以希臘字母 π 來表示此符號，由數學家歐拉（Euler）首倡。研究圓周率 π 的歷史說來源遠流長，甚至於可追溯至古埃及文明時代，通常可分為四個時期：（一） 實驗時期；（二）幾何法時期；（三）分析法時期；（四）計算機時期。

（一）實驗時期：很久以前（阿基米德之前），π 值之測定常憑直觀推測或實物度量而得。

（二）幾何法時期：阿基米德用幾何的方法，證明了圓周率是介於 3 又 1/ 7 與 3 又 10/ 71 之間，現在人們常利用 22/ 7 來計算 π 的近似值。利用幾何方法求 π 值，必須做很大的計算量，像數學家盧多爾夫，為了要算出小數點後 35 位，就幾乎窮其一生，不過在計算機還未發明以前，這已經是人類的極限了。

（三）分析法時期：這一時期人們開始擺脫利用多邊形周長的繁雜計算，而利用無窮級數或無窮連乘積來計算 π ，其中有以下幾種形式表示：

＊英人 Vieta（1579）

$$2/\pi = \left(\sqrt{2}/2\right)\times\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,/2\right)\times\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,/2\right)\times\cdots\cdots$$

＊Wallis（1650）

$$\pi/2 = \left(2\times2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times\cdots\right)/\left(1\times1\times3\times3\times5\times5\times7\times7\times\cdots\right)$$

＊Leibniz（1673）

$$\pi/4 = 1-\left(1/3\right)+\left(1/5\right)-\left(1/7\right)+\cdots\cdots$$

由微積分中正切反函數的冪級數表示而得

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

*英國人夏普曾利用 Leibniz 級數將 π 算到小數點後第 72 位。

*英人梅欽於 1706 年發現，並利用正切反函數 之冪級數計算出 π 值到小數點後第 100 位。

*英人 Shanks（1873），並且利用正切反函數 之冪級數計算 π 值至小數點後第 767 位。

（四）計算機時期：1949 年 EMAC 根據梅欽公式計算 π 值到小數點後第 2035 位，時間花了 70 小時，當計算機的發展不斷更新，計算 π 值的記錄也紛紛被打破，1960 年尙克斯和倫奇（Wrench,英人），算到小數點後第 100,265 位，1967 年吉尤（Guilloud,法人）算到小數點後第 500,000 位，1987 年已有人算到第 2936 萬位以上，進入 90 年代後紀錄已經超過 10 億位了。

值得特別一提的是印度數學家 S.Ramanujan（1887—1920）。此位印度數學家身後留下無數的筆記，筆記中所記錄爲其生平時對數學的一些觀察，其中有許多很奇怪極美妙的公式，例如其中有一 ： $1/\pi = \left(\sqrt{8}/9801\right)\ {}_0\left\{((4n)![1103+23369n])/(n!\times 396^{411})\right\}$ 此級數之第一項就可算出近似值 3.14159，再加一項就可以得到小數八位的近似值，前四項就可得 3.1415926535897932 3846264338327（三十位）。在 1989 年有人利用此公式計算 π 之值到小數點第一百萬位。

圓周率之求法分爲兩種：一爲幾何法；一爲解析法。所謂幾何法者乃將圓內接外切多邊形割之又割，求其極限之値而已，故邊愈多則値愈精密，中國古代劉徽與齊祖沖之求率法均爲幾何求法，有言：方爲數之始，圓爲數之終，圓始於方，方終於圓。西方所發展的圓周率求法多屬解析法，大概利用收斂級數法的法則。

我們所構想的方法，似乎有異於這兩種方法，這給我們莫名的興奮。知識的傳達不應僅限於結果，其過程更不容忽視 吧！幾何法與解析法雖然成就非凡，但對我們而言，卻猶如象牙塔中的珍寶，深奧且難以理解的。如果我們能用易懂易操作的方法來推算 π 的近似值，那不也是一種傲人成就嗎？

肆、 研究設備及器材

壁報紙及方眼紙、尺規及細繩、飛鏢、黑豆、計算機、電腦、EXCEL 程式。

伍、研究過程

我們對自己的想法有了十足的信心，於是更積極的進行實驗。我們陸續又增加了實驗的次數，期望以增加實驗次數，來縮短實驗所得數值與π的誤差。然而儘管誤差逐漸縮減，依然有很大的誤差，而我們發現此時為了使得實驗數據完美，我們會不自主地刻意控制飛鏢的落點。於是我們領悟到，這不是個完美的實驗，因為打從一開始的實驗結果數據便掌握在實驗者的刻意操控。因為我們會習慣地把圓內當成瞄準的靶中心，刻意地去命中目標。但實驗不全然失敗，至少我們瞭解失敗的原因，主要在於我們違反了機率理論中的隨機原則。

一、隨機不隨機，真的有關係—當圓滾滾的黑豆落地時

射飛鏢的實驗使我們了解機率的兩個基本原則，一是實驗必須是隨機客觀的，一是實驗次數必須要多。否則將會產生極大誤差。由這兩個原則出發，我們重新設計了新的實驗。

隨機必須是不受主觀因素所控制的。我們用圓滾滾的黑豆均勻灑落地的方式製造隨機，於是我們準備了黑豆一包以及 35cm×50cm 的方眼紙，在紙上畫出半徑為 10cm 的圓，然後以拋灑的方式進行實驗，當圓滾滾的黑豆落地時，便是我們收割實驗成果的時候了。我們總共拋灑六次，所得數據(圓內,圓外)分別為 (127,741)、(256,684)、(280,668)、(253,626)、(152,680)、(298,714)，結果分析如下：

$$\frac{100\pi}{1750} \doteqdot \frac{127+256+280+253+152+298}{127+741+256+684+280+668+253+626+152+680+298+714} = \frac{1366}{4767}$$

推得$\pi \doteqdot 4.537071$，誤差果然縮小了，隨機不隨機，果然真的有關係。然而，我們很快發現，這仍不是一個好方法，想要達到〝隨機〞似乎比想像中的還難。我們只能望著灑落的黑豆興嘆。

二、亂數立大功

望著散落在方眼紙上的黑豆，忽然靈機一閃，每個黑豆的位置，不是正好可以用直角座標來表示嗎？記得之前曾經在瀏覽數學課本時發現課本的附錄中有一個亂數表，如果我們以

亂數來取座標點，應該可以達到完全隨機取樣吧。於是，我們用 EXCEL 試算表來繼續我們的實驗。我們發現 EXCEL 試算表中有許多函數可以運用，主要包括：

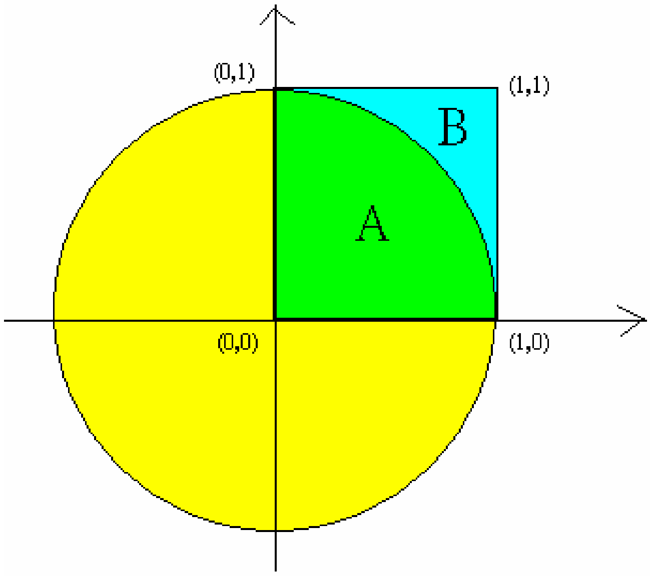
RAND→能隨機出現亂數，亂數值介於 0 與 1 之間。每當工作表重算時，便會傳回一個新的隨機亂數。

AVERAGE→傳回儲存格範圍內所有數值平均。

SUM→傳回儲存格範圍內所有數值總和。

COUNTIF→計算一範圍內符合指定條件儲存格數目。

PERCENTILE→計算數列資料的第 K 個百分位數。



我們以下列步驟進行實驗(程式見附件(二))：

1、以 RAND 指令取亂數數對(Xi,Yi)，其中 0<Xi<1，0<Yi<1，則每一個數對(Xi,Yi)皆落在第一象限的正方形區域。考量試算表範圍限制及電腦計算速度我們每次實驗的次數為 100000 次，也就是每次實驗的 i 範圍為 1 ≦ i ≦ 100000。

2、計算每個數對(Xi,Yi)與圓心(原點)距離的平方和作為判斷準則。

3、以 COUNTIF 指令計算落在 A 區的個數。

4、收集實驗數據並以 SUM、AVERAGE、PERCENTILE 指令輔助推算及分析圓週率 π 的近似值。

每當實驗次數增加為原來的十倍時，實驗數據將會增加一個有效位數，所以我們每逢實驗十次、百次、千次…皆統計 π 的近似值。我們先後共試驗 10000 次，每次實驗為 100000

個亂數數對，也就是我們共取了 10^9 個亂數數對。由於實驗數據有 50%會落於第 25 個百分位數與 第 75 個百分位數之間，所以我們定義實驗數據的逼近區間與逼近區間範圍如下：

逼近區間 K(a,b)：a 代表每 K 次實驗的數據所得數列的第 25 個百分位數

b 代表每 K 次實驗的數據所得數列的第 75 個百分位數

逼近區間長度： b-a

若逼近區間長度隨實驗次數增加而逐漸縮小，則可判定所得數據逐漸趨近某數，我們將實驗所得數據進行分析，並觀察所得數據是否趨近某數的情形。結果發現，逼近區間長度果然逐漸縮小了：

每 10^5 次爲一組計算 π 的近似值，所得 10000 組資料，其逼近區間爲 10^5(3.13824, 3.14500)

每 10^6 次爲一組計算 π 的近似值，所得 1000 組資料，其逼近區間爲 10^6(3.140503, 3.142716)

每 10^7 次爲一組計算 π 的近似值，所得 100 組資料，其逼近區間爲 10^7(3.1413772, 3.1419273)

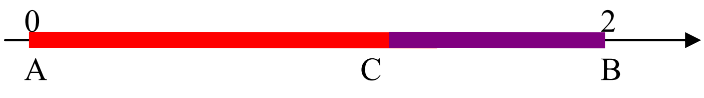
每 10^8 次爲一組計算 π 的近似值，所得 10 組資料，其逼近區間爲 10^8(3.14157166, 3.14168374)

逼近區間的長度變化爲 0.00676, 0.002213, 0.00055, 0.00010842

全部 10^9 個亂數數對所得數據 π 的近似值爲 3.141607304 ，由逼近區間得知準確位數爲小數點後第三位。我們只要繼續實驗，將可逐漸縮短逼近區間而算出 π 的近似值。我們終於成功地找出計算 π 的近似值的方法了。

三、進入機率世界一窺無理數的面目

我們迫不及待地想知道，其它的無理數的進似值是否也可以同樣的方法來估算呢？我們以下列步驟進行實驗，來計算 $\overline{AC}=\sqrt{2}$ 的近似值。(程式見附件(二))



1、 以 RAND 指令取亂數點(Xi)，其中 0<Xi<2，則每一個數對(X)皆落在數線上的區間 $\overline{AB}$ 中。

2、 考量試算表範圍限制及電腦計算速度我們每次實驗的次數爲 100000 次，也就是每次實驗的 i 範圍爲 $1 \leqq i \leqq 100000$。

3、 計算每個數點(Xi)的平方作爲判斷準則。

4、 以 COUNTIF 指令計算落在 $\overline{AC}$ 上的個數。

5、 收集實驗數據並以 SUM、AVERAGE、 PERCENTILE 指令輔助推算 及分析 $\sqrt{2}$ 的近似值。

我們先後共試驗 1000 次，也就是取了 10^8 個亂數點，由實驗數據推算出其 10^5 次、10^6 次、10^7 次逼近區間分別爲：

10^5(1.412195, 1.41636)、10^6(1.413600, 1.414960) 、10^7(1.4141341, 1.4144504)

其逼近區間長度變化爲 0.004165,0.00136,0.000316 由此可知 $\sqrt{2}$ ≒1.41426008，準確位數爲小數點後第三位。

我們以同樣的方法實驗得到以下無理數的近似值分別爲：

$\sqrt[3]{2}$ 的逼近區間分別爲：

10^5(1.257855, 1.26216)、10^6(1.259191, 1.260572) 、10^7(1.2597889, 1.2600610)

其逼近區間長度變化爲 0.004305,0.001381, 0.000272 由此可知 $\sqrt[3]{2}$ ≒1.25992866 準確位數爲小數點後第三位。

$\sqrt[4]{2}$ 的逼近區間分別爲：

10^5(1.18702, 1.19138)、10^6(1.188450, 1.189709) 、10^7(1.1889764, 1.1892948)

其逼近區間長度變化爲 0.00436, 0.001259, 0.000318 由此可知 $\sqrt[4]{2}$ ≒1.18918404 準確位數爲小數點後第二位。

$\sqrt{3}$ 的逼近區間分別爲：

10^5(1.72884, 1.73487)、10^6(1.730828, 1.732889) 、10^7(1.7316302, 1.7321925)

其逼近區間長度變化爲 0.00603, 0.002061 , 0.000562 由此可知 $\sqrt{3}$ ≒1.73195133 準確位數爲小數點後第二位。

$\sqrt[3]{3}$ 的逼近區間分別爲：

10^5(1.43742, 1.44711)、10^6(1.440467,1.444255) 、10^7(1.4421296,1.4427687)

其逼近區間長度變化爲 0.00969, 0.003788 , 0.000639 由此可知 $\sqrt[3]{3}$ ≒1.44236028 準確位數爲小數點後第三位。

$\sqrt[4]{3}$ 的逼近區間分別爲：

10^5(131130, 132117)、10^6(1314555, 1317806) 、10^7(13160800, 13164759)

其逼近區間長度變化為 0.00987, 0.003251, 0.000396 由此可知$\sqrt[4]{3}\fallingdotseq$1.31623044 準確位數為小數點後第三位。

陸、研究結果

一、我們透過射飛鏢及灑黑豆的機率實驗，了解到「隨機取樣」在機率實驗中的重要性。

二、我們透過解析幾何的方式，將樣本空間以座標的形式呈現，並以亂數製造成功地隨機點。

三、我們定義逼近區間為實驗數據的 K(第 25 個百分位數,第 75 個百分位數),用來表示每實驗 K 次的結果有 50%的機率會落在逼近區間。

四、我們計算並分析實驗所得數據發現，逼近區間隨著實驗次數增加而逐漸縮小，也就是隨實驗次數增加，π 的近似值逐漸逼近到某數值。我們共製造了 10^9 個亂數數對，由所得數據分析 π 的近似值為 3.141607304。

五、我們以同樣的方法實驗得到以下無理數的近似值分別為：

$\sqrt{2}\fallingdotseq$1.41426008 準確位數為小數點後第三位

$\sqrt[3]{2}\fallingdotseq$1.25992866 準確位數為小數點後第三位

$\sqrt[4]{2}\fallingdotseq$1.18918404 準確位數為小數點後第二位

$\sqrt{3}\fallingdotseq$1.73195133 準確位數為小數點後第二位

$\sqrt[3]{3}\fallingdotseq$1.44236028 準確位數為小數點後第三位

$\sqrt[4]{3}\fallingdotseq$1.31623044 準確位數為小數點後第三位

我們的實驗有一些優點：不管是幾何法或解析法，π 的逼近大都需借助其他無理數的輔助；幾何法常需利用三角函數；解析法所使用的級數也常需利用方根。然而我們的方法完全不依賴其他無理數。

此外，我們面臨的挑戰主要來自 EXCEL 的程式的限制，一是速度慢，一是需人工操作，我們若有能力以寫程式語言的方式來修正我們的實驗，想必能和解析一較高下。

柒、討論

無理數的世界實在太有趣了， 畢達哥拉斯若有幸深入探索無理數的世界，想必會深深後悔處死了發現無理數的功臣希帕索斯吧。我們上網搜尋了更多無理數的訊息之後發覺，還有許多常見的無理數，包括對數 $\log^2$、六個三角函數、自然指數 e (代表一個衰退或提升的速度)…等。除此，無理數更以神秘的面貌存在著：

1、我們不知道對於所以非零整數 m 及 n，$m\pi + ne$ 是否為無理數。

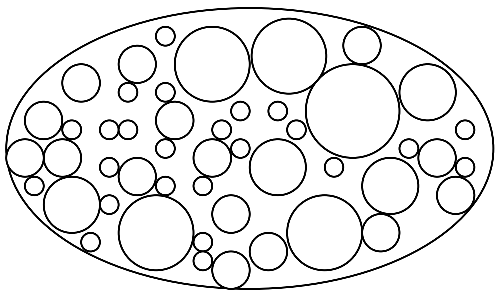
2、我們亦不知道 2^e, π^e, $\pi^{\sqrt{2}}$ 或 γ (Euler-Mascheroni gamma constant)是否為無理數。

3、兩個無理數的相乘或相除可能變成有理數→ $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=6$、$\sqrt{12}\div\sqrt{3}=2$。

4、無理數幾乎無所不在。存在於不規則圖形的面積、周長、體積，也存在於規則圖形如任意三角形、圓及橢圓的面積與周長、球及圓錐與圓柱的體積。

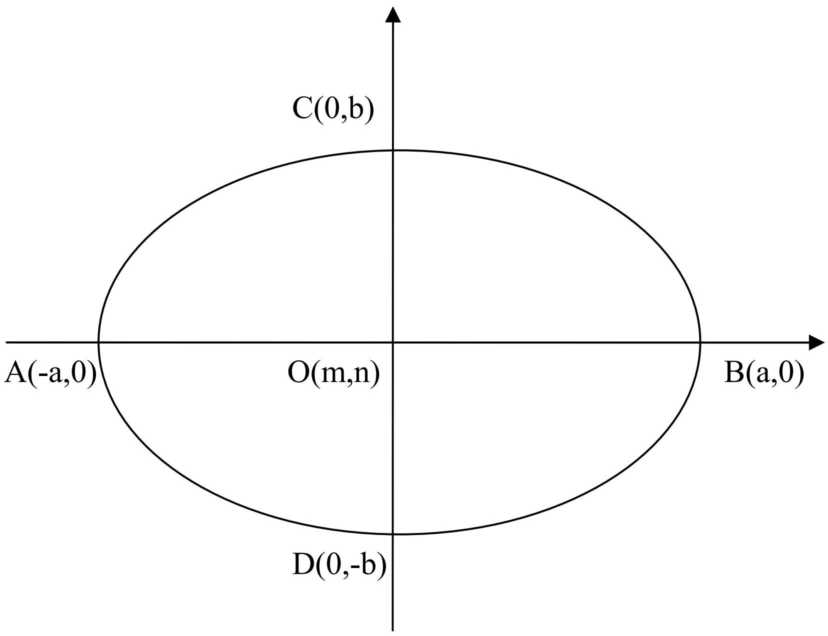
以上搜尋與觀察給我們一些靈感，或許我們可以在橢圓內部或外部作一個圓，透過實驗方式來推算橢圓與圓的面積比，進而推算橢圓的面積吧。或許我們也可以在透過實驗來計算球體及圓錐的體積吧。於是我們進行了以下實驗：

一、本是同根生，無理何太急→橢圓與圓



我們原始的想法是，橢圓的面積似乎可以由大大小小的圓所完全覆蓋，所以橢圓的面積應該是 π 的實數倍，也就是橢圓的面積=mπ (其中 m 是實數)，所以我們只要將該實數計算出來便可以得到橢圓的面積了。

我們查出橢圓的方程式為 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$ ，與圖形的關係如下：



其中 O 稱作中心，$\overline{AB}$ 稱作長軸其長度爲 2a，$\overline{CD}$ 稱作短軸其長度爲 2b，而橢圓內部的點滿足 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}<1$ 。

於是我們以下列步驟進行實驗(程式見附件(二))：

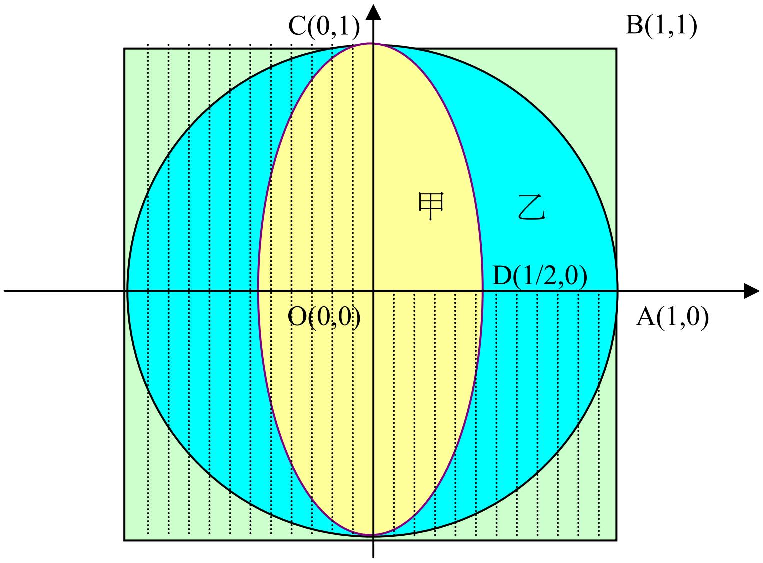
1、以 RAND 指令取亂數數對(Xi,Yi)，其中 0<Xi<1，0<Yi<1，則每一個數對(Xi,Yi)皆落在第一象限的正方形區域。考量試算表範圍限制及電腦計算速度我們每次實驗的次數爲 100000 次，也就是每次實驗的 i 範圍爲 1 ≦ i ≦ 100000。

2、計算每個數對(Xi,Yi)與圓心(原點)距離的平方和以及 4* Xi^2+Yi^2 作爲判斷準則。

3、以 COUNTIF 指令計算落在橢圓內部與圓內部的亂數點個數。

4、收集實驗數據並以 SUM、AVERAGE、PERCENTILE 指令輔助推算及分析橢圓內部與圓內部的亂數點個數的比值。

隨著次數不斷增加，我們察覺每一次的實驗結果(100000 個亂數點)，落在橢圓內部的亂數點個數似乎都是落在圓內部的亂數點個數的一半。也就是落在甲區與乙區的亂數點個數約略相同，也就是甲區、乙區的面積約略相等。想要驗證甲的面積等於乙區的面積相當於驗證甲區的面積與乙區的面積的比值等於 1，所以我們定義甲區的面積與乙區的面積的比值爲 X，X=1 的充要條件是 X 與 X 的倒數差距趨近於 0，也就是｜X-$\frac{1}{X}$｜趨近於 0。



我們先後共取了 10^9 個亂數點，由實驗數據推算出｜$X-\frac{1}{X}$｜的 10^5 次、10^6 次、10^7 次、10^8 次逼近區間分別為：

10^5(-0.00845519, 0.008113728)、10^6(-0.002826529, 0.00246185) 、

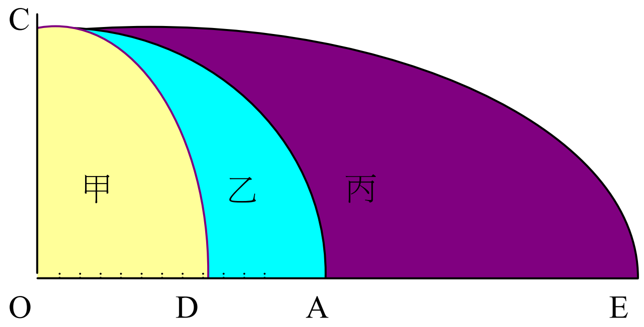
10^7(-0.000792217, 0.000258465)、10^8(-0.000558181, 0.000117996)

其逼近區間長度變化為 0.016568918, 0.005288379, 0.001050682 , 0.000676177。其平均值為 0.00017。

由實驗結果的分析顯示，｜$X-\frac{1}{X}$｜的值隨實驗次數增加而逐漸趨近於 0 。這說明甲區的面積與乙區的面積的比值等於 1。結果顯示實驗中的橢圓的面積恰為圓的面積的一半，圓與橢圓真是一家親呀！由於圓的面積為 π ,可推得橢圓的面積為 $\frac{\pi}{2}$ 。

我們進一步思考，橢圓的面積與橢圓的長短軸有關係嗎？若我們把圓當成長軸與短軸等長的橢圓，那麼圓的面積為 $\overline{OC}\times\overline{OA}\times\pi$ ，我們察覺到實驗中的橢圓面積恰為 $\overline{OC}\times\overline{OD}\times\pi$ ，也就是 $\frac{1}{4}\times$長軸$\times$短軸$\times\pi$ 。

橢圓面積是否為 $\frac{1}{4}\times$長軸$\times$短軸$\times\pi$ 呢？這個問題可轉換成，當短軸的長度固定時，橢圓的面積是否與長軸的長度成正比呢？我們重新設計實驗來檢驗該臆測。



$\overline{OD}$ ： $\overline{OA}$ ： $\overline{OE}$ =2:3:6
亦即 $\overline{OD}$ ： $\overline{DA}$ ： $\overline{AE}$ =2:1:3

當 $\overline{OD}$ ： $\overline{DA}$ ： $\overline{AE}$ =2:1:3 時，甲區的面積：乙區的面積：丙區的面積是否也是 2:1:3 呢？ 我們以類似的方法先後共取了 $2*10^8$ 個亂數點，所得累計次數如下：

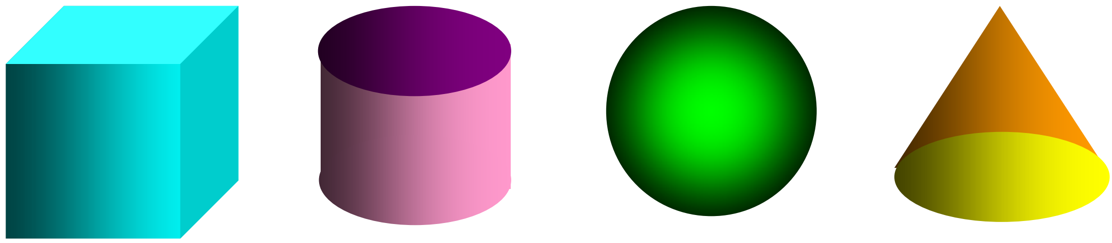
亂數點落點區 ＼ 亂數點累積次數	甲區	乙區	丙區	甲、乙、丙三區的比(四捨五入至小數第二位)
10^5 次	26138 次	13052 次	39469 次	2.00 :1.00 :3.02
10^6 次	261644 次	129757 次	393364 次	2.02 :1.00 :3.03
10^7 次	2618518 次	1307378 次	3926959 次	2.00 :1.00 :3.00
10^8 次	26181200 次	13084704 次	39269747 次	2.00 :1.00 :3.00
$2*10^8$ 次	52355162 次	26171217 次	78542911 次	2.00 :1.00 :3.00

由此推知當短軸的長度固定時，橢圓的面積與長軸的長度成正比，也就是

$$\text{橢圓面積爲}\frac{1}{4}\times\text{長軸}\times\text{短軸}\times\pi$$

二、存在正立方體中的秘密→圓柱、圓錐、球

我們發現半徑爲 1、高度爲 2 的圓柱體；半徑爲 1 的球體；以及底圓半徑爲 1、高度爲 2 的圓錐，正好內切於長、寬、高皆爲 2 的正立方體內部。如果我們把隨機點擴充到 3D 圖形中，是否能因此計算 3D 圖形的無理數→圓柱、球體及圓錐的體積呢？



在 3D 空間中，我們以正立方體爲樣本空間進行隨機實驗，再以程式判定每個亂數點的落點。並計算落在各圖形內部的亂數點個數。由於所有亂數點皆是正數，所以我們捨棄 XY 平面下方的亂數點(Z 座標爲正數)。我們同時捨棄形如(＋,－, ＋)、(－,－, ＋)、(－, ＋, ＋)的亂數點。也就是我們的樣本空間實際上是正立方體的四分之一。

我們將球心的座標定位於 Z 軸正向的 (0,1,0)，亂數點在上述圖形中分布情形的判定方法分析如下(程式見附件(二))：

立方體：$A=\{(X,Y,Z) \mid 0\leqq X\leqq 1，0\leqq Y\leqq 1，0\leqq Z\leqq 2\}$

圓　柱：$B=\{(X,Y,Z) \mid (X,Y,Z)\in A，X^2+Y^2<1\}$

球　體：$C=\{(X,Y,Z) \mid (X,Y,Z)\in A，X^2+Y^2+(Z-1)^2<1\}$

圓　錐：$D=\{(X,Y,Z) \mid (X,Y,Z)\in A，X^2+Y^2-\left(1-\frac{Z}{2}\right)^2<0\}$

我們先後共取了 $4*10^8$ 個亂數點，計算其落點，所得累計次數如下：

亂數點落點區 ＼ 亂數點累積次數	圓柱	球體	圓錐	圓柱、球體、圓錐三區的亂數點個數比(四捨五入至小數第二位)
10^5次	78631	52476	26141	3.01 :2.01 :1.00
10^6次	785817	523127	261988	3.00 :2.00 :1.00
10^7次	7854102	5234883	2618006	3.00 :2.00 :1.00
10^8次	78541563	52358167	26178781	3.00 :2.00 :1.00
$4*10^8$次	314157462	209359763	104776765	3.00 :2.00 :1.00

實驗的結果著實令我們感到意外，落在正立方體內最大圓柱、球體、圓錐內部的亂數點個數比爲 3:2:1。也就是正方體內切球的體積恰爲正方體最大圓柱體積的$\frac{2}{3}$，而正方體內最大圓柱的體積恰爲正方體最大圓柱體積的$\frac{1}{3}$。若正立方體的邊長爲 2r，可推得正立方體內最大圓柱的體積爲 $2r^3\pi$，所以我們推得

邊長爲 2r 的正立方體內部

最大圓柱體積爲 $2r^3\pi$

內切球體體積爲$\frac{4}{3}r^3\pi$

最大圓錐體積爲$\frac{2}{3}r^3\pi$

我們附帶得知

半徑爲 r 的球體體積爲$\frac{4}{3}r^3\pi$

三、當無理數碰到機率

當無理數碰到機率時，似乎漸漸褪去神秘的色彩，我們發覺還有一些值得深入探討的問題：

1、若我們以極座標來取亂數點，則所有亂數點所形成的樣本空間恰爲一個圓，圓周上取兩夾角爲 θ 的半徑形成一個頂角爲 θ，腰長爲半徑的等腰三角形，我們若能判定隨機點是否落在等腰三角形內部，我們就能實驗出三角函數 Sinθ 的近似值。

2、$10^0=1$，$10^1=10$，$10^x=2$ 時，x 大約是多少呢？那麼給定亂數 x，我們應該能夠計算10^x並估算對數值。如此一來便可以製作對數表。

3、圓周率似乎比方根還無理，因爲我們發覺方根的逼近速度比圓周率還要快，是什麼原因呢？我們可以進一步探討無理數逼近速度及準確性。

捌、結論

我們以 EXCEL 製造亂數點，並透過解析幾何的方式進行隨機實驗以計算無理數的近似值，我們將我們研究所得結論歸納如下：

一、我們以隨機實驗成功地計算出無理數的近似值：

$\pi \fallingdotseq 3.141607304$ 準確位數爲小數點後第三位。

$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41426008$ 準確位數爲小數點後第三位。

$\sqrt[3]{2} \fallingdotseq 1.25992866$ 準確位數爲小數點後第三位。

$\sqrt[4]{2} \fallingdotseq 1.18918404$ 準確位數爲小數點後第二位。

$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73195133$ 準確位數爲小數點後第二位。

$\sqrt[3]{3} \fallingdotseq 1.44236028$ 準確位數爲小數點後第三位。

$\sqrt[4]{3} \fallingdotseq 1.31623044$ 準確位數爲小數點後第三位。

二、我們固定橢圓短軸，透過實驗計算橢圓面積發現：橢圓短軸固定時， 橢圓面積與長軸長度成正比。進一步推得橢圓面積爲 $\frac{1}{4}$ ×長軸×短軸× π 。

三、我們實驗發現邊長爲 2r 的正立方體最大圓柱、球體、圓錐體積比爲 3:2:1。並進一步推得半徑爲 r 的球體體積爲 $\frac{4}{3}r^3\pi$

四、我們發現幾個可以再深入探討的主題：

1. 三角函數 Sinθ 的近似值。
2. 對數表的製作。
3. 無理數逼近速度及準確性的探討。

玖、參考資料及其他

三、參考資料

（一）淡江大學數學系→數學天地

http://www.math.tku.edu.tw/chinese/index.htm

（一）畢達哥拉斯

http://www.chhs.tp.edu.tw/teacher/083/mathweb/mathers/Pythagoras.htm

（二）無理數

http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%97%A0%E7%90%86%E6%95%B0

二、附件

（一）樣本空間及事件的亂數點分析表

	樣本空間	事件
π	A=｛(X,Y)｜0≦X≦1，0≦Y≦1｝	｛(X,Y)｜(X,Y)∈A，$X^2+Y^2<1$｝
$\sqrt{2}$	A=｛X｜0≦X≦2｝	｛X｜X∈A，$X^2<2$｝
$\sqrt[3]{2}$	A=｛X｜0≦X≦2｝	｛X｜X∈A，$X^3<2$｝
$\sqrt[4]{2}$	A=｛X｜0≦X≦2｝	｛X｜X∈A，$X^4<2$｝
$\sqrt{3}$	A=｛X｜0≦X≦3｝	｛X｜X∈A，$X^2<3$｝
$\sqrt[3]{3}$	A=｛X｜0≦X≦3｝	｛X｜X∈A，$X^3<3$｝
$\sqrt[4]{3}$	A=｛X｜0≦X≦3｝	｛X｜X∈A，$X^4<3$｝
橢圓	A=｛(X,Y)｜0≦X≦1，0≦Y≦1｝	｛(X,Y)｜(X,Y)∈A，$4X^2+Y^2<1$｝
圓柱	A=｛(X,Y,Z)｜0≦X≦1，0≦Y≦1，0≦Z≦2｝	｛(X,Y,Z)｜(X,Y,Z)∈A，$X^2+Y^2<1$｝
球體	A=｛(X,Y,Z)｜0≦X≦1，0≦Y≦1，0≦Z≦2｝	｛(X,Y,Z)｜(X,Y,Z)∈A，$X^2+Y^2+(Z-1)^2<1$｝
圓錐	A=｛(X,Y,Z)｜0≦X≦1，0≦Y≦1，0≦Z≦2｝	｛(X,Y,Z)｜(X,Y,Z)∈A，$X^2+Y^2-\left(1-\frac{Z}{2}\right)^2<0$｝

（二）EXCEL 公式

	亂數點			判定法	事件個數計算
	A	B	C	D	E
π	=rand()	=rand()		=A1^2+B1^2	=countif(D1:D100000,”<1”)
$\sqrt{2}$	=rand()*2			=A1^2	=countif(D1:D100000,”<2”)
$\sqrt[3]{2}$	=rand()*2			=A1^3	=countif(D1:D100000,”<2”)
$\sqrt[4]{2}$	=rand()*2			=A1^4	=countif(D1:D100000,”<2”)
$\sqrt{3}$	=rand()*3			=A1^2	=countif(D1:D100000,”<3”)
$\sqrt[3]{3}$	=rand()*3			=A1^3	=countif(D1:D100000,”<3”)
$\sqrt[4]{3}$	=rand()*3			=A1^4	=countif(D1:D100000,”<3”)
橢圓	=rand()	=rand()		=4*A1^2+B1^2	=countif(D1:D100000,”<1”)
圓柱	=rand()	=rand()	=rand()*2	=A1^2+B1^2	=countif(D1:D100000,”<1”)
球體	=rand()	=rand()	=rand()*2	= A1^2+B1^2 +(C1-1)^2	=countif(D1:D100000,”<1”)
圓錐	=rand()	=rand()	=rand()*2	= A1^2+B1^2 -(1-C1/2)^2	=countif(D1:D100000,”<0”)

030410 ~