030412

Magic Poker

Magic Poker

研 究 摘 要

利用撲克牌變魔術是這次的研究主題，先選出一張牌【以下稱**目標牌**】，然後將它和其他牌混合，再依順序排列，重複幾次，**目標牌**會出現在固定的張序中，試著找出規律。【遊戲玩法詳見本報告：肆、研究過程與方法】

依據不同的張數、堆數和疊合方式，**目標牌**會在不同的回合、張序中，這次的實驗就是要找出這些數據和規律。

壹、研究動機：

有一次在學務處幫忙事情，突然有一個大哥哥來洽公，在辦理的時候他看到我們在談論有關魔術的事，就要了一副撲克牌耍了一個小魔術，之後他教了我們方法，好奇的我們就想研究一下其中的奧妙，而且運用國一數學學過的數量關係單元的知識，以及現在國二正在學的二元一次聯立方程式的技巧，將相關數據的關係整理出來，於是這篇報告就產生了。

貳、研究目的：

一、找出這個撲克牌魔術**目標牌**出現的規則（回合數、張序），並更改張數（3 的倍數、5 的倍數）、堆數（3 堆、5 堆）找出其規律。

二、更改放置**目標牌**那一疊放入的順序〈原本是放在中間，現在換放在別堆〉，找出其規律。

參、研究設備與器材：

撲克牌、紙和筆、五個臭皮匠似的頭腦。

肆、研究過程與方法：

一、此撲克牌的玩法如下：

分 3 堆：表演者先從一副撲克牌中任意拿 21 張撲克牌，請一位觀眾選定一張牌（**目標牌**，只有觀眾知道花色和數字並記住），之後表演者將**目標牌**混入牌堆中洗勻，接著按順序發牌分成 3 疊每疊 7 張（正面朝上），並請觀眾確認**目標牌**在哪一疊，將含有**目標牌**的那疊放在 3 疊的中間依序疊合將牌收攏，以上稱爲一回合，重複三回合後就能準確找出**目標牌**（收攏後依序發到第 11 張就是答案）。實際操作，經過三回合後，都可找出**目標牌**，現場觀眾驚呼連連。

二、快速的數據產出方法：

總共有 n 張牌分成 3 疊或 5 疊，每一疊有 x 張（$x=\frac{n}{3}$或$\frac{n}{5}$），**目標牌**的位置在第 y 疊（由左而右依序爲 1~3 或 1~5），**目標牌**的位置在該疊由下往上數的第 z 張，則最後**目標牌**在第$k=x(y-1)+z$張，經過幾回合之後，k 會固定不變。

伍、研究結果：

一、原遊戲條件的分析

我們想知道爲什麼原遊戲一定要重複發牌的動作三次?如果張數不同，所需回合數就不同嗎?所以我們把所有的結果都列出來：

〈一〉牌數爲 3 的奇數倍

張數（n）	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93
所需回合數	1	2	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5
最後在第 k 張牌	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47

規　律：經過所需的回合數之後，**目標牌**落在第幾張牌（k）跟牌的張數（n）有關。

若有 n 張牌（ $n=3\times(2m-1)$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{n+1}{2}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$　$\begin{cases}3a+b=2\\9a+b=5\end{cases}$　解得 $a=\dfrac{1}{2}$ 、 $b=\dfrac{1}{2}$　所以 $k=\dfrac{n+1}{2}$

〈二〉牌數爲 3 的偶數倍

張數（n）	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96
所需回合數	2	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5
最後在第 k 張牌	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48

規　律：若有 n 張牌（ $n=3\times2m$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{n}{2}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$　$\begin{cases}6a+b=3\\12a+b=6\end{cases}$　解得 $a=\dfrac{1}{2}$ 、 $b=0$　所以 $k=\dfrac{n}{2}$

二、改變條件的分析

我們嘗試把放置**目標牌**的那一疊撲克牌放在收攏動作的第一疊或第三疊。

〈一〉放在第一疊：

1. 牌數爲 3 的奇數倍

張數（n）	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93
所需回合數	1	2	3	4	3	4	5	5	5	4	5	4	5	4	5	4
最後在第 k 張牌	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24

規律一：若有 n 張牌（ $n=3\times(4m-3)$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{n+1}{4}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$ $\begin{cases}3a+b=1\\15a+b=4\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{4}$ 、 $b=\dfrac{1}{4}$ 所以 $k=\dfrac{n+1}{4}$

規律二：若有 n 張牌（ $n=3\times(4m-1)$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{n+3}{4}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$ $\begin{cases}9a+b=3\\21a+b=6\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{4}$ 、 $b=\dfrac{3}{4}$ 所以 $k=\dfrac{n+3}{4}$

2. 牌數爲 3 的偶數倍

張數（n）	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96
所需回合數	2	2	2		3		3		3		4		4		4	
最後在第 k 張牌	2	3.4 循環	5	6.7 循環	8	9.10 循環	11	12.13 循環	14	15.16 循環	17	18.19 循環	20	21.22 循環	23	24.25 循環

規律一：若有 n 張牌（ $n=3\times(4m-2)$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{n+2}{4}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$ $\begin{cases}6a+b=2\\18a+b=5\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{4}$ 、 $b=\dfrac{2}{4}$ 所以 $k=\dfrac{n+2}{4}$

規律二（循環）：若有 n 張牌（ $n=3\times 4m$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**在

第 $\dfrac{n}{4}$ 與 $\dfrac{n}{4}$ ＋1 張循環。

〈二〉放在第三疊

1. 牌數爲 3 的奇數倍

張數（n）	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93
所需回合數	1	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5
最後在第 k 張牌	3	7	12	16	21	25	30	34	39	43	48	52	57	61	66	70

規律一：若有 n 張牌（ $n=3\times(4m-3)$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{3n+3}{4}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$ $\begin{cases}3a+b=3\\15a+b=12\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{3}{4}$ 、 $b=\dfrac{3}{4}$ 所以 $k=\dfrac{3n+3}{4}$

規律二：若有 n 張牌（ $n = 3\times(4m-1)$ ，m 為正整數），最後**目標牌**落在第 $k = \dfrac{3n+1}{4}$ 張。

演算過程：設 $k = an + b$ $\begin{cases} 9a+b=7 \\ 21a+b=16 \end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{3}{4}$ 、 $b=\dfrac{1}{4}$ 所以 $k=\dfrac{3n+1}{4}$

2. 牌數為 3 的偶數倍

張數（n）	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96
所需回合數	2		3		3		4		5		5		5		5	
最後在第 k 張牌	5	9.10 循環	14	18.19 循環	23	27.28 循環	32	36.37 循環	41	45.46 循環	50	54.55 循環	59	63.64 循環	68	72.73 循環

規律一：若有 n 張牌（ $n = 3\times(4m-2)$ ，m 為正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{3n+2}{4}$ 張。

演算過程：設 $k = an + b$ $\begin{cases} 6a+b=5 \\ 18a+b=14 \end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{3}{4}$ 、 $b=\dfrac{2}{4}$ 所以 $k=\dfrac{3n+2}{4}$

規律二（循環）：若有 n 張牌（ $n = 3\times 4m$ ，m 為正整數），最後**目標牌**在

第 $\dfrac{3n}{4}$ 與 $\dfrac{3n}{4}$ ＋1 張循環。

三、5 的倍數張牌原條件分析

我們突發奇想，原本是 3 的倍數張牌，如果換成 5 的倍數張牌不知會不會也有規律？

〈一〉牌數為 5 的奇數倍

張數（n）	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
所需回合數	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
最後在第 k 張牌	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48

規　　律：若有 n 張牌（ $n = 5\times(2m-1)$ ，m 為正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{n+1}{2}$ 張。

演算過程：設 $k = an + b$ $\begin{cases} 5a+b=3 \\ 15a+b=8 \end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{2}$ 、 $b=\dfrac{1}{2}$ 所以 $k=\dfrac{n+1}{2}$

〈二〉牌數為 5 的偶數倍

張數（n）	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
所需回合數	2.3	2.3	3.4	2.3	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4
最後在第 k 張牌	5.6 循環	10.11 循環	15.16 循環	20.21 循環	25.26 循環	30.31 循環	35.36 循環	40.41 循環	45.46 循環	50.51 循環

規　　律（循環）：若有 n 張牌（ $n=5\times 2m$ ，m 為正整數），最後**目標牌**在

第 $\frac{n}{2}$ 與 $\frac{n}{2}$ ＋1 張循環。

四、5 的倍數張牌改變條件分析

跟 3 的倍數張牌一樣，改變堆疊的順序，將放置**目標牌**的那一疊放在第一、二、四、五疊試試看。

〈一〉放在第一疊，牌數為 5 的倍數

張數（n）	5	10	15	20	25	30	35	40	45
所需回合	2	2	3	3	3	2.3	2	2	2
答案在第 k 張牌	1	2	3	4	5	5.6 循環	6	7	8

張數（n）	50	55	60	65	70	75	80	85	90
所需回合	2	4	2.3	3	3	3	3	3	2.3
答案在第 k 張牌	9	10	10.11 循環	11	12	13	14	15	15.16 循環

張數（n）	95	100
所需回合	3	3
答案在第 k 張牌	16	17

規律一：若有 n 張牌（ $n=5\times m$ ，m 為正整數），且 $\frac{n}{30}=a$.........餘 b ，最後**目標牌**在

第 $k=\frac{n}{5}-a$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$　　$\begin{cases}5a+b=1\\10a+b=2\end{cases}$　　解得 $a=\frac{1}{5}$ 、 $b=0$　　所以 $k=\frac{n}{5}$

但每增加 30 張會遇到循環，遇到一次循環 k 要減 1，n 張會遇到 $\frac{n}{30}=a$.........餘 b

a 次循環（餘數不影響），所以修正 $k=\frac{n}{5}-a$ 。

規律二（循環）：若有 n 張牌（ $n=5\times 6m$ ，m 為正整數），最後**目標牌**在

第 $\frac{n}{6}$ 與 $\frac{n}{6}$ ＋1 張循環。

〈二〉放在第二疊，牌數爲 5 的倍數

張數（n）	5	10	15	20	25	30	35
所需回合數	1	2		3	3		3
最後在第 k 張	2	4	5.6 循環	7	9	10.11 循環	12

張數（n）	40	45	50	55	60	65	70
所需回合數	3		4	4		4	4
最後在第 k 張	14	15.16 循環	17	19	20.21 循環	22	24

張數（n）	75	80	85	90	95	100
所需回合數		4	4		4	4
最後在第 k 張牌	25.26 循環	27	29	30.31 循環	32	34

規律一：若有 n 張牌（ $n=5\times(3m-2)$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{n+1}{3}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$ $\begin{cases}5a+b=2\\20a+b=7\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{3}$ 、 $b=\dfrac{1}{3}$ 所以 $k=\dfrac{n+1}{3}$

規律二：若有 n 張牌（ $n=5\times(3m-1)$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\dfrac{n+2}{3}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$ $\begin{cases}10a+b=4\\25a+b=9\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{3}$ 、 $b=\dfrac{2}{3}$ 所以 $k=\dfrac{n+2}{3}$

規律三（循環）：若有 n 張牌（ $n=5\times3m$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**在

第 $\dfrac{n}{3}$ 與 $\dfrac{n}{3}+1$ 張循環。

〈三〉放在第四疊，牌數爲 5 的倍數

張數（n）	5	10	15	20	25	30	35	40	45
所需回合數	1	2	2.3	3	2	2.3	3	3	3.4
最後在第 k 張牌	4	7	10.11 循環	14	17	20.21 循環	24	27	30.31 循環

張數（n）	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
所需回合數	3	3	3.4	3	4	2.3	3	4	4	3	4
最後在第 k 張牌	34	37	40.41 循環	44	47	50.51 循環	54	57	60.61 循環	64	67

規律一：若有 n 張牌（ $n=5\times(3m-2)$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\frac{2n+2}{3}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$ $\begin{cases}5a+b=4\\20a+b=14\end{cases}$ 解得 $a=\frac{2}{3}$ 、 $b=\frac{2}{3}$ 所以 $k=\frac{2n+2}{3}$

規律二：若有 n 張牌（ $n=5\times(3m-1)$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**落在第 $k=\frac{2n+1}{3}$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$ $\begin{cases}10a+b=7\\25a+b=17\end{cases}$ 解得 $a=\frac{2}{3}$ 、 $b=\frac{1}{3}$ 所以 $k=\frac{2n+1}{3}$

規律三（循環）：若有 n 張牌（ $n=5\times3m$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**在

第 $\frac{2n}{3}$ 與 $\frac{2n}{3}$ ＋1 張循環。

〈四〉放在第五疊，牌數爲 5 的倍數

張數（n）	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
所需回合數	1	2	2	2	2	2.3	3	3	3	3	4	3.4
最後在 第 k 張牌	5	9	13	17	21	25.26 循環	30	34	38	42	46	50.51 循環

張數（n）	65	70	75	80	85	90	95	100
所需回合數	3	3	3	4	4	3.4	3	3
最後在 第 k 張牌	55	59	63	67	71	75.76 循環	80	84

規律一：若有 n 張牌（ $n=5\times m$ ，m 爲正整數），且 $\frac{n}{30}=a$.........餘 b ，最後**目標牌**在

第 $k=\frac{4n+5}{5}+a$ 張。

演算過程：設 $k=an+b$ $\begin{cases}5a+b=5\\10a+b=9\end{cases}$ 解得 $a=\frac{4}{5}$ 、 $b=\frac{5}{5}$ 所以 $k=\frac{4n+5}{5}$

但每增加 30 張會遇到循環，遇到一次循環 k 要加 1，n 張會遇到 $\frac{n}{30}=a$.........餘 b

a 次循環（餘數不影響），所以修正 $k=\frac{4n+5}{5}+a$ 。

規律二（循環）：若有 n 張牌（ $n=5\times6m$ ，m 爲正整數），最後**目標牌**在

第 $\frac{5n}{6}$ 與 $\frac{5n}{6}$ ＋1 張循環。

陸、結論：

一、分析結果製表如下：

（一）牌數爲 3 的倍數

<table>
<tr><th>**目標牌**位置
n 與 k</th><th colspan="2">第一疊</th><th colspan="2">原條件
第二疊</th><th colspan="2">第三疊</th></tr>
<tr><td rowspan="2">n 爲 3 的奇數倍</td><td>$n=3\times(4m-3)$</td><td>$k=\frac{n+1}{4}$</td><td rowspan="2">$n=3\times(2m-1)$</td><td rowspan="2">$k=\frac{n+1}{2}$</td><td>$n=3\times(4m-3)$</td><td>$k=\frac{3n+3}{4}$</td></tr>
<tr><td>$n=3\times(4m-1)$</td><td>$k=\frac{n+3}{4}$</td><td>$n=3\times(4m-1)$</td><td>$k=\frac{3n+1}{4}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n 爲 3 的偶數倍</td><td>$n=3\times(4m-2)$</td><td>$k=\frac{n+2}{4}$</td><td rowspan="2">$n=3\times 2m$</td><td rowspan="2">$k=\frac{n}{2}$</td><td>$n=3\times(4m-2)$</td><td>$k=\frac{3n+2}{4}$</td></tr>
<tr><td>$n=3\times 4m$</td><td>第 $\frac{n}{4}$ 與 $\frac{n}{4}+1$ 張循環</td><td>$n=3\times 4m$</td><td>第 $\frac{3n}{4}$ 與 $\frac{3n}{4}+1$ 張循環</td></tr>
<tr><td>n 爲 3 的倍數（不分）</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

※**目標牌**在第一疊與第三疊的分析結果類似。

（二）牌數爲 5 的倍數

<table>
<tr><th>目標牌位置
n 與 k</th><th colspan="2">第一疊</th><th colspan="2">第二疊</th><th colspan="2">原條件
第三疊</th></tr>
<tr><td>n 爲 5 的奇數倍</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>$n=5\times(2m-1)$</td><td>$k=\frac{n+1}{2}$</td></tr>
<tr><td>n 爲 5 的偶數倍</td><td>$n=5\times 2m$</td><td>第 $\frac{n}{2}$ 與 $\frac{n}{2}+1$ 張循環</td></tr>
<tr><td rowspan="3">n 爲 5 的倍數（不分）</td><td rowspan="2">$n=5\times m$</td><td rowspan="2">$k=\frac{n}{5}-a$
（$\frac{n}{30}=a$.........餘b）</td><td>$n=5\times(3m-2)$</td><td>$k=\frac{n+1}{3}$</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$n=5\times(3m-1)$</td><td>$k=\frac{n+2}{3}$</td></tr>
<tr><td>$n=5\times 6m$</td><td>第 $\frac{n}{6}$ 與 $\frac{n}{6}+1$ 張循環</td><td>$n=5\times 3m$</td><td>第 $\frac{n}{3}$ 與 $\frac{n}{3}+1$ 張循環</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>目標牌位置
n 與 k</th><th colspan="2">第四疊</th><th colspan="2">第五疊</th></tr>
<tr><td>n 爲 5 的奇數倍</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>n 爲 5 的偶數倍</td></tr>
<tr><td rowspan="3">n 爲 5 的倍數（不分）</td><td>$n=5\times(3m-2)$</td><td>$k=\frac{2n+2}{3}$</td><td rowspan="2">$n=5\times m$</td><td rowspan="2">$k=\frac{4n+5}{5}+a$
（$\frac{n}{30}=a$.........餘b）</td></tr>
<tr><td>$n=5\times(3m-1)$</td><td>$k=\frac{2n+1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$n=5\times 3m$</td><td>第 $\frac{2n}{3}$ 與 $\frac{2n}{3}+1$ 張循環</td><td>$n=5\times 6m$</td><td>第 $\frac{5n}{6}$ 與 $\frac{5n}{6}+1$ 張循環</td></tr>
</table>

※**目標牌**在第一疊與第五疊的分析結果類似；而第二疊與第四疊的分析結果也類似。

柒、未來展望（推廣）：

一、本遊戲所使用的是一副 52 張的撲克牌，由於我們實驗的張數超過 52 張，所以遊戲可推廣到超過 52 張的遊戲設計（例如：數字 1~20、花色選 5 種水果，共 100 張牌）。

二、老師告訴我們上高中會學到「矩陣」的數學概念，本試驗規則的推導是否可以應用矩陣的轉換方式，值得深入探討。

捌、參考資料：

一、歷屆科學展覽作品資料。

二、國中數學仁林版第一冊第 4 章數量關係。

三、國中數學仁林版第三冊第 3 章二元一次聯立方程式。