030413

(mod)

## 參、研究目的

一、由 2006 年最初的「規則」來觀察其規律。

二、推導致 2006 年以外其他年份的公式。

三、歸納是否有萬年曆的法則。

1、延伸是否有不同的指法。

2、發展容易記憶的公式。

四、由「萬年曆」中可以找出哪些已經學過的數學特性。

## 肆、研究方法

一、 由最根本的方式開始分析「2006 年」特性。

二、 以實際操作方式，觀察發現「萬年曆」的特性。

三、 蒐集相關文獻並提出疑問。

四、 藉由已知數學概念驗證研究目的。

五、 整理研究結果，對「萬年曆」加以分析並驗證。

# 伍、研究過程

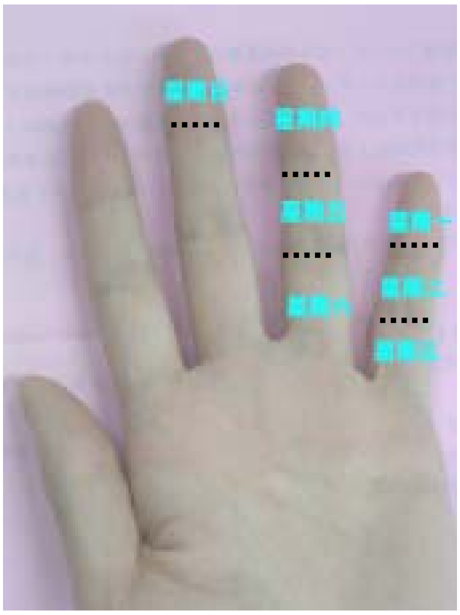
## 指法規則

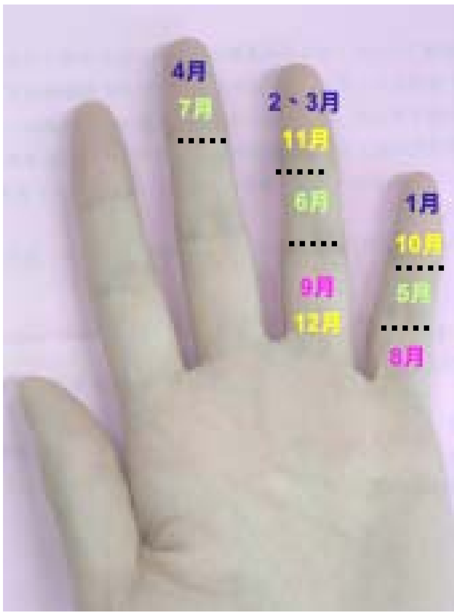
一、 指法分佈：

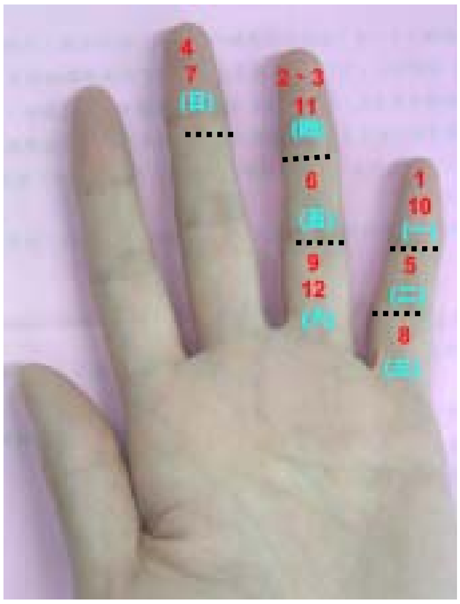
（一）只使用左手小指三個指間、無名指三個指間、中指第一個指間共 7 個指間，由小指指間由上而下依序代表星期一、星期二及星期三，無名指指間由上而下依序爲星期四、星期五、星期六，中指第一個指間代表星期日（如圖一）。

（二）這 7 個指間也各分別代表 1~12 月，如（圖二）分佈，其優點爲第一列依次爲 1、2、3、4 月，第二列爲 5、6 月，7 月較特殊，第三列爲 8、9 月；再一次回到第一行代表 10、11 月，12 月較特殊。

（三）綜合以上星期及月份分佈只需 7 個指間就能代表（圖三）。






圖一　　圖二　　圖三

二、指法說明：

以 2006 年任何一天爲例

1、先確認月份在哪一指間。

2、算出 5 加上日期除以 7 的餘數之和；若和大於或等於 7 則需再除以 7 求出餘數。

3、由月份代表的指間往下數所得的餘數，所數到的指間代表之星期即爲所求。

實例說明

例 1：2006 年 1 月 31 日

1、1 月在小指第 1 指間。

2、31÷7＝4……3 ， 2006 年需加 5

5＋3＝8 ， 8÷7＝1……1

3、由小指第 1 指間往下數 1 格，到達小指第 2 指間代表星期二，

則 2006 年 1 月 31 日爲星期二。

例 2：2006 年 11 月 25 日

1、11 月在無名指第 1 指間。

2、25÷7＝3……4 ， 2006 年需加 5

5＋4＝9 ， 9÷7＝1……2

3、由無名指第 1 指間往下數 2 格，到達無名指第 3 指間代表星期六，

則 2006 年 11 月 25 日爲星期六

## 研究並觀察：

一、研究爲何月份要如此分佈：（先以平年爲研究樣本）

若我們定義某年的 1 月 1 日爲星期一

則 2 月 1 日爲星期四（需加上 1 月份 31 天除以 7 的餘數 3）

則 3 月 1 日爲星期四（需加上 2 月份 28 天除以 7 的餘數 0）

則 4 月 1 日爲星期日（需加上 3 月份 31 天除以 7 的餘數 3）

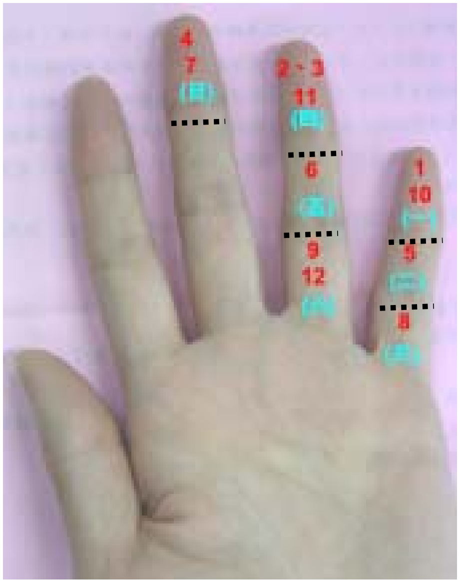
其他月份如表一所示

表一

| 月份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日數 | 31 | 28 | 31 | 30 | 31 | 30 | 31 | 31 | 30 | 31 | 30 | 31 |
| 除以 7 的餘數 | 3 | 0 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| | | | | | | | | | | | | |
| 日期 | 1/1 | 2/1 | 3/1 | 4/1 | 5/1 | 6/1 | 7/1 | 8/1 | 9/1 | 10/1 | 11/1 | 12/1 |
| 星期 | 一 | 四 | 四 | 日 | 二 | 五 | 日 | 三 | 六 | 一 | 四 | 六 |
| 指間 | 小 1 | 無 1 | 無 1 | 中 1 | 小 2 | 無 2 | 中 1 | 小 3 | 無 3 | 小 1 | 無 1 | 無 3 |

註：　小：小指　；　無：無名指　；　中：中指

配合（圖四）可清楚知道爲何月份的分佈原因




圖四

二、研究爲何 2006 年要加 5：

平年 365 天（52 周又 1 天），閏年 366 天（52 周又 2 天），所以每年的某月某日之星期幾跟前一年相同日期之比較，均需要加 1 天，即需往後推一天；但遇到閏年 2 月之後（即 3 月開始）則需加 2 天，因爲閏年 2 月 c 再多 1 天；而 2006 年剛好需加 5，2007 年需加 6，2008 年需加 7（即 0）但 2 月之後（即 3 月開始）需加 1。

三、影響星期因素歸納：

（一）年的因素：2006 年＋5，2007 年＋6，2008 年＋7（即＋0）但 2 月之後（即 3 月開始）＋1，2009 年＋2，2010 年＋3，……，依這樣規則往下推。

（二）月的因素：已由月份分佈抵銷。

（三）日的因素：因爲我們先確定該月 1 日的位置，再利用**〝日除以 7 所得的餘數〞**，往下所數。

因此，我們可以成功推導 2006 年的任何一天。

四、結論：因此由上面的分析我們知道指法分佈的原因，也可以了解指法運用的原理。

## 延伸到其他年

我們可以確定 2006 年＋5，2007 年＋6，2008 年＋7（即＋0）但 2 月之後（即 3 月開始）＋1，但年份非靠近 2006 年，而是 1982 年、2023 年或更遠離 2006 年，年份的影響需加多少，需很慢且花很多時間才能推導出，但我們希望可以找出更快的方法或於其中找出規則。

表二

| 年 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 所加數 | ＋4　＋5 | ＋6 | ＋0 | ＋1 | ＋2　＋3 | ＋4 | ＋5 | ＋6 |
| 年 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
| 所加數 | ＋0　＋1 | ＋2 | ＋3 | ＋4 | ＋5　＋6 | ＋0 | ＋1 | ＋2 |
| 年 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 |
| 所加數 | ＋3　＋4 | ＋5 | ＋6 | ＋0 | ＋1　＋2 | ＋3 | ＋4 | ＋5 |
| 年 | 2024 | 2025 | 2026 | 2027 | 2028 | 2029 | 2030 | 2031 |
| 所加數 | ＋6　＋0 | ＋1 | ＋2 | ＋3 | ＋4　＋5 | ＋6 | ＋0 | ＋1 |
| 年 | 2032 | 2033 | 2034 | 2035 | 2036 | 2037 | 2038 | 2039 |
| 所加數 | ＋2　＋3 | ＋4 | ＋5 | ＋6 | ＋0　＋1 | ＋2 | ＋3 | ＋4 |

一、如上表二，我們知道每年每天的星期受到年份之影響，跟前一年比較，平年＋1，閏年 2 月後（即 3 月開始）＋2。

二、因爲逐年都＋1，但遠離 2006 年如 2032 年受年影響應加多少。

三、推導 1：

## 2000 年以後的年份

（一）我們決定以最好「記憶」及「運算」的 2000 年爲基準。

（二）逐年都＋1，遇到閏年又要再多＋1，所以我們以（ 20xx － 2000）的差，再除以 7 得餘數，這是因爲以 7 爲一個循環；又 4 年一閏需再多＋1，（ 20xx － 2000）÷ 4 取商不理餘數，前者的餘數加上後者的商得到一個和。

（三）簡化：

1、〔（ 20xx － 2000） ÷ 7 取餘數 ＋ （ 20xx － 2000）÷ 4 取商〕÷ 7 取餘數。

2、化簡：

由圖書館的資料知道**同餘**（ mod ）； **高斯符號的意義** ~ 〔k〕爲不大於 k **的最大整數**，

將上列敘述化簡：

$$\{ (20xx - 2000) \equiv x_1 (\text{mod}\,7) + \left[ \frac{20xx-2000}{4} \right] \} \equiv x_2 \ (\text{mod}\,7)$$

$x_1$，$x_2$：**除以 7 的餘數；〔 〕爲高斯符號**

（四）歸納：

1、因爲以 2000 年爲基準，需由 2000 年年影響加 5 再加上上列敘述的餘數。

2、最後得：

$$5 + \{ (20xx - 2000) \equiv x_1 (\text{mod}\,7) + \left[ \frac{20xx-2000}{4} \right] \} \equiv x_2 \ (\text{mod}\,7)$$

3、若上列所得之數若再大於或等於 7，需再 mod 7 一次，最後所得之數即爲 2000 年

之後，年影響所加之數。

（五）實例：

1、 非閏年：

（1） 2025 年查表二需 ＋1

先計算

$$\{ (2025 - 2000) \equiv 4 (\text{mod}\,7) + \left[ \frac{2025-2000}{4} \right] \} \equiv x_2 \ (\text{mod}\,7)$$

$$\{ (2025 - 2000) \equiv 4 (\text{mod}\,7) + 6 \} \equiv 10 \equiv 3 (\text{mod}\,7)$$

再得 $5+3=8$， $8 \equiv 1 (\text{mod}\,7)$ ， ＋1 即爲所求。

（2）2033 年查表二需 ＋4

先計算

$\{ (2033-2000) \equiv 5 \pmod 7 + [\frac{2033-2000}{4}] \} \equiv x_2 \pmod 7$

$\{ (2033-2000) \equiv 5 \pmod 7 + 8 \} \equiv 13 \equiv 6 \pmod 7$

再得　5＋6＝11，　11 ≡ 4（mod 7），＋4 即爲所求。

（3）2038 年查表二需 ＋3

先計算

$\{ (2038-2000) \equiv 3 \pmod 7 + [\frac{2038-2000}{4}] \} \equiv x_2 \pmod 7$

$\{ (2038-2000) \equiv 3 \pmod 7 + 9 \} \equiv 12 \equiv 5 \pmod 7$

再得　5+5＝10　10 ≡ 3（mod 7），＋3 即爲所求。

2、 閏年：

（1） 2020 年查表二爲 ＋1 ＋2

$\{ (2020-2000) \equiv 6 \pmod 7 + [\frac{2020-2000}{4}] \} \equiv x_2 \pmod 7$

$\{ (2020-2000) \equiv 6 \pmod 7 + 5 \} \equiv 13 \equiv 11 \pmod 7$

5+11＝16，　16 ≡ 2（mod 7），＋2 即爲所求（只求出 2 月後之年的影響）。

（2）2028 年查表二需 ＋4 ＋5

$\{ (2028-2000) \equiv 0 \pmod 7 + [\frac{2028-2000}{4}] \} \equiv x_2 \pmod 7$

$\{ (2028-2000) \equiv 0 \pmod 7 + 7 \} \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7$

5+0＝5，　5 ≡ 5（mod 7），＋5 即爲所求（只求出 2 月後之年的影響）。

（3）2032 年查表二需 ＋2 ＋3

$\{(2032-2000) \equiv 4 \pmod 7 + \left[\frac{2032-2000}{4}\right]\} \equiv x_2 \pmod 7$

$\{(2032-2000) \equiv 4 \pmod 7 + 8\} \equiv 12 \equiv 5 \pmod 7$

$5+5=10$， $10 \equiv 3 \pmod 7$ ， +3 即爲所求（只求出 2 月後之年的影響）。

四、推導 2： 2000 年以前的年份

表 三

| 年 | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 所加數 | +5 | +6 | +0 | +1 +2 | +3 | +4 | +5 | +6 +0 |
| 年 | 1969 | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 |
| 所加數 | +1 | +2 | +3 | +4 +5 | +6 | +0 | +1 | +2 +3 |
| 年 | 1977 | 1978 | 1979 | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 | 1984 |
| 所加數 | +4 | +5 | +6 | +0 +1 | +2 | +3 | +4 | +5 +6 |
| 年 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
| 所加數 | +0 | +1 | +2 | +3 +4 | +5 | +6 | +0 | +1 +2 |
| 年 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
| 所加數 | +3 | +4 | +5 | +6 +0 | +1 | +2 | +3 | +4 +5 |

（一）我們決定以一樣最好「記憶」及「運算」的 2000 年爲基準。

（二）依同樣的模式推得

公式：

$\{(2000-19xx) \equiv x_1 \pmod 7 + \left[\frac{2000-19xx}{4}\right]\} \equiv x_2 \pmod 7$

$x_1$，$x_2$：除以 7 的餘數；〔 〕爲高斯符號

（三）歸納：

1、 因爲以 2000 年爲基準，需由 2000 年年影響加 4 往前面推上上列敘述的餘數，

即 4－（上列敘述的餘數）得的差爲該年所受年影響所加數。

2、 最後得：

$$4-\{(2000-19xx)\equiv x_1 (\bmod 7)+[\frac{2000-19xx}{4}]\}\equiv x_2 (\bmod 7)$$

3、若上列所得之數若小於 0，需再 mod 7 一次，最後所得之數即爲 2000 年之前，

年影響所加之數。

（四）實例：

1、非閏年：

（1） 1991 年查表三需 ＋0

先計算

$$\{(2000-1991)\equiv 9 (\bmod 7)+[\frac{2000-1991}{4}]\}\equiv x_2 (\bmod 7)$$

$$\{(2000-1991)\equiv 2 (\bmod 7)+2\}\equiv 4 (\bmod 7)$$

再得 4－4 ＝ 0 ， ＋0 即爲所求。

（2）1983 年查表三需 ＋4

$$\{(2000-1983)\equiv 17 (\bmod 7)+[\frac{2000-1983}{4}]\}\equiv x_2 (\bmod 7)$$

$$\{(2000-1983)\equiv 3 (\bmod 7)+4\}\equiv 7\equiv 0 (\bmod 7)$$

再得 4－0 ＝ 4 ， ＋4 即爲所求。

（3）1973 年查表三需 ＋6

$$\{(2000-1973)\equiv 27 (\bmod 7)+[\frac{2000-1973}{4}]\}\equiv x_2 (\bmod 7)$$

$\{(2000-1973) \equiv 6 \pmod 7 + 7\} \equiv 13 \equiv 5 \pmod 7$

$4-5=-1$，$-1 \equiv 6 \pmod 7$，$+6$ 即爲所求。

2、閏年：

（1）1988 年查表三爲 +3 +4

$$\{(2000-1988) \equiv 12 \pmod 7 + \left[\frac{2000-1988}{4}\right]\} \equiv x_2 \pmod 7$$

$\{(2000-1988) \equiv 5 \pmod 7 + 3\} \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$

$4-1=3$，+3 即爲所求（只求出 2 月前之年的影響）。

（2）1980 年查表三需 +0 +1

$$\{(2000-1980) \equiv 20 \pmod 7 + \left[\frac{2000-1980}{4}\right]\} \equiv x_2 \pmod 7$$

$\{(2000-1980) \equiv 6 \pmod 7 + 5\} \equiv 11 \equiv 4 \pmod 7$

$4-4=0$，+0 即爲所求（只求出 2 月前之年的影響）。

（3）1968 年查表三需 +6 +0

$$\{(2000-1968) \equiv 32 \pmod 7 + \left[\frac{2000-1968}{4}\right]\} \equiv x_2 \pmod 7$$

$\{(2000-1968) \equiv 4 \pmod 7 + 8\} \equiv 12 \equiv 5 \pmod 7$

$4-5=-1$，$-1 \equiv 6 \pmod 7$，+6 即爲所求（只求出 2 月前之年的影響）。

五、總歸納：

（一）2000 年以前

$$4-\{(2000-19xx) \equiv x_1 \pmod 7 + \left[\frac{2000-19xx}{4}\right]\} \equiv x_2 \pmod 7$$

若上列所得之數若小於 0，需再 mod 7 一次，最後所得之數即爲 2000 年之前，年影響所加之數。

（二）2000 年以後

$$5 + \{ (20xx - 2000) \equiv x_1 (\bmod 7) + 〔\frac{20xx-2000}{4}〕\} \equiv x_2 (\bmod 7)$$

若上列所得之數若再大於或等於 7，需再 mod 7 一次，最後所得之數即爲 2000 年之後，年影響所加之數。

# 陸、研究結果

（一）2000 年以前

$$4 - \{ (2000 - 19xx) \equiv x_1 (\bmod 7) + 〔\frac{2000-19xx}{4}〕\} \equiv x_2 (\bmod 7)$$

（二）2000 年以後

$$5 + \{ (20xx - 2000) \equiv x_1 (\bmod 7) + 〔\frac{20xx-2000}{4}〕\} \equiv x_2 (\bmod 7)$$

這公式簡單易懂，又可配合指法輕易地算出某年某月是星期幾。

# 柒、討論

一、此公式最大的優勢是因爲它推導容易，因此到達 3000 年時我們可以再推導一次，並且以 3000 年爲基準，一樣可以達到容易計算容易記憶的特性，而且指法不變，因此這是我們歸納最好的結論。

二、以後其他有循環的現象，相信我們可以以同樣的模式推導出一個易懂易計算的公式

# 捌、參考資料及其他

## 非唯一性

尋找許多資料知道萬年曆的公式並非唯一，每一個都有自己的特色，但經由我們自行歸納的公式較容易記憶，且經手指頭動一動即可一下子算出星期幾。

## 其他公式

1、 HotPower 公式 2004.6.2

萬年某日星期演算法

公式：某日星期幾=(百年%4*5 天+年+年/4+月星期表+日+2 天)%7

2、 S=(X-1)+[(X-1)/4]-[(X-1)/100]+[(X-1)/400]+Y

註：這裏的[S]是高斯函數,S 是它的變數,可以是整型，也可以是實型,[S]意爲取不大於 S 的最大整數

3、 Zeller's 公式

給任何一個格勒哥里曆的日期(1583 年 10 月 15 日以後)，可以算出當日是星期幾。方程式如下：

W={C/4 – 2*C + Y+ Y/4 + [(13*M – 1)/5]+D} Mod7

註解：
- i) 除數時只取整數，捨棄點數。
- ii) D = 日
- iii) M = 月號 (3 月=1，4 月=2‧‧‧‧12 月=10，1 月=11，2 月=12)
- iv) C = 年份數字中代表世紀的頭兩個位數，例如 2005 年的 20。
- v) Y = 年份數字後兩個位數，如果是 1 或 2 月，M=11 或 12 而 Y 則要減 1。上述法則可以用以下公式表達

a = (14 – 月份)/12　(月份：1 月等於 1，2 月等於 1，3 月等於 3・・・・11 月等於 11，12 月等於 12)

Y =Y - a

M = 月份 + 12a – 2

vi) Mod 7 是將總和除以 7，取餘數。

vii) 餘數 W = 0 代表星期日，1 代表星期一，2 代表星期二，・・・・・。

其他

以下爲我們好奇西元幾年幾月幾號定爲星期一，因爲尋找的許多資料都未得到結果，因此，寫信詢問中央氣象局尋找解答，如下：

來源: 中央氣象局 <webqry@cwb.gov.tw>

收信: newspring@mail.skjhs.ntct.edu.tw

日期: Tue, 7 Mar 2006 16:31:54 +0800

標題: Fw: 謝謝

[加入通訊錄] [加入排外名單] [顯示詳細資料] [按右鍵-另存郵件]

親愛的網友，您好：

**目前所用之星期是依以前的順序持續沿用，經多方蒐尋相關資料，很抱歉，由於年代久遠，我們無法查到幾月幾日爲星期起始的基準日。** 中央氣象局　敬覆>>> ----- Original Message -----> From: "newspring" <newspring@mail.skjhs.ntct.edu.tw>> To: <webqry@cwb.gov.tw>> Sent: Monday, March 06, 2006 5:43 PM> Subject: 謝謝>>>> 謝謝您的答覆>> 但可能是我敘述不德體>> 我並非要詢問星期的由來>> 我所想問的是到底是西元幾年幾月幾號定爲星期一>> 因爲現在的年月日都按一定的規則下去>> 但我相信一定有將某年的幾月幾號星期幾作一個基準>> 而日子才按一定的規則下去>> 謝謝>>>>

## 參考書目


南一書局第一冊第 2 章因數與倍數

趣味數論 單墫

近世代數 康明昌

<u>韓信點兵</u> 莫宗堅,蔡聰明

<u>疊合原理</u> 賴東昇

030413