
030415

--	--

題目

三角形周長等分線的作圖與數量分佈

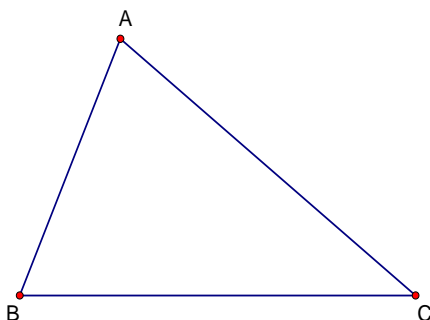
摘要

從基測的一個題目開始，過三角形頂點作出周長等分線，發現三條過頂點的周長等分線交於一點。再把指定通過的點 P ，換成三角形邊上任意一點，畫出過 P 點的周長等分線，在眾多周長等分線中，我們發現了一條特殊的周長等分線，其他的周長等分線，中點皆落在此特殊周長等分線上，在文中，我們稱之為**基本等周線**。後來我們將 P 點改為任意指定的一點，作出過 P 點的周長等分線。我們找到了一個類似三角形的曲線區域，在文中稱為**包絡區**，當 P 點在包絡區內部可繪出三條周長等分線，在這個區域的外部，只能作出一條周長等分線。

壹、研究動機

94 年第二次國中基測數學科第 30 題的題目大意是：

已知 $\triangle ABC$ 如下圖，通過 A 點作一直線 L ，等分 $\triangle ABC$ 的周長。假設 L 與 $\triangle ABC$ 另一個交點為 M ，請指出 M 的位置。



老師講解完這一題後，我們把題目改為：

通過任意指定點 P ，如何作一直線 L ，等分 $\triangle ABC$ 的周長。

當 P 點在 $\triangle ABC$ 邊上移動時，我們作了許多等分周長的直線，發現這直線有一些特殊的性質。可是當 P 點不在 $\triangle ABC$ 邊上時，我們發現這個問題十分具有挑戰性，於是開始了這一次的研究。以下將等分 $\triangle ABC$ 周長的直線或線段，都簡稱為 $\triangle ABC$ 的**等周線**。

貳、研究目的

- 一、通過三角形的頂點，如何作出等周線？這三條通過頂點的等周線有什麼性質？
- 二、通過三角形邊上任意指定點 P ，如何作出等周線？這些等周線有什麼性質？
- 三、通過任意指定點 P ，如何作出等周線？這些等周線又有什麼性質？
- 四、當 P 點的位置任意改變時，通過 P 點的等周線數量會如何變化？

參、研究設備及器材

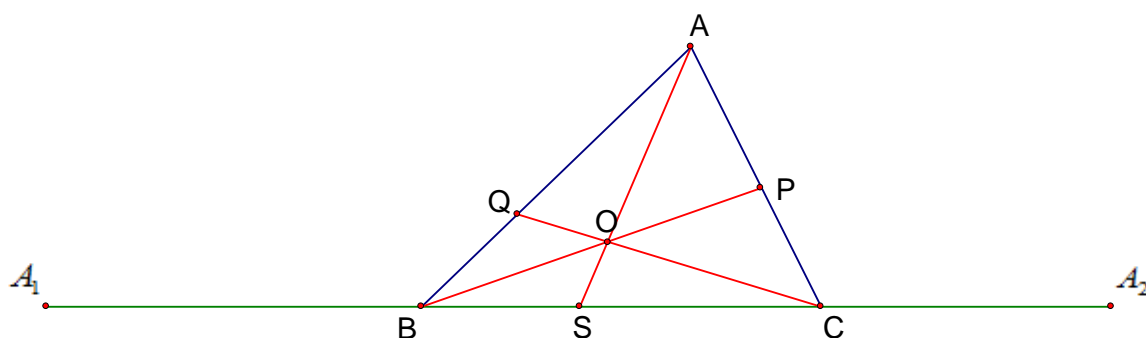
筆、尺、圓規、電腦、*GSP* 繪圖軟體。

肆、研究內容

一、通過三角形頂點如何作出等周線？這三條等周線有什麼性質？

(一) 作圖方法

1. 延長 \overline{BC}
2. 如圖分別在 \overline{BC} 上取點 A_1 、 A_2 ，使 $\overline{A_1B} = \overline{AB}$ 、 $\overline{A_2C} = \overline{AC}$
4. 取 $\overline{A_1A_2}$ 的中點 S
5. 連 \overline{AS} 即為所求



發現：我們用同樣方式畫出另外兩條過頂點等周線，發現三條過頂點等周線竟然交於同一點，使用 *GSP* 軟體把三角形的三頂點任意移動，發現三條等周線仍然交於一點，於是，我們想是不是每一個三角形都有如此現象呢？老師告訴我們可以嘗試用國中課程所學的幾何推理的方式，加以證明。

(二) 通過頂點的三條等周線交於同一點

已知 \overline{CQ} 、 \overline{BP} 、 \overline{AS} 為 $\triangle ABC$ 的三條過頂點等周線。

令 \overline{CQ} 、 \overline{BP} 交於 O 點（如圖 1 所示），現在我們要證明 \overline{AS} 也必定通過 O 點。

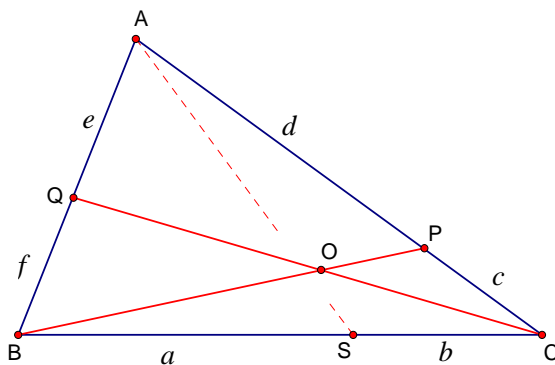


圖 1： \overline{CQ} 、 \overline{BP} 、 \overline{AS} 分別為 $\triangle ABC$ 的三條過頂點等周線

令 $\overline{SB} = a$ 、 $\overline{SC} = b$ 、 $\overline{CP} = c$ 、 $\overline{AP} = d$ 、 $\overline{AQ} = e$ 、 $\overline{BQ} = f$ ，

因為 $d + c + b = \frac{1}{2}$ 周長， $d + c + e = \frac{1}{2}$ 周長，所以 $e = b$ ，

同理可知： $d = a$ 、 $f = c$ 。

先作 \overline{AO} 交 \overline{BC} 於點 S' ，如下圖 2

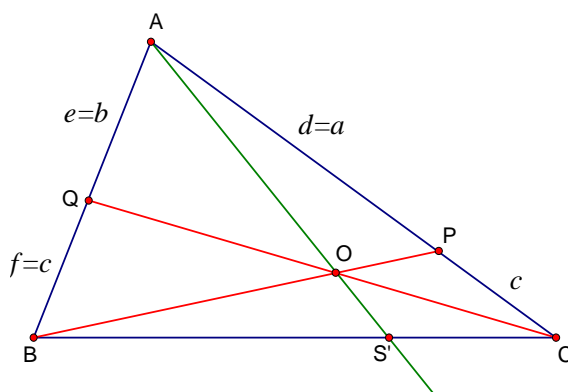


圖 2：假設 \overline{AO} 交 \overline{BC} 於點 S'

則：
$$\frac{\Delta ABO \text{面積}}{\Delta ACO \text{面積}} = \frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}} \text{-----} \quad \langle 1 \rangle$$

$$\frac{\Delta BCO \text{面積}}{\Delta ABO \text{面積}} = \frac{c}{a} \text{-----} \quad \langle 2 \rangle$$

$$\frac{\Delta ACO \text{面積}}{\Delta BCO \text{面積}} = \frac{b}{c} \text{-----} \quad \langle 3 \rangle$$

$\langle 1 \rangle \times \langle 2 \rangle \times \langle 3 \rangle$ 可推得 $1 = \frac{b}{a} \times \frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}}$

所以 $\frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}} = \frac{a}{b}$ ，由圖 1 知 $\frac{\overline{BS}}{\overline{CS}} = \frac{a}{b}$ ，所以 $\frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{CS}}$ ，又 S 和 S' 兩點都在 \overline{BC} 上

所以 $S' = S$ ，即 \overline{AS} 通過 O 點。

討論：對任意三角形，通過頂點的三條等周線必交於同一點。我們已探討三角形過頂點的等周線，那如果是在三角形的邊上任意給定一點 P ，那麼過 P 點的等周線又有什麼特殊性質呢？

二、通過三角形邊上任意指定點 P 如何作出等周線？這些等周線又有哪些性質呢？

(一) 作圖方法(以 P 點在 \overline{BC} 上為例)

1. 用前一部分的方法作過頂點等周線 \overline{AS} 。
2. 當 P 點在 \overline{SC} 上時，如圖 3，在 \overline{AB} 上取點 Q ，使 $\overline{AQ} = \overline{PS}$ 。
3. 當 P 點在 \overline{SB} 上時，如圖 4，在 \overline{AC} 上取點 Q ，使 $\overline{AQ} = \overline{PS}$ 。
4. 連 \overline{PQ} 即為所求。

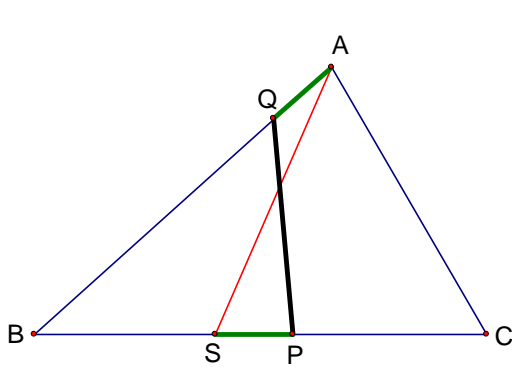


圖 3： P 在 \overline{SC} 上所得到的等周線 \overline{PQ}

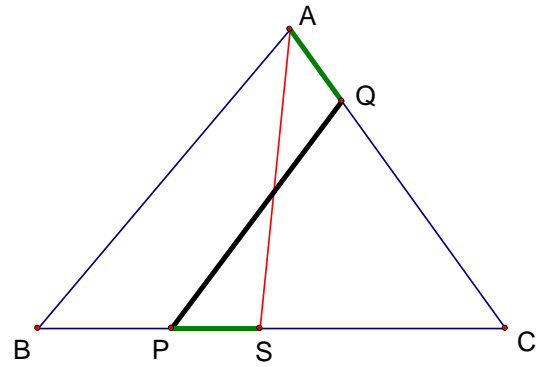


圖 4： P 在 \overline{SB} 上所得到的等周線 \overline{PQ}

用同樣方式畫出多條等周線後，我們發現其中有一條十分特殊的等周線，如圖 5 的 \overline{PQ} ， $\triangle PBQ$ 呈一個等腰三角形，此時 $\overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{1}{4} \Delta ABC$ 周長，這樣的等周線 \overline{PQ} 對 $\angle B$ 具有對稱性。在研究中我們把它稱之為 $\angle B$ 的**基本等周線**或頂點 B 的**基本等周線**，同理，在圖 6 中， $\overline{CP} = \overline{CQ} = \frac{1}{4} \Delta ABC$ 周長， \overline{PQ} 也稱之為 $\angle C$ 的基本等周線或頂點 C 的基本等周線。

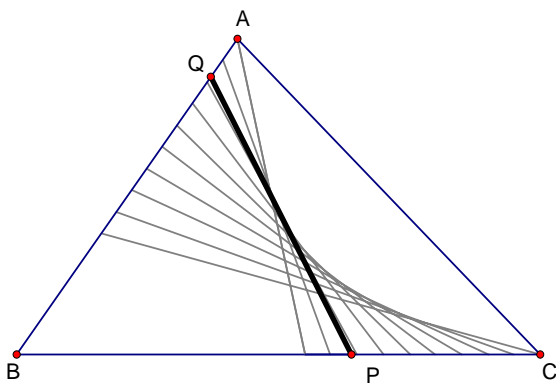


圖 5： $\overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{1}{4} \Delta ABC$ 周長時，

\overline{PQ} 為 $\angle B$ 的基本等周線

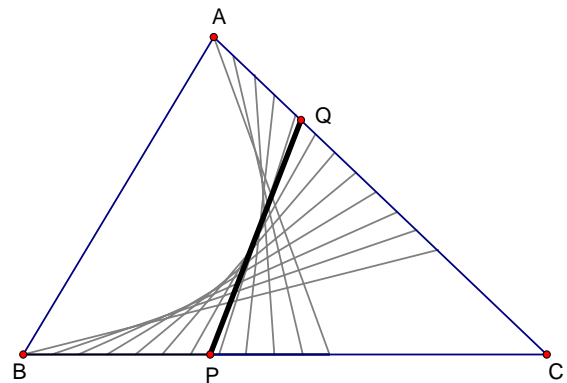
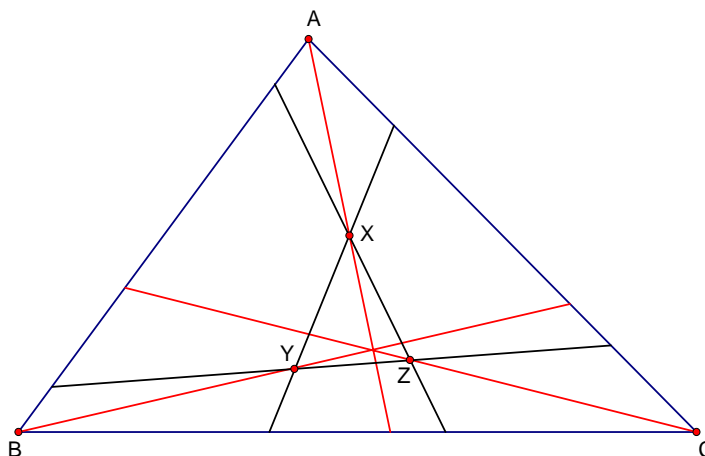


圖 6： $\overline{CP} = \overline{CQ} = \frac{1}{4} \Delta ABC$ 周長時，

\overline{PQ} 為 $\angle C$ 的基本等周線

我們把 $\triangle ABC$ 的三條基本等周線(黑色)和三條過頂點的等周線(紅色)畫在一起，如下圖：

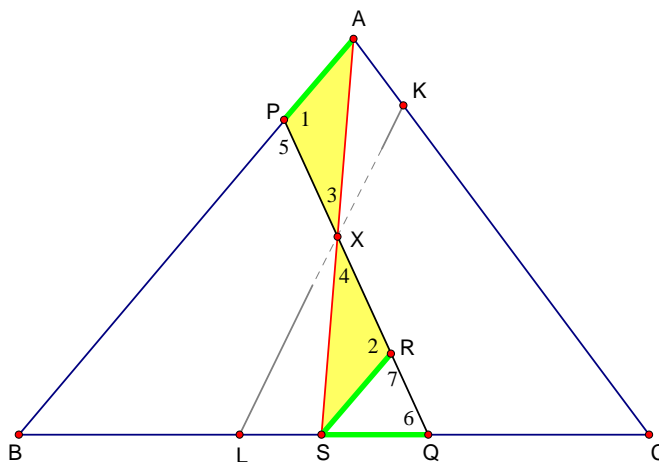


發現：

1. 過 A 點等周線會和 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的基本等周線三線交於一點 X 。
過 B 點等周線會和 $\angle A$ 、 $\angle C$ 的基本等周線三線交於一點 Y 。
過 C 點等周線會和 $\angle B$ 、 $\angle A$ 的基本等周線三線交於一點 Z 。
2. 上述的交點位置，看起來很像是各頂點等周線(紅色)的中點。
3. 利用 *GSP* 軟體把三角形三頂點隨意移動，發現上述的現象依然存在，這些現象是任意三角形都具備的性質嗎？

(二) 基本等周線與其他等周線的關係

已知 \overline{PQ} 是 $\angle B$ 的基本等周線， \overline{AS} 是通過頂點 A 的等周線， \overline{PQ} 、 \overline{AS} 相交於點 X ， \overline{LK} 是 $\angle C$ 的基本等周線，現在我們要證明點 X 是 \overline{AS} 的中點。



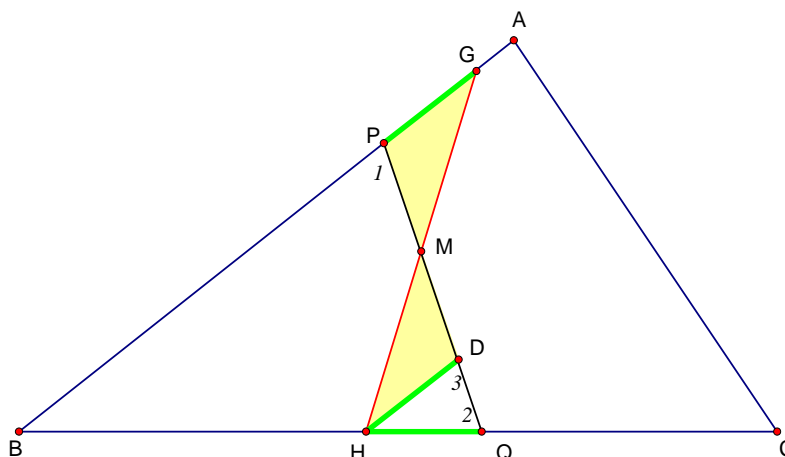
過 S 作一條與 \overline{AB} 平行的直線，設此直線與 \overline{PQ} 交於 R 點，

因為 $\overline{PB} = \overline{QB}$ ， $\angle 5 = \angle 6$ ，又 $\angle 5 = \angle 7$ (同位角)，所以 $\angle 6 = \angle 7$ ， $\overline{SR} = \overline{SQ}$ ，

又 $\overline{SQ} = \overline{AP}$ ，所以 $\overline{SR} = \overline{AP}$ ，再加上 $\angle 3 = \angle 4$ (對頂角)， $\angle 1 = \angle 2$ (內錯角)
 得 $\triangle RXS \cong \triangle PXA$ ， $\overline{AX} = \overline{SX}$ 。因此， \overline{AS} 與基本等周線的交點位置是 \overline{AS} 的中點 X 。
 同理可證： $\angle C$ 的基本等周線 \overline{LK} ，也和 \overline{AS} 交於 \overline{AS} 的中點 X 。

討論：

1. 一條過頂點的等周線和另兩角的基本等周線，三線交於同一點，而且這個交點即是過頂點等周線的中點。
2. 後來我們想，如果把 \overline{AS} 換成其他沒有通過頂點的等周線 \overline{GH} ，是否還是會被基本等周線平分呢？如下圖，等周線 \overline{GH} 兩端點在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 上， \overline{PQ} 是 $\angle B$ 的基本等周線， M 是 \overline{GH} 和 \overline{PQ} 的交點，我們以同樣方法可以證明 M 點還是 \overline{GH} 的中點。

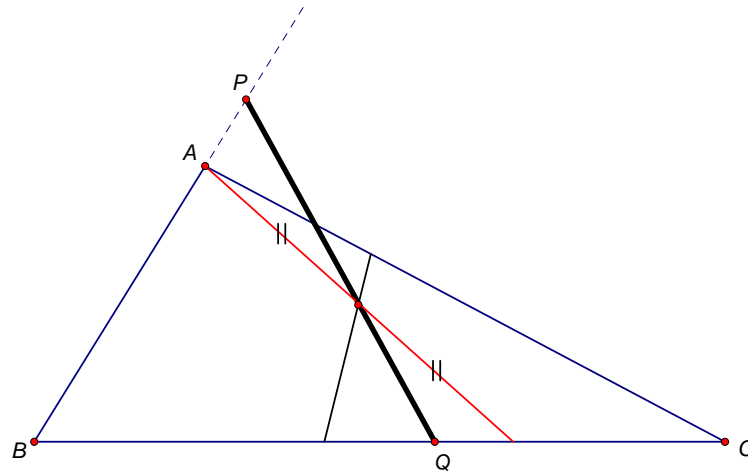


為了方便敘述，我們把 $\triangle ABC$ 的等周線 \overline{GH} ，依其位置分成三種：

1. 若一等周線 \overline{GH} 兩端點在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上，則我們稱 \overline{GH} 為 $\angle A$ 的等周線。
2. 若一等周線 \overline{GH} 兩端點在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 上，則我們稱 \overline{GH} 為 $\angle B$ 的等周線。
3. 若一等周線 \overline{GH} 兩端點在 \overline{AC} 、 \overline{BC} 上，則我們稱 \overline{GH} 為 $\angle C$ 的等周線。

討論：

1. $\triangle ABC$ 中，同一角的等周線中點都會落在該角的基本等周線上。
2. 基本等周線作圖時，必須在三角形的邊上各取 $\frac{1}{4} \triangle ABC$ 周長，所以當 $\triangle ABC$ 的某個邊長比 $\frac{1}{4}$ 周長短的時候，就會有基本等周線跑到三角形外面的情形發生。如下圖：



$\overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{1}{4} \Delta ABC$ 周長，因為 $\overline{AB} < \frac{1}{4} \Delta ABC$ ，所以 P 點跑到 \overline{AB} 的延長線上， \overline{PQ} 不再是 $\angle B$ 的等周線。但是經過類似的討論，可以知道這樣的 \overline{PQ} 仍具備 $\angle B$ 基本等周線的性質，因此當 $\angle B$ 的基本等周線不存在時，我們就用這樣的 \overline{PQ} 來代替 $\angle B$ 的基本等周線。

在討論完過三角形邊上任意指定一點 P 的等周線後，我們就要面對最困難的主題了：如果 P 點變成一個任意移動的點，那麼要如何畫出過 P 點的等周線呢？

三、通過任意指定一點 P ，要怎麼作出等周線？這些等周線有什麼特殊的性質呢？

對於任意指定點 P ，可能作出不只一條的等周線，但只要用相同方法分別作出 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的等周線就可以了，而我們以下的說明都以 $\angle B$ 為例。

(一) 將 $\triangle ABC$ 放在座標平面上，觀察 $\angle B$ 的等周線群

我們畫出許多條 $\angle B$ 的等周線後，為了進一步探討它們的性質，所以就利用基本等周線的對稱性質來觀察，我們以 $\angle B$ 的基本等周線 \overline{DE} 為 x 軸， $\angle B$ 的分角線為 y 軸，如下圖。

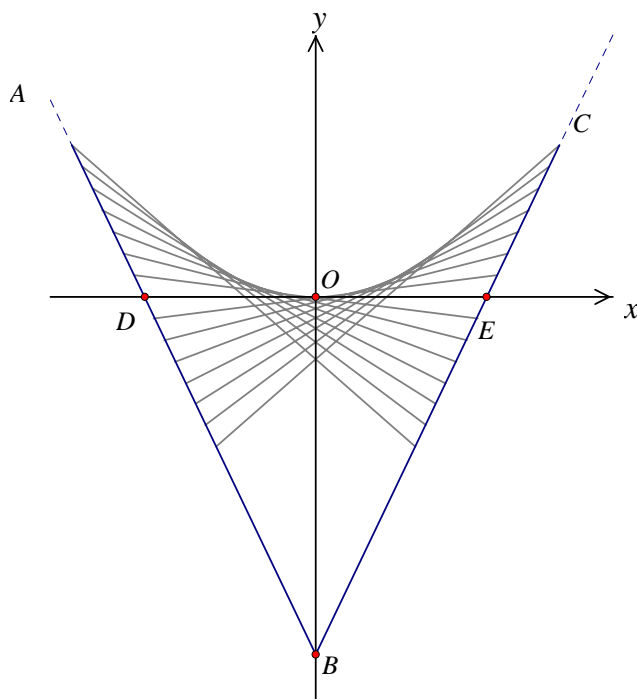


圖 7：畫出 $\angle B$ 的等周線群後，仔細觀察

仔細觀察後，我們覺得這些等周線好像繞著一個點旋轉。為了求證真的有那一點存在，我們作出幾條等周線的中垂線(綠色)，如圖 8。

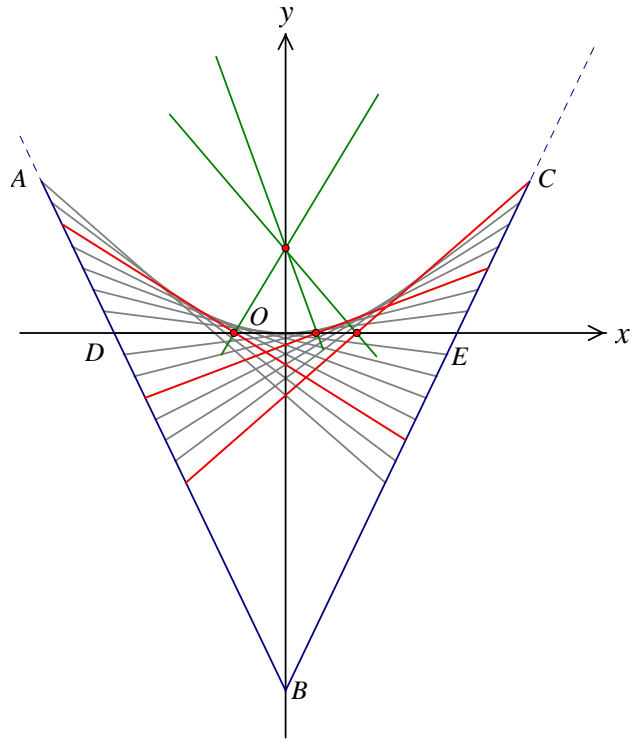


圖 8：等周線的中垂線交於同一點

發現：我們所畫出的三條等周線的中垂線(綠色)交於 y 軸上的同一點，如果這是等周線的普遍性質，對我們的問題〈等周線作圖〉，將會有很大的幫助。

(二) $\angle B$ 的等周線段之中垂線皆交於同一點

以 $\angle B$ 的等周線為例，現在我們要證明是否等周線的中垂線與 y 軸的交點都相同。

如圖 9，已知 \overline{PQ} 為 $\angle B$ 的一條等周線， M 是 \overline{PQ} 的中點， \overline{PQ} 的中垂線交 y 軸於 F 點，

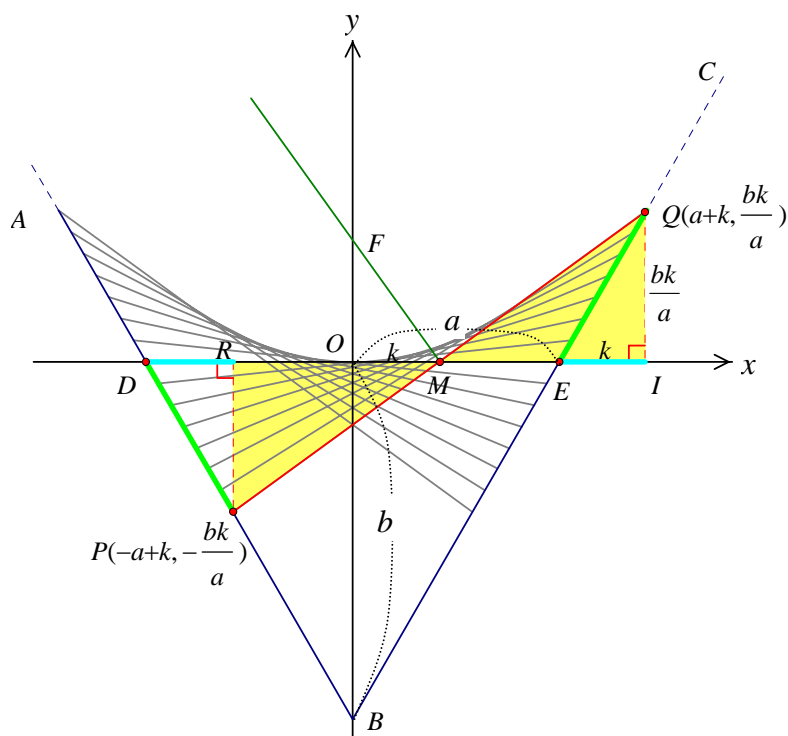


圖 9：等周線段的中垂線與 y 軸的交點

分別過 Q 、 P 二點作與 x 軸垂直的直線，交 x 軸於點 I 、 R 二點。

令 $\overline{DO} = \overline{EO} = a$ ， $\overline{BO} = b$ ， $\overline{IE} = k$ ，其中 a 、 b 、 k 都是正數

所以 $D(-a, 0)$ 、 $E(a, 0)$ 、 $B(0, -b)$ ，現在要求出 F 點的座標。

因為 $\overline{PR} \parallel \overline{QI}$ ，且 $\overline{PM} = \overline{QM}$ ，所以 $\triangle RPM \cong \triangle IQM$

因為 $\overline{OB} \parallel \overline{QI}$ ，所以 $\triangle QIE \sim \triangle BOE$ ， $\overline{QI} : \overline{EI} = \overline{OB} : \overline{OE}$ ， $\overline{QI} : k = b : a$

$\overline{QI} = \frac{bk}{a}$ ，因此 Q 點座標為 $(a+k, \frac{bk}{a})$ ， P 點座標為 $(-a+k, -\frac{bk}{a})$

由 P 、 Q 兩點座標可推得 \overline{PQ} 的中點 M 座標為 $(k, 0)$ ， $\overline{MO} = k$ ， $\overline{MI} = a - k + k = a$

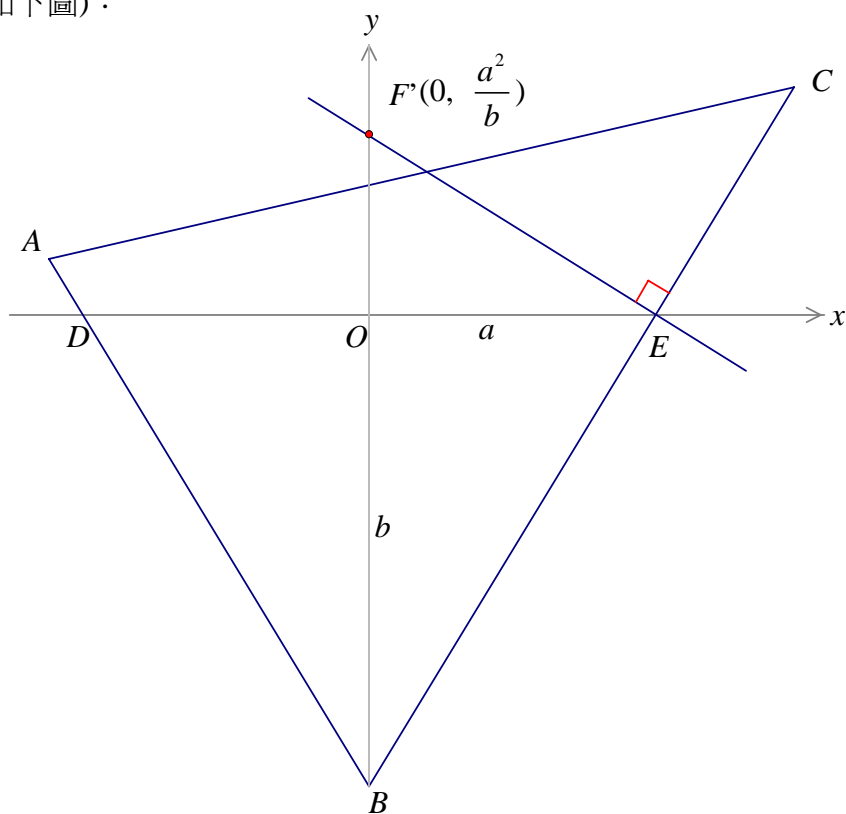
因為 $\triangle FOM \sim \triangle MIQ$ ，所以 $\overline{FO} : \overline{OM} = \overline{MI} : \overline{QI}$ ，所以 $\overline{FO} : k = a : \frac{bk}{a}$ ， $\overline{FO} = \frac{a^2}{b}$

所以 F 點座標為 $(0, \frac{a^2}{b})$ 。

討論：因為我們所推得的 F 點座標 $(0, \frac{a^2}{b})$ 並不會因 k 值的變化而受影響，所以我們可以得

到一個結論： $\angle B$ 的等周線之中垂線交於同一點，而這點位於 $\angle B$ 的角平分線上，即是圖中的 F 點我們稱這個點為 $\angle B$ 等周線的**旋轉中心**。

後來我們猜測如果通過點 E 作與 \overline{BC} 垂直的直線，交 y 軸於 F' ，是否此點和旋轉中心是同一點呢？(如下圖)：



因為 $\triangle F'OE \sim \triangle EOB$ (子母相似)

所以 $\overline{F'O} : a = a : b$, $\overline{F'O} = \frac{a^2}{b}$, 所以 $F'=F$

結論：從基本等周線端點作 $\angle B$ 兩邊的垂線與 y 軸的交點，則交點和旋轉中心是同一點。

在發現此結論後，對於任意指定點 P ，我們便可輕易畫出過 P 點的等周線。

(三) 通過三角形內部任意指定點 P ，如何作出 $\angle B$ 的等周線？

作圖方法：(如圖 10)

1. 作 $\angle ABC$ 的分角線 L 。
2. 畫出 $\angle B$ 的基本等周線，交 $\angle B$ 的兩邊於 D 、 E 兩點。
3. 過 D 點作 \overline{AB} 的垂線交直線 L 於 F 點(旋轉中心)。
4. 連 \overline{PF} ，以 \overline{PF} 為直徑畫圓，交 \overline{DE} 於 M 點。(有一點兩點或不存在)
5. 作 \overline{PM} ，若 \overline{PM} 與 \overline{AB} 、 \overline{BC} 各有一個交點，則 \overline{PM} 就是 $\angle B$ 的等周線。

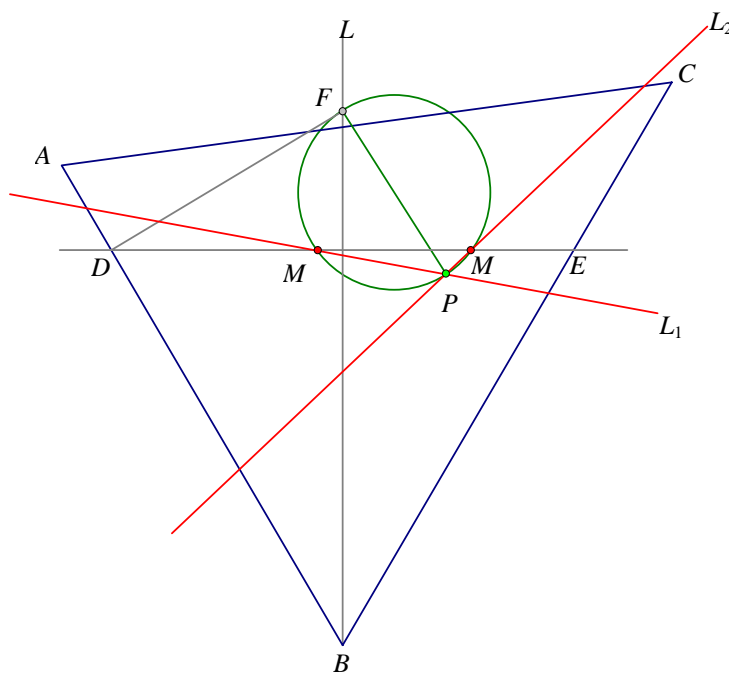


圖 10：通過任一指定點 P ，針對 $\angle B$ 作等周線

討論：

1. 對於指定點 P ，上面已經作出 $\angle B$ 的等周線，再用相同方法對 $\angle A$ 、 $\angle C$ 作等周線就可作出過 P 點所有的等周線了。
2. 上面的作圖步驟 4， M 點可能有一個、兩個或不存在，作圖步驟 5， \overline{PM} 與 \overline{AB} 、 \overline{BC} 也可能沒交點，因此針對 $\angle B$ 所作 $\triangle ABC$ 的等周線結果可能是一條、二條或根本沒有。如何由 P 點的位置，來決定 $\angle B$ 的等周線的數量呢？
3. 任意給一指定點 P ，針對 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 都作完等周線後，最多是幾條？如何由 P 點的位置，來決定 $\angle B$ 的等周線的總數量呢？這一連串的問題，即是我們下一研究的主题！

四、當 P 點的位置任意改變時，通過 P 點等周線數量會如何變化？

在上一節，我們對於任意指定點 P 作過 P 點的等周線的時候，發現會影響過 P 點等周線數量的因素有兩項：

1. M 點的數量。也就是當我們將 P 點與旋轉中心 F 相連接時，以 \overline{PF} 為直徑的圓與基本等周線的交點。
2. 我們畫出的 \overline{PM} 與 \overline{AB} 、 \overline{BC} 是否相交。如圖 10， L_1 是 $\angle B$ 的等周線，但 L_2 與 \overline{BC} 沒交點，所以不是 $\angle B$ 的等周線。

(一) 如圖 10，當 P 點在 \overline{DE} 下方時，以 \overline{FP} 為直徑的圓，和 \overline{DE} 一定會有兩個交點 M ，將 P 點慢慢往上移動，到達 \overline{DE} 的上方後，兩個 M 點會越來越靠近，到最後就會只有一個 M 點，此時如果 P 點再往上移動，就沒有交點 M 了。於是我們便想：如果把只能構出一點 M 的 P 點畫出，應該會有很大的幫助，畫出一些這樣的 P 點後，加以觀察，我們覺得那些 P 點連起來很像一條曲線，於是我們使用 *GSP* 軟體把 P 點的軌跡畫出。

作法：(如圖 11)

1. 用前一節的方法作出 $\angle B$ 的基本等周線 \overline{DE} 和 $\angle B$ 的分角線 L ，並作出旋轉中心 F 。
2. 在 \overline{DE} 上取一動點 M ，作過點 M 且垂直 \overline{DE} 的直線 L_1 。
4. 連 \overline{FM} ，作 \overline{FM} 的中垂線交 L_1 於 Q 。
5. 以 Q 為圓心， \overline{FQ} 為半徑畫圓，再將半徑 \overline{FQ} 延長一倍，得到直徑另一端點 P 。
6. 作點 M 移動時，點 P 的軌跡即為所求。

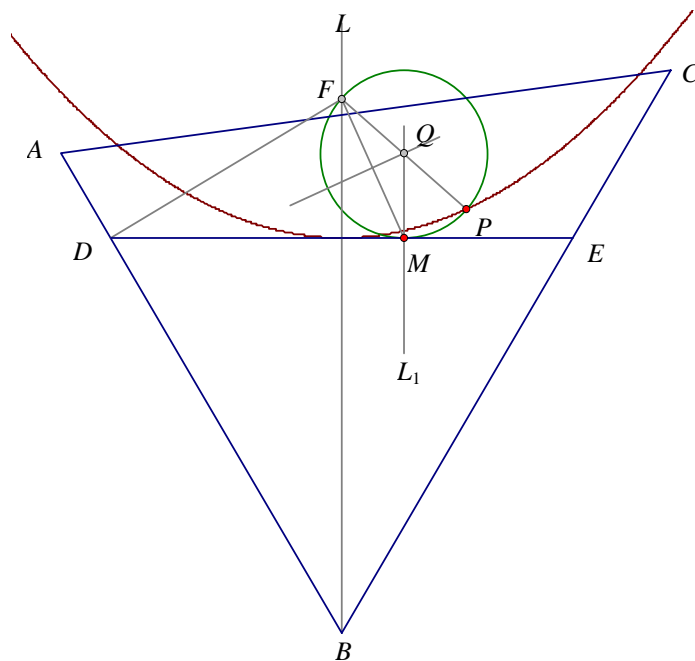


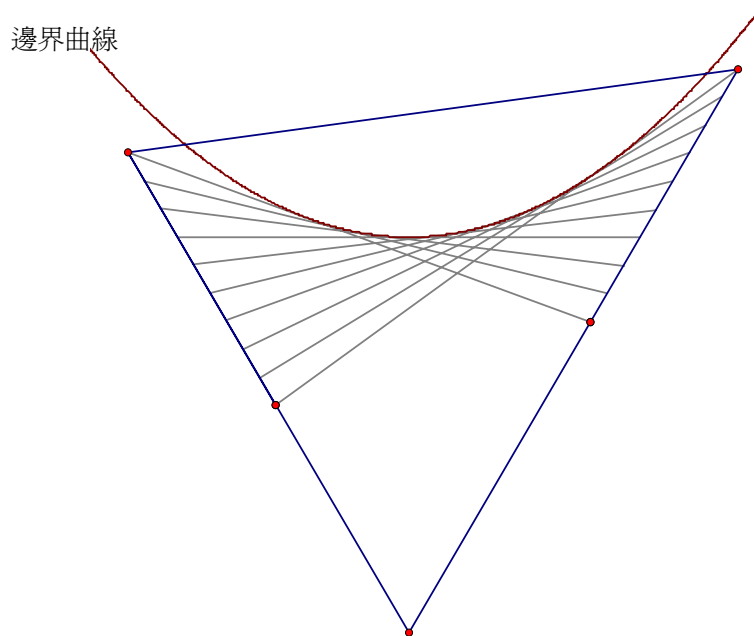
圖 11：以 \overline{FP} 為直徑的圓剛好與基本等周線 \overline{DE} 相切時，所得的 P 點軌跡

討論：(針對 $\angle B$ 的討論)

1. 若 P 點在曲線內部(曲線上方)，則圓不會與 \overline{DE} 相交，所以沒有 M 點。
 2. 若 P 點在曲線外部(曲線下方)，則圓與 \overline{DE} 會有兩個交點，所以有二個 M 點。
 3. 若 P 點在曲線上，則圓與 \overline{DE} 正好相切，所以有一個 M 點。
- 因為這條曲線有上述的性質，所以我們稱這個曲線為**邊界曲線**。

(二) 邊界曲線與等周線的關係

在我們畫出邊界曲線和許多條等周線後，發現我們所畫出的等周線皆與此邊界曲線相切，如下圖，是否同一角的等周線皆與這一角的邊界曲線相切呢？

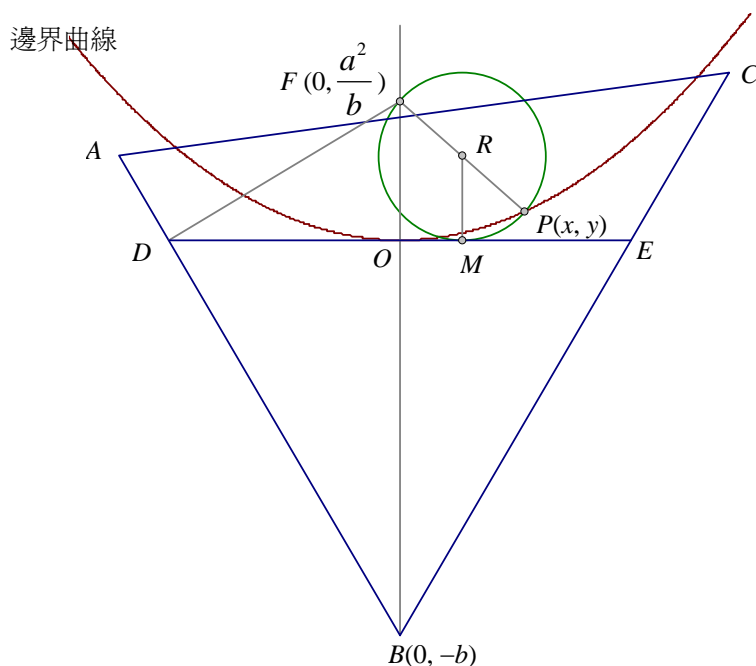


這一發現如果是真的，對於如何判斷等周線數量將會有很大的幫助，為了確定邊界曲線和等周線的關係，我們必須分別求出等周線與邊界曲線的方程式。

使用圖 9 的座標系統，令 $\overline{OE} = \overline{OD} = a$ ， $\overline{BO} = b$ ，則 F 點座標為 $(0, \frac{a^2}{b})$ ，令 $P(x, y)$

邊界曲線上的任一點，現在要求 x 、 y 的關係式，即是邊界曲線的方程式。

如下圖， R 點為 \overline{PF} 的中點，所以圓心 R 的點座標 $(\frac{x}{2}, \frac{\frac{a^2}{b} + y}{2})$ ，所以 M 點的座標為 $(\frac{x}{2}, 0)$ 。

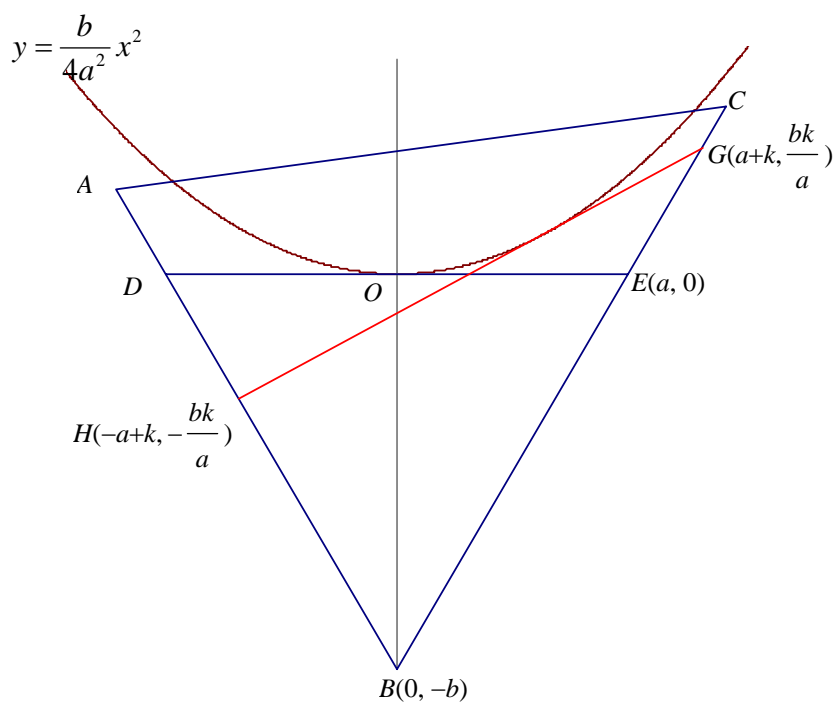


因爲 $\overline{FR}^2 = \overline{MR}^2$ ，所以 $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{-a^2}{b} + y)^2 = (\frac{a^2}{b} + y)^2$

展開整理，最後我們得出一關係式： $y = \frac{b}{4a^2}x^2$

這是一個二次函數，而函數圖形是一個拋物線，所以我們可以知道這條曲線是一條拋物線，以後，在我們的研究裡，邊界曲線也稱爲**邊界拋物線**。

接下來我們要求出等周線的方程式，如下圖， \overline{GH} 是一條 $\angle B$ 的等周線，



參考圖 9，令 G 點座標為 $(a+k, \frac{bk}{a})$ ， H 點座標為 $(-a+k, -\frac{bk}{a})$

由 G 、 H 兩點座標可得， \overline{GH} 的方程式為： $y = \frac{bk}{a^2}x - \frac{bk^2}{a^2}$

用我們上面所推得的邊界曲線方程式和 \overline{GH} 的直線方程式解聯立方程式。

$$\begin{cases} y = \frac{bk}{a^2}x - \frac{bk^2}{a^2} \\ y = \frac{b}{4a^2}x^2 \end{cases}, \quad \text{得 } x^2 - 4kx + 4k^2 = 0, \quad \text{即 } (x-2k)^2 = 0,$$

$$x = 2k \text{ (二重根)}, \quad y = \frac{bk^2}{a^2}$$

等周線與邊界曲線只有一個交點 $(2k, \frac{bk^2}{a^2})$ ，且等周線與 y 軸(拋物線的對稱軸)不平行，

所以等周線與邊界拋物線相切。

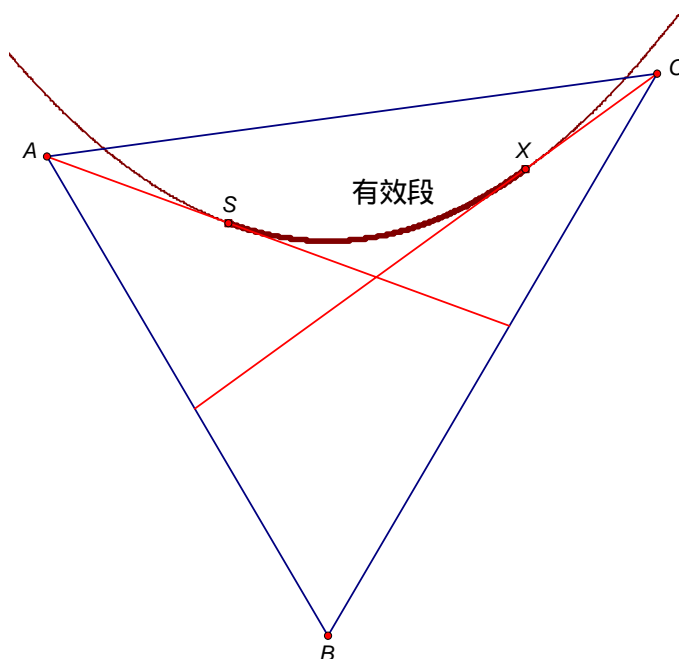
討論：

1. $\angle B$ 的邊界曲線是一條拋物線，而且此拋物線與 $\angle B$ 的每一條等周線都相切。
2. 因為 $\angle B$ 的每一條等周線都和 $\angle B$ 的邊界拋物線相切，所以通過 P 點的等周線也就是過 P 點與邊界拋物線相切的直線，於是等周線數量問題便可用「切線數量」來取代。

(三) 通過一個指定點 P ， $\angle B$ 的等周線數量會如何變化？

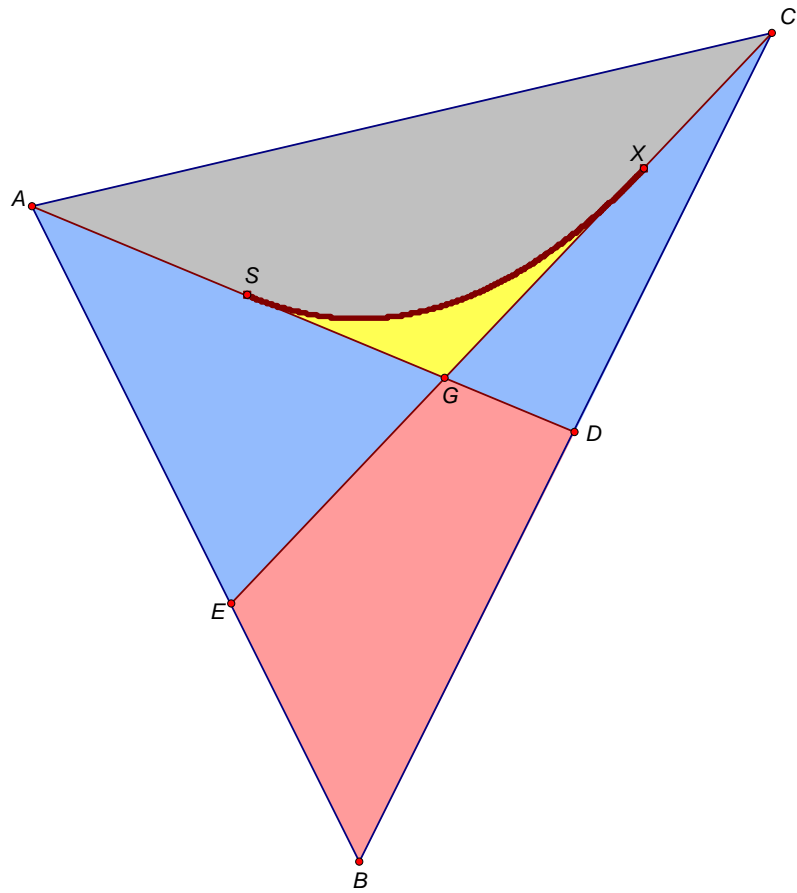
上一節我們知道等周線和邊界拋物線皆相切，所以只要找出和邊界拋物線相切的線，並加以驗證，就能決定過 P 點的等周線的數量了。

因為之前我們判斷 \overline{PM} 是不是一條等周線，是根據 \overline{PM} 與 $\angle B$ 兩邊的交點是否在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 上，而當兩交點不在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 兩邊上時，是因為超出 A 點或 C 點，所以我們畫出過頂點 A 和 C 的等周線作為邊界，令這兩條頂點等周線，分別和邊界拋物線相切於 S 和 X ，當 \overline{PM} 的切點在 $S\sim X$ 的曲線段上時， \overline{PM} 就是 $\angle B$ 的等周線，而如果切點超出 $S\sim X$ 段，則 \overline{PM} 就不是等周線。所以我們把 $S\sim X$ 段稱為**曲線有效段**。



現在我們先以 $\angle B$ 為例，畫出過點 A 、點 C 的等周線，再畫出 $\angle B$ 的邊界曲線有效段，於是我們可以把三角形分成幾塊區域，如下圖，再來探討當 P 點在區域中(不含邊界)會有幾條等周線通過。以下探討的等周線數量皆是 $\angle B$ 的等周線。

1. 當 P 點在黃色區域中，過 P 點與曲線有效段有兩條切線，所以有兩條等周線通過。
2. 當 P 點在藍色區域中，過 P 點與曲線有效段只有一條切線，所以過 P 點只能有一條等周線通過。
3. 當 P 點在紅色區域中，過 P 點與曲線有效段沒有切線，所以無法有等周線通過。
4. 當 P 點在灰色區域中，過 P 點與曲線無法產生切線，所以當然也不會有等周線。



5. P 點在各區域邊界上時(不含端點)

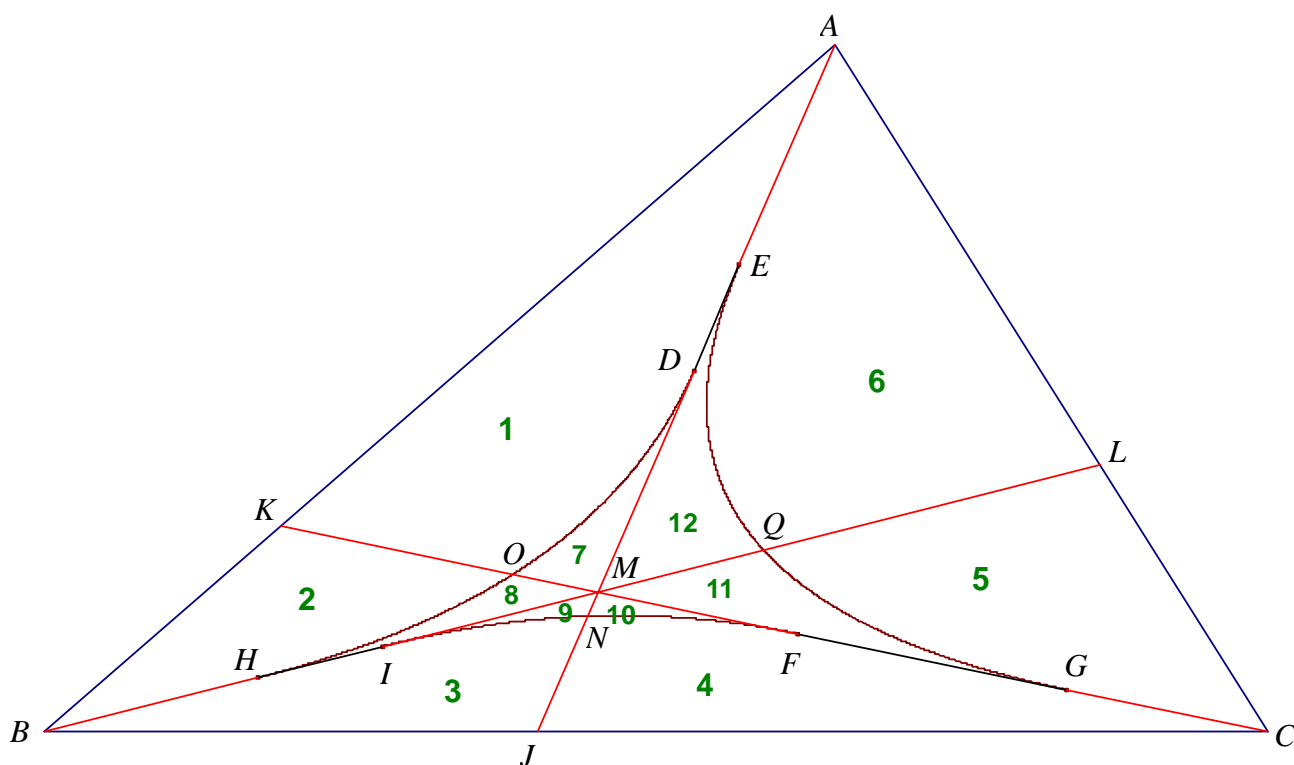
P 點位置	曲線有效 段 $S\sim X$	\overline{SG}	\overline{XG}	\overline{EG}	\overline{DG}	\overline{AE}	\overline{CD}	\overline{AS}	\overline{CX}	\overline{EB}	\overline{DB}	\overline{AC}
等周線 數量	1	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0

6. 當 P 點在各端點上時：

P 點位置	G 點	A 點	C 點	D 點	E 點	X 點	S 點	B 點
等周線 數量	2	1	1	1	1	1	1	0

(四) 通過一個指定點 P ， $\triangle ABC$ 的全部等周線數量，會如何變化？

針對一個角討論完等周線的數量變化後，我們要探討當三個方向皆考慮時，過 P 點的等周線總數量，於是我們將三個角的三條曲線有效段畫出，再畫出三條過頂點的等周線，其中 \overline{AJ} 、 \overline{CK} 、 \overline{BL} 是 3 條通過頂點的等周線，分別與曲線有效段相切於 D 、 E 、 G 、 F 、 I 、 H ，六個切點連成三個線段， \overline{IH} 、 \overline{DE} 、 \overline{FG} 這三條線段分別是頂點等周線的一部份，這三條線段與三條曲線有效段圍成一個封閉區域，我們稱它為包絡區， P 是一個指定點，若直線 T 通過 P 點而且與曲線有效段相切，則直線 T 就是 $\triangle ABC$ 的等周線，如下圖：



現在我們繼續用前面的方法判斷，過 P 點等周線數量：

1. 當 P 點在 1 區時，過 P 點與曲線有效段 $E\sim G$ 有一條切線，與另兩條曲線有效段無法產生切線，所以過 P 點只有一條等周線。同理，當 P 點在 2、3、4、5、6 區時，過 P 點也只有一條等周線。
2. 當 P 點在 7 區時，過 P 點與曲線有效段 $D\sim H$ 有兩條切線，與曲線有效段 $E\sim G$ 有一條切線，除此之外再無其他切線，所以過 P 點有三條等周線。同理，當 P 點在 8、9、10、11、12 區時，過 P 點也有三條等周線。

3. 當 P 點在各區域邊界上時(不含端點)

P 點位置	曲線有效段	\overline{DM} \overline{NM}	\overline{IM} \overline{QM}	\overline{FM} \overline{OM}	\overline{DE} \overline{HI} \overline{FG}	\overline{AE} \overline{BH} \overline{GC}	\overline{NJ} \overline{OK} \overline{PL}
等周線數量	2	3	3	3	2	1	1

5. 當 P 點在端點上

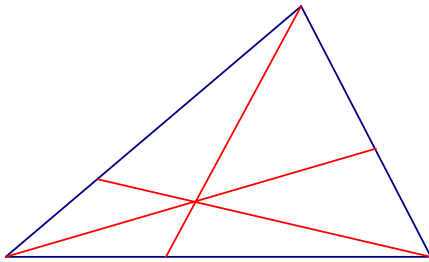
P 點位置	M	D I F	N O Q	E H G	A B C	J K L
等周線數量	3	2	2	1	1	1

6. 綜合以上討論，對整個 $\triangle ABC$ 而言，通過一個指定點 P ，等周線的數量為：

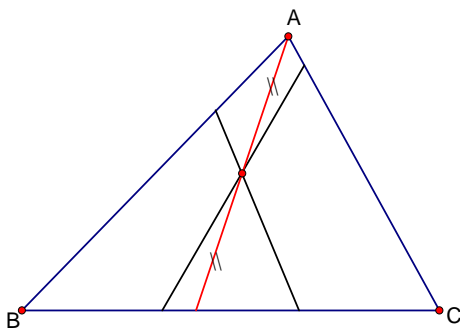
- (1) P 在包絡區內部(不含邊界)：有三條等周線
- (2) P 在包絡區邊界(不含三個尖端點)：有兩條等周線。
- (3) P 在其他位置(即三個尖端點和包絡區外部)：有一條等周線。

伍、結論:

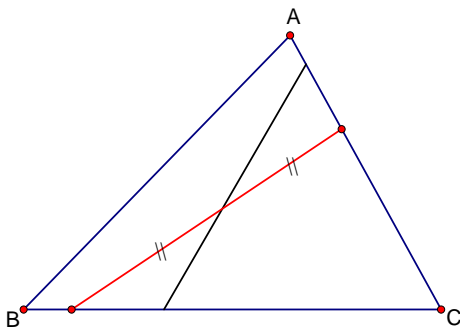
一、 通過三角形三頂點所作的三條等周線交於同一點。



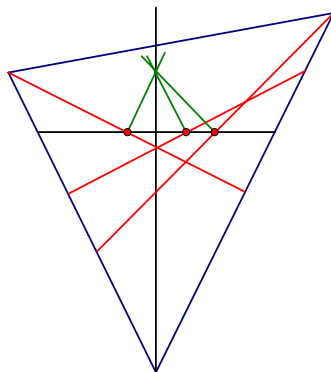
二、 一條過頂點等周線會和另兩角的基本等周線交於同一點，而且這個交點是頂點等周線中點。



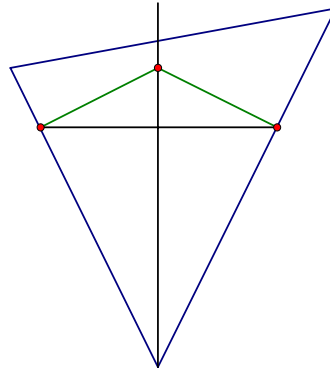
三、 同一角的基本等周線會平分同一角的等周線。



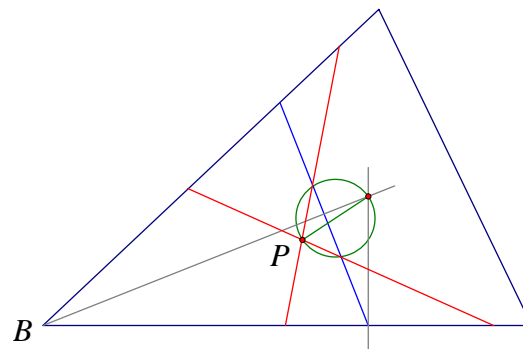
四、 同一角的等周線的中垂線會交此角的分角線(y 軸)於同一點 (旋轉中心)。



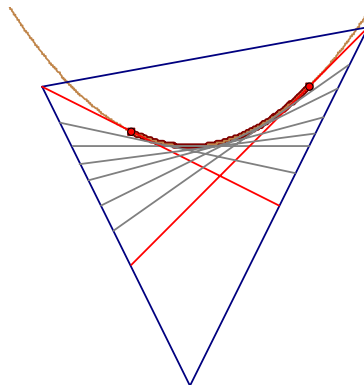
五、過基本等周線兩端點與其角的兩邊作垂線也會通過旋轉中心。



六、對於任意指定點 P ，可以使用圖 10 的方法，作出 $\triangle ABC$ 的等周線，過 P 點作 $\angle B$ 的等周線，可能兩條、一條或者沒有。



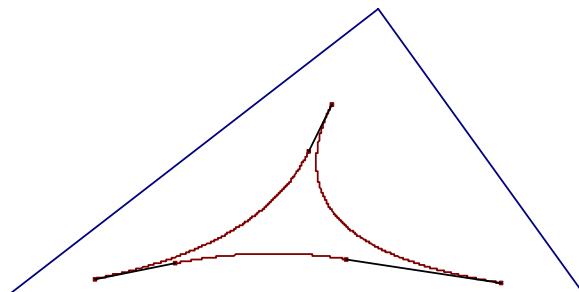
七、同一角的等周線皆與同一角的邊界曲線相切，而且切點一定落在曲線有效段。



030415

八、對 $\triangle ABC$ 而言，通過一個指定點 P ，等周線的數量為：

1. P 在包絡區內部(不含邊界)：有三條等周線
2. P 在包絡區邊界(不含三個尖端點)：有兩條等周線。
3. P 在其他位置(即三個尖端點和包絡區外部)：有一條等周線。



陸、展望：

- 一、如果周長分割時不是平分，而是依 $a:b$ 分割，如何作周長分割線？分割線數量如何變化？
- 二、針對四邊形、五邊形……，任給一點 P ，過 P 點如何作周長分割線？分割線如何變化？
- 三、周長分割線和面積分割線有什麼關聯？哪些直線可以同時分割周長和面積？

柒、參考資料：

- 一、94年第2次國中基測試題
- 二、國中數學課本 南一版第3冊第4章 平面座標與二元一次方程式的圖形
- 三、國中數學課本 南一版第4冊第3章 一元二次方程式
- 四、國中數學課本 南一版第4冊第4章 三角形的全等與尺規作圖
- 五、幾何辭典
- 六、2006 台灣國際科展作品：凸 N 邊形等分面積線數量之分布探索
- 七、中華民國中小學科展第45屆作品：同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究