壹、摘要:

有關研究平分(或 N 等分)多邊形面積的題材,在全國科展中,屢見不鮮;但其所討論的範圍,大多只是涉及平分(或N等分)多邊形面積的作法,然對平分(或N等分)多邊形面積的分割線數之多寡以及所分割成的圖狀皆未曾討論。而本作品「孔明復生,天下三分計」,除了對三等分面積提出具體的作法外,也針對了“最佳分割線”(即兩條分割線)與“圖狀”作了討論與研究。

其次本作品的特色有：

1. 分割線過一基準(即一定點 P),且分成定點位於多邊形的頂點、邊上、內部、外部等四部分加以討論
2. 所分割的面積不但相等且為完整圖形(即不被分離的圖形)
3. 探討過定點 P 的“最佳分割線”的分法及組數
4. 研究“最佳分割線”所分割成的圖狀, 並導出定點 P 位於 N 邊形各個位置所分割成圖狀種類數量的公式

貳、研究的動機:

上學期,在“三角形內心、外心與重心”的單元中,老師曾出了一道題目:「已知:ΔABC,求作:在ΔABC 內部取一點 P,使得ΔABP 面積=ΔBCP 面積=ΔACP 面積」;在大家討論後,幾乎都是找出重心 P 後, 再與三頂點連線。我在想:如果不限制分割線一定要通過頂點的話(即 $\overline{AP},\overline{BP},\overline{CP}$),是否還有其他過定點 P 三等分面積的分割法呢？又需如何才能使分割線為最少(即“最佳分割線”)？為了解決這些問題,於是我就找了幾位志同道合的同學,展開了以下的研究。遇有問題就隨時請教老師。

參、研究的目的:

(一) 企圖從三角形的頂點、邊上、內部、外部的任一點找出三等分面積的方法
(二) 企圖從四邊形的頂點、邊上、內部、外部的任一點找出三等分面積的方法
(三) 企圖從 N 邊形的頂點、邊上、內部、外部的任一點找出三等分面積的方法
(四) 探討過在各個位置的“最佳分割線”組數
(五) 研究“最佳分割線”所能分割成所有圖狀的種類

肆、研究的器材: 圓規、三角板、方格紙、GSP 軟體

伍、名詞解釋:

(一) 最佳分割線:就是等分面積的最少直線(或線段)。例如:面積三等分的“最佳分割線”有兩條
(二) 次佳分割線:就是比“最佳分割線”多一條直線(或線段)。例如:面積三等分的“次佳分割線”為三條
(三) 圖狀:各種 N 邊形的形狀。在此專指 “最佳分割線” 三等分面積後的各種圖形

陸、預備的定理:(証明見[附件一])

[預備定理]:(共角定理)若兩三角形有一角相等,則此兩三角形的面積比等於夾此角的兩邊乘積之比。

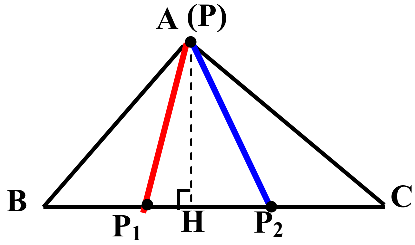
柒、研究的過程:

【第一部分】:三角形

(一)、 P為ΔABC的頂點時:

[分析]:若P為ΔABC的頂點時,只要找出對邊三等分,即找出對邊的三等分點就可利用「等底同高」的觀念將面積三等分

[作法]:1.在$\overline{BC}$上取P_1,P_2點,使得$\overline{BP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2C}$　　2.連$\overline{PP_1},\overline{PP_2}$則$\overline{PP_1},\overline{PP_2}$即為所求



[証明]:1.作$\overline{AH}(\overline{PH})\perp\overline{BC}$交$\overline{BC}$於$H$

2.$\because \overline{BP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2C}$,且$\Delta A(P)BP_1=\frac{1}{2}\overline{BP_1}\times\overline{A(P)H}$,

$\Delta A(P)P_1P_2=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\times\overline{A(P)H}$,$\Delta A(P)CP_2=\frac{1}{2}\overline{CP_2}\times\overline{A(P)H}$

$\therefore \Delta A(P)BP_1=\Delta A(P)P_1P_2=\Delta A(P)CP_2=\frac{1}{3}\Delta A(P)BC$

[小結]:由於找出對邊的三等分點就可利用「等底同高」的觀念將面積三等分,所以此時之圖狀為三個三角形,且只有一組"最佳分割線"

(二)、 P為ΔABC邊上之一點時:(〈方法一(外分法)〉〈方法二(內分法)〉的[分析][作法][証明]見[附件二]　)

＜方法三＞　＜共角定理法＞

[分析]:1.若P在$\overline{BC}$上,且$\Delta P_1BP=\frac{1}{3}\Delta ABC$,則依共角定理知$\frac{\Delta BPP_1}{\Delta ABC}=\frac{\overline{BP_1}\times\overline{BP}}{\overline{AB}\times\overline{BC}}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 3\overline{BP_1}\times\overline{BP}=\overline{AB}\times\overline{BC}$ 即$\frac{3\overline{BP}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BP_1}}$

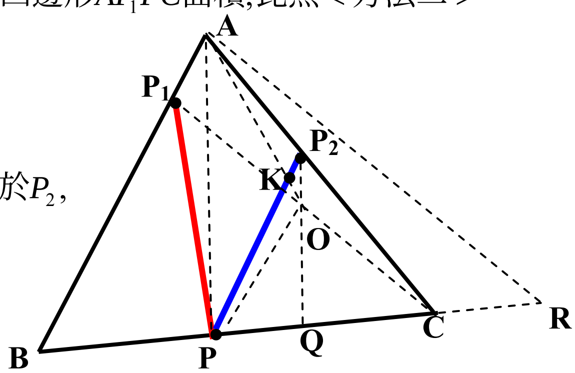
2.依平行線截比例線段作圖,只需延長$\overline{BC}$(或在$\overline{BC}$上),取$\overline{BR}=3\overline{BP}$,作$\overline{CP_1}\,//\,\overline{AR}$,連$\overline{PP_1}$即可得$\Delta P_1BP=\frac{1}{3}\Delta ABC$。　　3.平分四邊形$AP_1PC$面積,比照＜方法二＞

[作法]:1.在$\overrightarrow{BC}$上,取$\overline{BR}=3\overline{BP}$

2.連$\overline{AR}$,過C作$\overline{CP_1}\,//\,\overline{AR}$交$\overline{AB}$於$P_1$,連$\overline{PP_1}$

3.取$\overline{CP_1}$中點O,連$\overline{AP}$,過O作$\overline{QP_2}\,//\,\overline{AP}$交$\overline{AC}$於$P_2$,

4.連$\overline{PP_2}$,則$\overline{PP_1},\overline{PP_2}$即為所求。



[証明] : 1.在ΔABR中,$\because \overline{AR}\,//\,\overline{CP_1}$ $\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{BR}}=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{AB}}$

又$\because \overline{BR}=3\overline{BP}$,$\therefore \frac{\overline{BC}}{3\overline{BP}}=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{AB}}$故$3\overline{BP}\times\overline{BP_1}=\overline{AB}\times\overline{BC}$

2.$\because \angle QBP_1=\angle ABC$,$\therefore \frac{\Delta BP_1P}{\Delta ABC}=\frac{\overline{BP}\times\overline{BP_1}}{\overline{AB}\times\overline{BC}}=\frac{\overline{BP}\times\overline{BP_1}}{3\overline{BP}\times\overline{BP_1}}=\frac{1}{3}$,故$\Delta BP_1P=\frac{1}{3}\Delta ABC$

3.$\because \overline{QP_2} // \overline{AP}, \therefore \Delta AP_2K = \Delta POK$,且$O$為$\overline{CP_1}$中點$\therefore \Delta AP_1O = \Delta AOC, \Delta POP_1 = \Delta POC$,

故四邊形$AOPP_1$面積$=$四邊形$AKPP_1$面積$+\Delta POK$面積$=$四邊形$AKPP_1$面積

$+\Delta AP_2K$面積$=\frac{1}{3}\Delta ABC$面積;即$\overline{PP_1}, \overline{PP_2}$將$\Delta ABC$三等分,故$\overline{PP_1}, \overline{PP_2}$合於所求

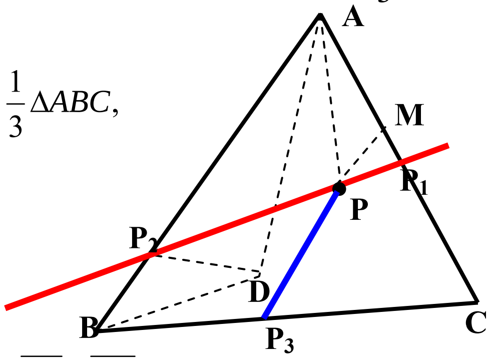
[小結]:1.以上三種方法雖都可過邊上定點找出一組"最佳分割線",但<方法一>往往受限於定點至頂點線段長與邊長之比(見[附件(二)]),故以<方法二><方法三>較佳

2.又<方法一><方法二>都利用了定點為梯形頂點時,產生「左面積」=「右面積」的特性而求得的,但若P點不再為梯形的頂點時(即P在三角形內部或外部),則以「共角定理」法為佳

3.因為不論定點P是視為轉換後之等面積三角形的頂點或是$\overline{BP}\cdot\overline{BP_1}=\frac{1}{3}\overline{BC}\cdot\overline{BA}$都具唯一性,因而只可作得一組"最佳分割線"且其圖狀為三個三角形區或兩三角形區一四邊形區

(三)、 P為ΔABC內部之一點時:〈共角定理法〉

[想法]:如若能過定點P作出一直線,從原三角形分出一三角形,使其面積等於原三角形的$\frac{1}{3}$;其次再過P點將剩下的多邊形面積二等分



[分析]:1.若P在ΔABC內部,而$\overleftrightarrow{PP_1}$交$\overline{AB}, \overline{AC}$於$P_2$及$P_1$且$\Delta AP_1P_2=\frac{1}{3}\Delta ABC$,

則$\frac{\Delta AP_1P_2}{\Delta ABC}=\frac{\overline{AP_2}\times\overline{AP_1}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{1}{3}$

2.$\because \overline{AP_2}\times\overline{AP_1}=\frac{1}{3}\overline{AC}\times\overline{AB}, \therefore$取$\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AC}$

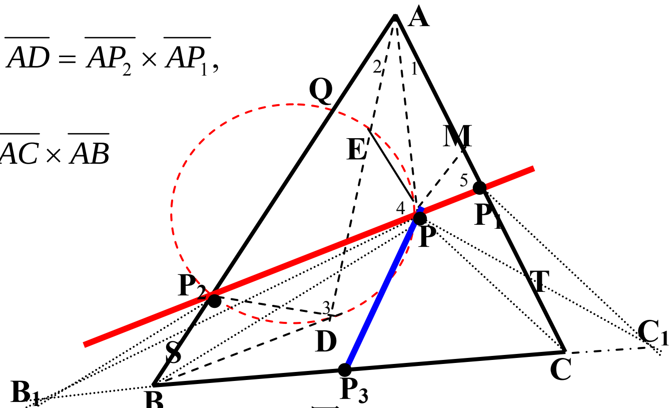
3.設法作得$\Delta ABD \sim \Delta APM \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AM}\times\overline{AB}=\overline{AP}\times\overline{AD}$

4.作得$\Delta ADP_2 \sim \Delta AP_1P \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}=\frac{\overline{AP_2}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AP}\times\overline{AD}=\overline{AP_2}\times\overline{AP_1}$,

可得$\overline{AM}\times\overline{AB}=\overline{AP_2}\times\overline{AP_1}$,即$\overline{AP_2}\times\overline{AP_1}=\frac{1}{3}\overline{AC}\times\overline{AB}$

$\Rightarrow \Delta AP_1P_2=\frac{1}{3}\Delta ABC$

5.設法作得$\overline{PP_3}$平分四邊形BCP_1P_2面積



(圖一)

[作法]:1.連$\overline{AP}$,取$\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AC}$,連$\overline{MP}$

2.以$\overline{AB}$為一邊,作$\Delta ABD \sim \Delta APM$,且使$D$點落於$\Delta ABC$之內部

3.作$\overline{PE} // \overline{AC}$,交$\overline{AD}$於$E$　4.作一圓過P、E、D三點,交$\overline{AB}$於P_2,連$\overleftrightarrow{PP_2}$,交$\overline{AC}$於$P_1$

5.連$\overline{PC}, \overline{PB}$,作$\overline{P_2B_1} // \overline{PB}, \overline{P_1C_1} // \overline{PC}$,取$\overline{B_1C_1}$中點$P_3$,連$\overline{PP_3}$,則$\overline{P_1P_2}, \overline{PP_3}$即為所求。

[証明]:1.$\because \Delta ABD \sim \Delta APM, \therefore \angle 1 = \angle 2$,又$\because P$、$E$、$P_2$ D四點共圓,$\therefore \angle 3 = \angle 4$,且$\because \overline{PE} // \overline{AC}$,

$\therefore \angle 4 = \angle 5 = \angle 3$, 故$\Delta ADP_2 \sim \Delta AP_1P$, $\therefore \dfrac{\overline{AP_2}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$, 即$\overline{AP_2} \times \overline{AP_1} = \overline{AD} \times \overline{AP}$

2. $\because \Delta ABD \sim \Delta APM$ $\therefore \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$ 即$\overline{AB} \times \overline{AM} = \overline{AD} \times \overline{AP}$

故$\overline{AP_2} \times \overline{AP_1} = \overline{AB} \times \overline{AM} = \dfrac{1}{3}\overline{AC} \times \overline{AB}$

3. $\because \angle BAC = \angle BAC$ $\therefore \dfrac{\Delta AP_2P_1}{\Delta ABC} = \dfrac{\overline{AP_2} \times \overline{AP_1}}{\overline{AC} \times \overline{AB}} = \dfrac{\frac{1}{3}\overline{AC} \times \overline{AB}}{\overline{AC} \times \overline{AB}} = \dfrac{1}{3}$, 即$\Delta AP_1P_2 = \dfrac{1}{3}\Delta ABC$

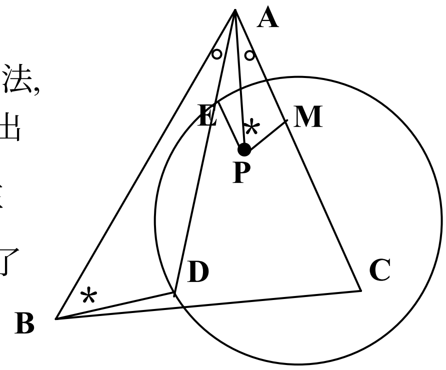
4. $\because$四邊形BB_1P_2P、四邊形CC_1P_1P皆為梯形, $\therefore \Delta PP_2S = \Delta B_1BS, \Delta PP_1T = \Delta C_1CT$,

又$\because \overline{B_1P_3} = \overline{C_1P_3}$ $\therefore \Delta B_1PP_3 = \Delta C_1PP_3$, 故四邊形$BP_3PP_2$面積 = 四邊形$CP_3PP_1$面積

$= \dfrac{1}{2}$四邊形CBP_2P_1面積 $= \dfrac{1}{3}\Delta ABC$面積, 即$\overline{P_1P_2}, \overline{PP_3}$合於所求

(註一): 仔細觀察上述之法, 我們發現要使用[共角定理]法與及三角形的AA相似性質, 所分割出的三角形面積可於等於原三角形面積的$\dfrac{1}{3}$時; 一定得使外接圓與以基準三角形(如(圖一)中之ΔAPM)所作得相似三角形(ΔABD)的原ΔABC之邊$\overline{AB}$有交點產生才可(如Q點與P_2點), 且要選擇P_2點作為分點, 否則就無法造成相似三角形(即$\Delta ADP_2 \sim \Delta AP_1P$)

(註二): 用此方法, 雖然可以找出過內部一點三等分三角形面積的方法, 不過它往往是嘗試數次後才得到的, 甚至有時無法找出分割出的三角形面積可以等於原三角形面積的$\dfrac{1}{3}$; 而且萬一P點恰在角平分線上或為內心時, 那就無法使用此一方法(如右圖); 為了解決此一問題, 我們展開了以下的討論:



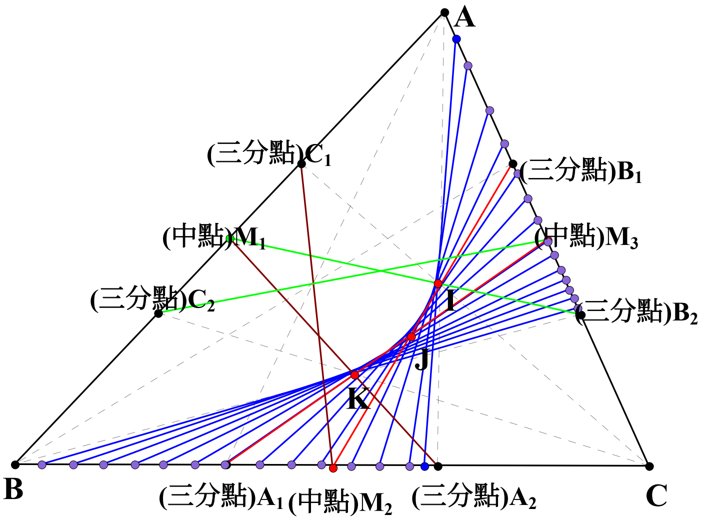
【討論一】:

[討論a]: 首先, 我們由「過定點P作出一直線, 從原三角形分出一三角形, 使其面積等於原三角形的$\dfrac{1}{3}$; 其次再過P點將剩下的四邊形面積二等分」的想法中, 決定先找出固定且能使其分割面積等於原三角形$\dfrac{1}{3}$的分割線, 如: (i)頂點與三分點連線, 計有$\overline{AA_1}, \overline{AA_2}, \overline{BB_1}, \overline{BB_2}, \overline{CC_1}, \overline{CC_2}$等六條($ii$)一邊中點與近對角三分點的連線, 計有$\overline{M_1A_2}, \overline{M_1B_2}, \overline{M_2B_1}, \overline{M_3C_2}, \overline{M_2C_1}, \overline{M_3A_1}$等六條; 此12條分割線都可分出一個三角形面積等於原三角形面積的$\dfrac{1}{3}$(如下圖二); 但依共角定理的觀念在$\overline{AI}, \overline{IJ}, \overline{JK}$左側及$\overline{BK}$的上方仍有過區域內定點而作得$\dfrac{1}{3}\Delta ABC$的分割線, 因而我們藉助了$GSP$的繪圖, 得到了(下圖二)的包絡線圖形

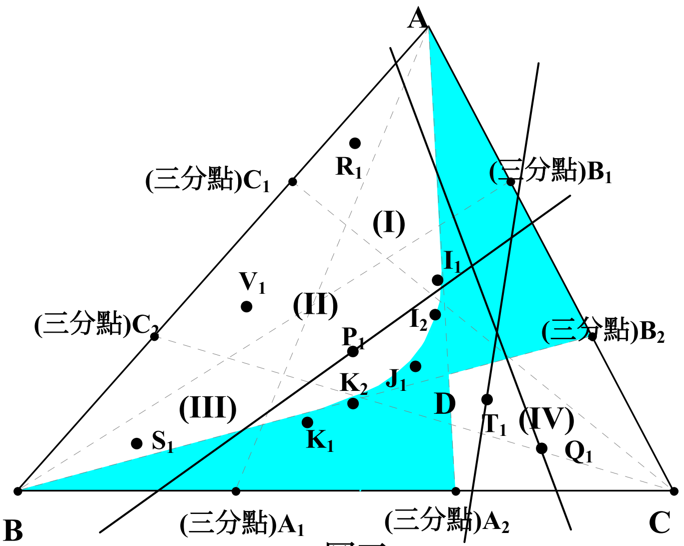
[討論b]: (見圖三)欲作過定點且含$\angle ACB$之三角形面積 $= \dfrac{1}{3}$原面積, 若

(i)過(IV)(即四邊形B_2DA_2C)T_1點之分割線不是全在三分線$\overline{AA_2}$右側而形成所分割含$\angle BCA$之三角形的面積不足原三角形面積的$\frac{1}{3}$,就是分割成含$\angle BCA$四邊形而非三角形,如此就與原想法不符

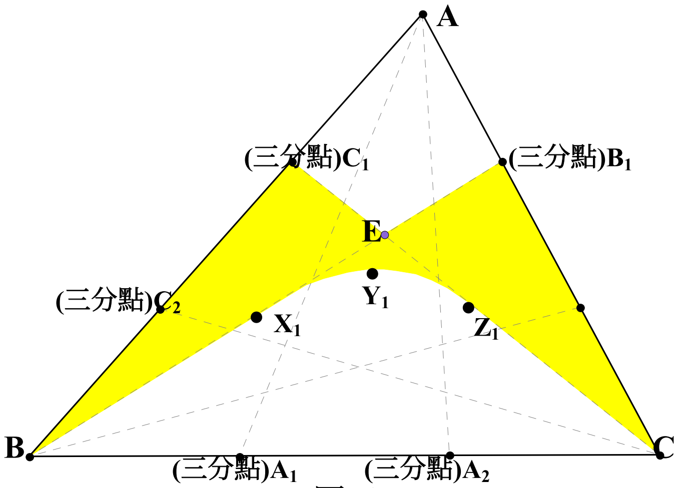
(ii)分割線過(I)區(即區域$AI_1I_2C_1$)中之R_1點、(III)區(即區域$BK_1K_2C_2$)中之S_1點或(II)區(即區域$C_1I_2J_1K_2C_2$)中之V_1點所分割之圖形有三:(a).含有$\angle BCA$之三角形(其三角形面積必大於$\frac{1}{3}$原三角形面積)(b).含$\angle BCA$的四邊形(c).不含$\angle BCA$之圖形;而此三種圖形也都與原想法不符。因而要形成含$\angle BCA$所分割ΔCP_1P_2面積$=\frac{1}{3}\Delta ABC$面積時,定點P勢必落在蝴蝶型$AB_2DA_2BK_1J_1I_1$的區域內 (如下圖三)



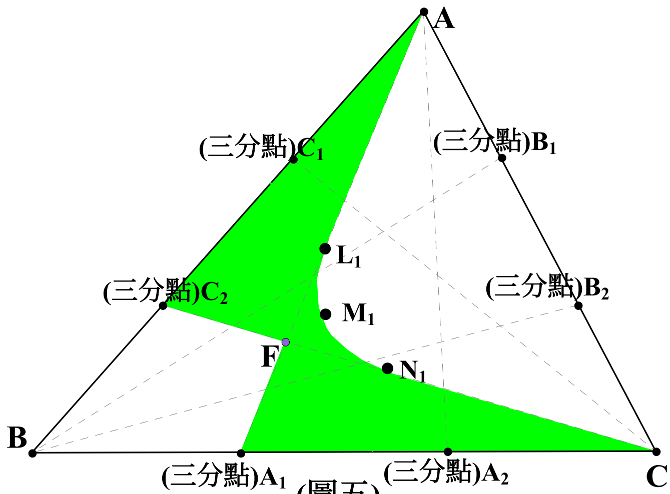
(圖二)



(圖三)



(圖四)



(圖五)

[討論c]:比照(二)之作法,可得過定點P所分割ΔAP_1P_2面積$=\frac{1}{3}\Delta ABC$面積的蝴蝶型$CB_1EC_1BX_1Y_1Z_1$的區域內(如上圖四)以及過定點P所分割ΔBP_1P_2面積$=\frac{1}{3}\Delta ABC$面積的蝴蝶型$CA_1FC_2AL_1M_1N_1$的區域內(如上圖五)

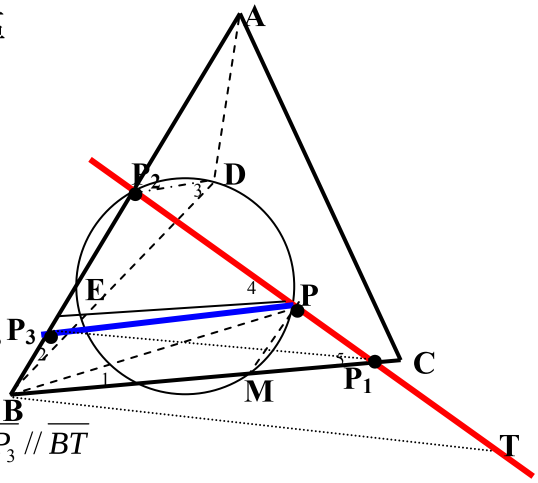
[討論d]:將(圖三)(圖四)(圖五)三圖疊合,可得(圖六),它將ΔABC分成三類區:

(i).單一區：即只能作出一組含某一頂角的$\frac{1}{3}$原三角形面積區之最佳分割線(如(圖六)中之(一)、(二)、(三)、(四)、(五)、(六)等六區)，而剩餘的四邊形區中，又可平分成兩三角形區或一三角形區一四邊形區或兩四邊形區；故其圖狀有：(i)三個三角形區(ii)兩三角形區一四邊形區(ii)一三角形區兩四邊形區

(ii).重疊區：即能作出兩組含某一頂角的$\frac{1}{3}$原三角形面積區之最佳分割線(如(圖六)中之(A)、(B)、(C)、(D)、(E)、(F)等六區)，而剩餘的四邊形區中，又可平分成兩三角形區或一三角形區一四邊形區或兩四邊形區；故其圖狀有：(i)三個三角形區(ii)兩三角形區一四邊形區(ii)一三角形區兩四邊形區

(iii).空白區：分成：

(a)能作作出兩組含某一頂角的$\frac{2}{3}$原三角形面積區之最佳分割線(如(圖六)中之(甲)、(乙)、(丙)區)：其因是為過(甲)區中之P_3點的分割線，不是含$\angle ABC$之三角形小於ΔACC_1或ΔBCB_2而小於$\frac{1}{3}$原三角形面積(如T_1分割線)，就是造成含$\angle ABC$之四邊形(如T_2分割線)，因而它們都能作出兩條分別含$\angle BAC$或$\angle ABC$又分割出$\frac{2}{3}$原三角形面積的分割線；其次再過定點將原$\frac{2}{3}$面積的三角形二等分即可。又因原$\frac{2}{3}$面積的三角形區，可分割成兩三角形區或一三角形區一四邊形區；故其圖狀有：(i)兩三角形區一四邊形區(ii)一三角形區兩四邊形區



[作法]：1.連$\overline{BP}$，取$\overline{BM}=\frac{2}{3}\overline{BC}$，連$\overline{MP}$

2.以$\overline{AB}$為一邊，作$\Delta ABD\sim\Delta PBM$，且使D點落於ΔABC之內部

3.作$\overline{PE}\,//\,\overline{BC}$，交$\overline{BD}$於$E$

4.作一圓過P、E、D三點，交$\overline{AB}$於P_2，連$\overleftrightarrow{PP_2}$，交$\overline{BC}$於$P_1$

5.延長$\overline{P_1P_2}$，取$\overline{P_2T}=2\overline{P_2P}$，連$\overline{BT}$作$\overline{P_1P_3}\,//\,\overline{BT}$

6.連$\overline{PP_3}$，則$\overline{P_1P_2}$，$\overline{PP_3}$即為所求。

(b).能作出六組含某一頂角的$\frac{1}{2}$原三角形面積區之次佳分割線(即三條分割線)(如(圖六)中之(中)區)：其因是為過(中)區中之P_4點的分割線，所分出的二區域面積都會介於原三角形面積的$\frac{1}{3}$與$\frac{2}{3}$之間(如T_3分割線)，因而它都能作出分別含$\angle BAC$或$\angle ABC$或$\angle ACB$且分割出$\frac{1}{2}$原三角形面積的分割線；其次再循平分線上之定點分別作面積比$1:2$或$2:1$的分割線

[作法]:1.連$\overline{AP}$,取$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AC}$,連$\overline{MP}$

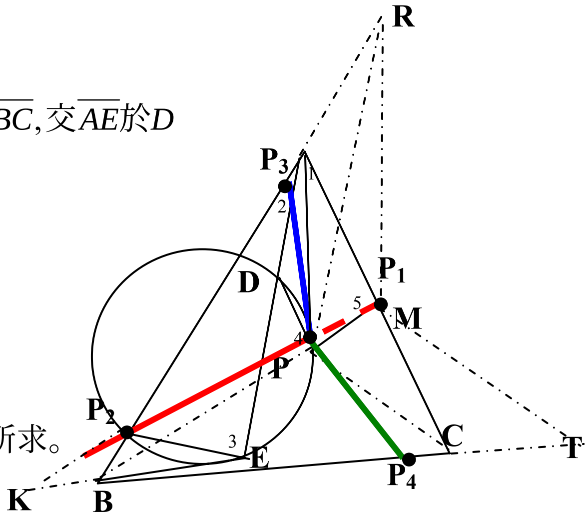
2.以$\overline{AB}$為一邊,作$\Delta ABE\sim\Delta APM$ 3.作$\overline{PD}//\overline{BC}$,交$\overline{AE}$於$D$

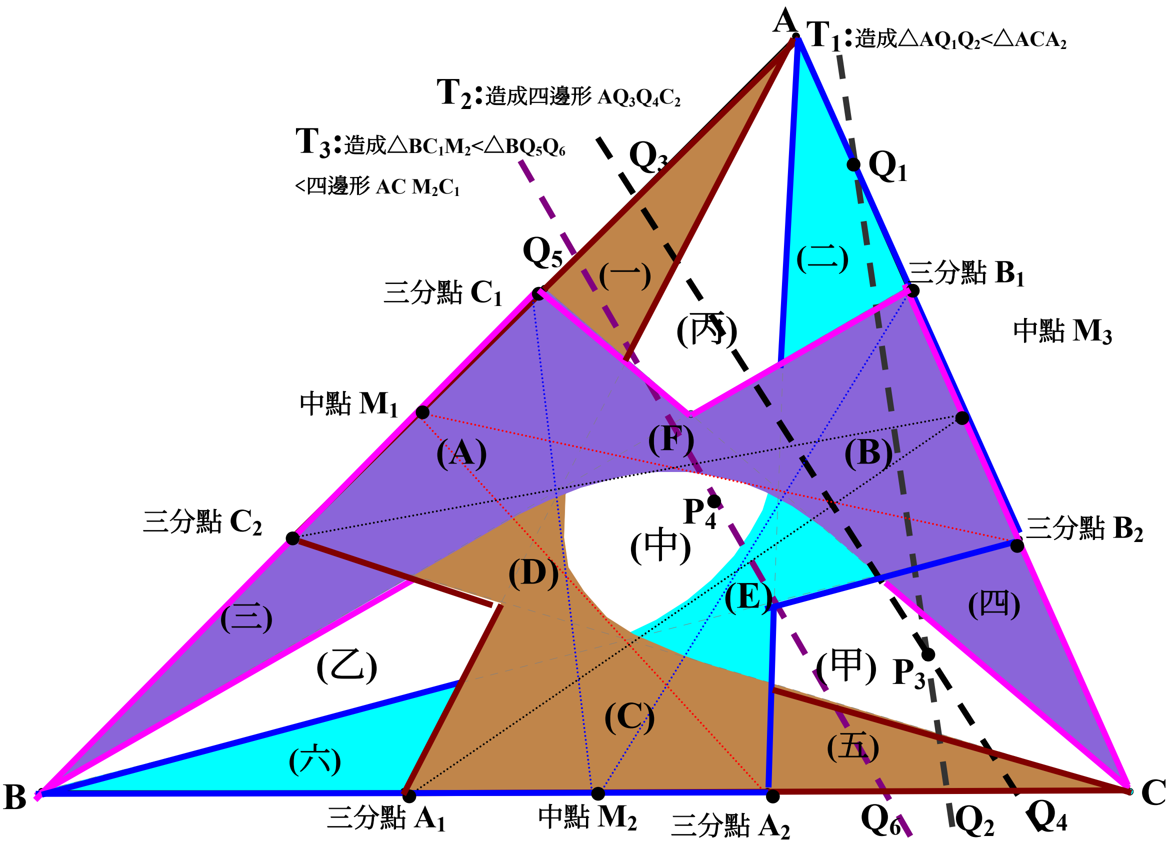
4.作一圓過P、E、D三點,交$\overline{AB}$於P_2,
連$\overleftrightarrow{PP_2}$,交$\overline{BC}$於$P_1$

5.作$\overline{P_1R}//\overrightarrow{AP}$交$\overrightarrow{BA}$於$R$,取$\overline{P_2P_3}=\frac{2}{3}\overline{P_2R}$,

6.連$\overline{PP_3},\overline{PB},\overline{PC}$作$\overline{P_1T}//\overline{PC},\overline{P_2K}//\overline{PB}$

7.取$\overline{P_4K}=\frac{2}{3}\overline{KT}$,連$\overline{PP_4}$,則$\overline{PP_2},\overline{PP_3},\overline{PP_4}$即為所求。





(圖六)

【小結一】:綜合上述討論,我們已可確立「過三角形內部一點三等分面積的作法」

(1).作三角形各邊之三等分線以及包絡線區

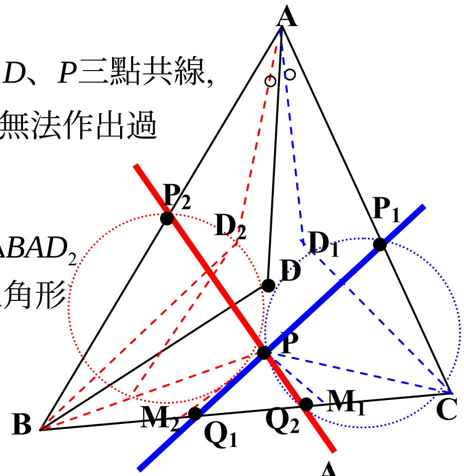
(2).確定定點是對何頂角作分割線?作出是何種面積比值的三角形?

(3).對所分出之三角形及剩餘四邊形作適當的比例分配

【小結二】:將過三角形內部定點所成的最佳分割線的組數及圖狀,整理如下:

	單一區 ((一)(二)(三)(四)(五)(六))	重疊區 ((A)(B)(C)(D)(E)(F))	空白區 ((甲)(乙)(丙)(中))
最佳分割線之組數	一組	二組	二組(註:(中)區無最佳分割線)
圖狀	(i)三個三角形區 (ii)兩個三角形區 一個四邊形區 (iii)一個三角形區 兩個四邊形區	(i)三個三角形區 (ii)兩個三角形區 一個四邊形區 (iii)一個三角形區 兩個四邊形區	(i)兩個三角形區 一個四邊形區 (ii)一個三角形區 兩個四邊形區

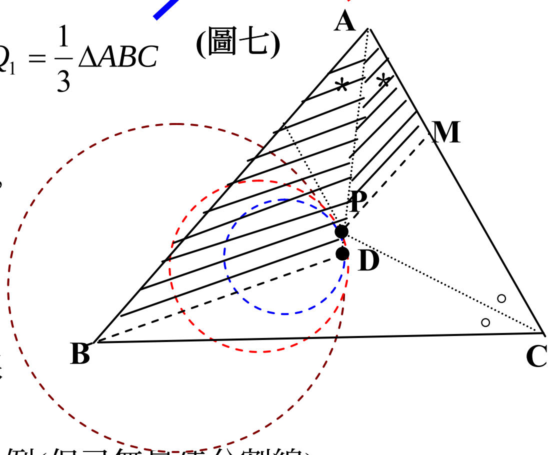
【討論(二)】:若定點位於角平分線上時:



(圖七)

[討論a]:(i).若P在$\angle BAC$的平分線上,但不為內心時,若A、D、P三點共線,此時作$\overline{PE} // \overline{AC}$,就不會與$\overline{AD}$相交於$E$點,如此即無法作出過$E$、$P$、$D$三點的圓,而找得分割點。

(ii).此時我們可將作法改以B為頂點作$\Delta BPM_2 \sim \Delta BAD_2$(如(圖七)中紅色虛線為以$B$頂點所作得的相似三角形而得$\Delta BP_2Q_2 = \frac{1}{3}\Delta ABC$或以$C$為頂點作$\Delta CPM_1 \sim \Delta CAD_1$(如(圖七)中藍色虛線為以$C$頂點所作得的相似三角形),而得$\Delta CP_1Q_1 = \frac{1}{3}\Delta ABC$



[討論b]:(i).若P在$\angle BAC$的平分線上,且為內心時,此時若依[共角定理]法作圖,不論是以A或B或C為基準,都無法使得外接圓固定(或所作的外接圓,無法與原三角形邊相交),而無法確知分割點的位置(即過P、D二點可作得無限個外接圓)

(ii).此時我們可利用比例中項或平行線截比例線段作圖,來確知分割點的位置

<比例中項法>: [註]:以內心P位於[討論一]之(中)區為例(但已無最佳分割線)

[分析]:1.若$\overline{P_2P_1}$為過P,且將在ΔABC二等分的直線,

則$\dfrac{\Delta AP_2P_1\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}} = \dfrac{1}{2}$,又$\because P$為內心,$\therefore P$至$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$等距離。

2.若設P至$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$的距離為r,則ΔAP_2P_1面積$=\Delta AP_2P$面積$+\Delta APP_1$面積

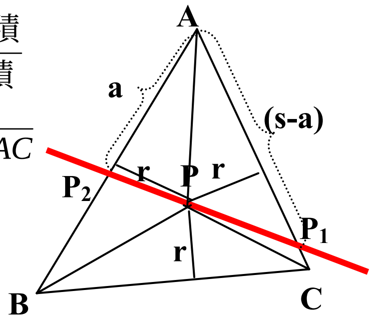
$=\dfrac{1}{2}r(\overline{AP_2}+\overline{AP_1})$,又因$\Delta ABC$面積$=\dfrac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$,

$$\therefore \frac{\Delta AP_2P_1\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}r(\overline{AQ}+\overline{AP_1})}{\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})},\text{故}\overline{AP_2}+\overline{AP_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$$

3.設$\overline{AP_2}=a,\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})=s$,則$\overline{AP_1}=s-a$,又因$\frac{\Delta AP_2P_1面積}{\Delta ABC面積}$

$=\frac{\overline{AP_2}\times\overline{AP_1}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}$(共角定理)$=\frac{a\times(s-a)}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{1}{2}$,$\therefore a\times(s-a)=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}$

4.由於$a\times(s-a)=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}$,$\therefore \sqrt{a\times(s-a)}=\sqrt{\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}}$,



故可由比例中項(y)作圖,先得$y^2=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}$,再逆推$a\times(s-a)=y^2$,而得$\overline{AP_2}$及$\overline{AP_1}$

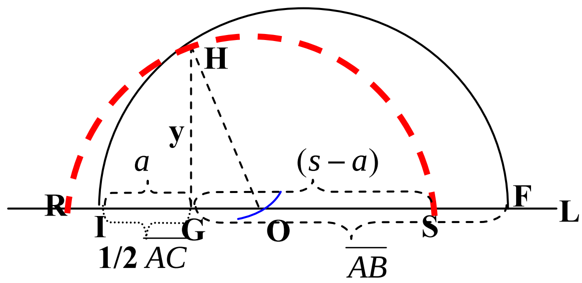
[作法]:1.在L上取F、G、I三點,使$\overline{FG}=\overline{AB},\overline{GI}=\frac{1}{2}\overline{AC}$,

以$\overline{IF}$為直徑,作一半圓

2.過G作$\overline{GH}\perp L$交半圓於H

3.以H為圓心,$\frac{1}{4}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$為半徑(即$\frac{1}{2}s$),

畫弧交L於O



4.以O為圓心,$\overline{OH}$為半徑,作半圓交L於R,S兩點,則$\overline{GR}=a,\ \overline{GS}=s-a$

$(\because \overline{GH}=\sqrt{a(s-a)},\overline{OH}=\frac{1}{2}s$,且$\overline{GH}\perp L,\therefore \overline{OH}^2=\overline{GH}^2+\overline{GO}^2$,故$\overline{GO}^2=\frac{1}{4}s^2-a(s-a)$

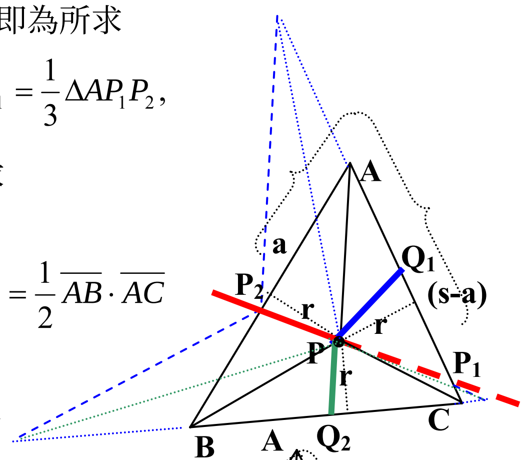
$=\frac{s^2-4as+4a^2}{4}=\frac{(s-2a)^2}{4},\therefore \overline{GO}=\frac{s-2a}{2}=\frac{1}{2}s-a,$

而$\overline{GR}=\overline{OR}-\overline{OG}=\frac{1}{2}s-(\frac{1}{2}s-a)=a$,且$\overline{GS}=\overline{RS}-\overline{GR}=2\cdot\frac{1}{2}s-a=s-a)$

5.ΔABC中,在$\overline{AB}$上取$\overline{AP_2}=a,\overline{AP_1}=s-a$,連$\overleftrightarrow{P_2P_1}$,則$\overleftrightarrow{P_2P_1}$即為所求

6.仿照P為ΔAP_1P_2及四邊形CBP_1P_2邊上之一點,作$\Delta PP_1Q_1=\frac{1}{3}\Delta AP_1P_2$,

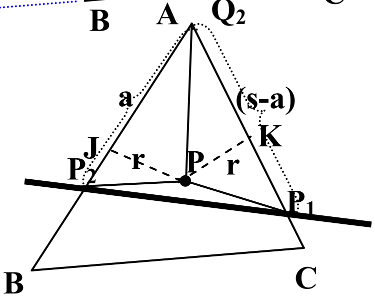
四邊形$PP_1CQ_2=\frac{1}{3}$四邊形CBP_1P_2,則$\overline{PQ_1},\overline{PQ_2}$即為所求



[証明]:1.由作圖中知,$\overline{AP_2}=a,\overline{AP_1}=s-a,\therefore \overline{AP_2}\times\overline{AP_1}=a(s-a)=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

故依共角定理,得$\frac{\Delta AP_2P_1}{\Delta ABC}=\frac{\overline{AP_2}\times\overline{AP_1}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{1}{2}$

$\therefore \Delta AP_2P_1=\frac{1}{2}\Delta ABC$



2.假設$\overleftrightarrow{P_2P_1}$不過$P$點時,作$\overline{PJ}\perp\overline{AB}$交$\overline{AB}$於$J$,$\overline{PK}\perp\overline{AC}$交$\overline{AC}$於$K$

$\because P$為內心$\therefore \overline{PJ}=\overline{PK}=r$,且$\Delta ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$

又$\because \overline{AP_2}=a,\overline{AP_1}=s-a,s=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})\therefore \overline{AP_2}+\overline{AP_1}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$

故$\Delta AP_2P+\Delta APP_1=\frac{1}{2}r\cdot\overline{AP_2}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{AP_1}=\frac{1}{2}r(\overline{AP_2}+\overline{AP_1})=\frac{1}{2}r[\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})]=\frac{1}{2}\Delta ABC$則$\Delta P_2PP_1=\Delta AP_2P_1-(\Delta AP_2P+\Delta APP_1)$

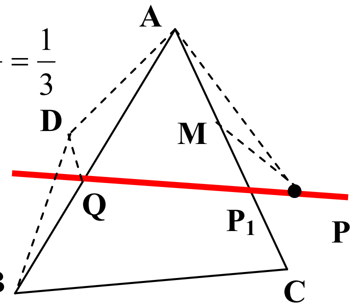
$=\frac{1}{2}\Delta ABC-\frac{1}{2}\Delta ABC=0$故$P$點必落在$\overleftrightarrow{P_2P_1}$上,即$\overleftrightarrow{P_2P_1}$過$P$將$\Delta ABC$二等分

3.$\because\ \Delta PP_1Q_1=\frac{1}{3}\Delta AP_1P_2$,四邊形$PP_1CQ_2=\frac{1}{3}$四邊形$CBP_2P_1$,且$\Delta AP_1P_2=$四邊形$CBP_2P_1$

$\therefore$四邊形$AP_2PQ_1=\frac{2}{3}\Delta AP_1P_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\Delta ABC=\frac{1}{3}\Delta ABC=$四邊形$BP_2PQ_2$,又$\Delta PP_1Q_1$

$+$四邊形$PP_1CQ_2=\frac{1}{3}(\Delta AP_1P_2+$四邊形$CBP_1P_2)=\frac{1}{3}\Delta ABC$故$\overline{PP_2},\overline{PQ_2},\overline{PQ_1}$合於所求

(四)、 P為ΔABC外部之一點時:



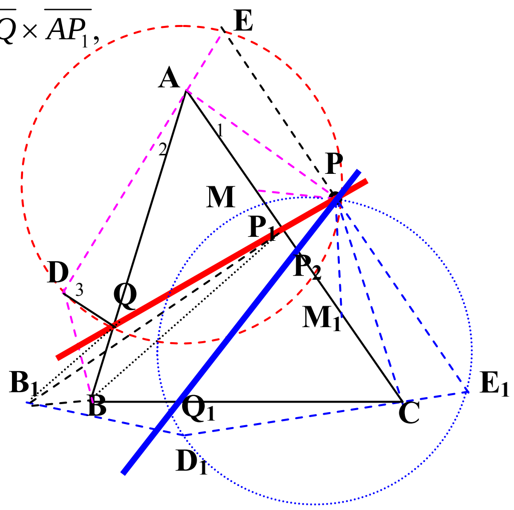
[分析]:1.若P在ΔABC外部,而$\overleftrightarrow{PP_1}$交$\overline{AB},\overline{AC}$於$Q$及$P_1$,則$\frac{\Delta AP_1Q}{\Delta ABC}=\frac{\overline{AQ}\times\overline{AP_1}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{1}{3}$

2.$\because\ \overline{AQ}\times\overline{AP_1}=\frac{1}{3}\overline{AC}\times\overline{AB},\therefore$ 取$\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AC}$

3.設法作得$\Delta ABD\sim\Delta APM\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AM}\times\overline{AB}=\overline{AP}\times\overline{AD}$

4.若再作得$\Delta ADQ\sim\Delta AP_1P\Rightarrow\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{AD}}\Rightarrow\overline{AP}\times\overline{AD}=\overline{AQ}\times\overline{AP_1}$,

可得$\overline{AM}\times\overline{AB}=\overline{AQ}\times\overline{AP_1}$,即$\overline{AQ}\times\overline{AP_1}=\frac{1}{3}\overline{AC}\times\overline{AB}$



[作法]:1.連$\overline{AP}$,取$\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AC}$,連$\overline{MP}$

2.以$\overline{AB}$為一邊,作$\Delta ABD\sim\Delta APM$,
且使D點落於ΔABC之外部

3.作$\overline{PE}\,//\,\overline{AC}$　4.作一圓過P、E、D三點,交$\overline{AB}$於Q

5.連$\overline{PQ}$且交$\overline{AC}$於P_1,連$\overline{CP}$,取$\overline{CM_1}=\frac{1}{2}\overline{P_1C}$,連$\overline{PM_1}$

6.仿上述作法,作$\overline{PQ_1}$平分四邊形P_1QBC,則$\overleftrightarrow{PQ},\overleftrightarrow{PQ_1}$即為所求

[証明]:1.$\because\ \Delta ABD\sim\Delta APM,\therefore\ \angle 1=\angle 2$,又$\because$ P、E、D、Q四點共圓

且$\because\ \overline{PE}\,//\,\overline{AC},\therefore\ \angle 3+\angle EPQ=\angle AP_1P+\angle EPQ=180^\circ$,故$\angle 3=\angle AP_1P$

即$\Delta ADQ\sim\Delta AP_1P,\therefore\ \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$,故$\overline{AQ}\times\overline{AP_1}=\overline{AD}\times\overline{AP}$

2.$\because\ \Delta ABD\sim\Delta APM,\therefore\ \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$,即$\overline{AB}\times\overline{AM}=\overline{AD}\times\overline{AP}$,故$\overline{AQ}\times\overline{AP_1}=\overline{AB}\times\overline{AM}$

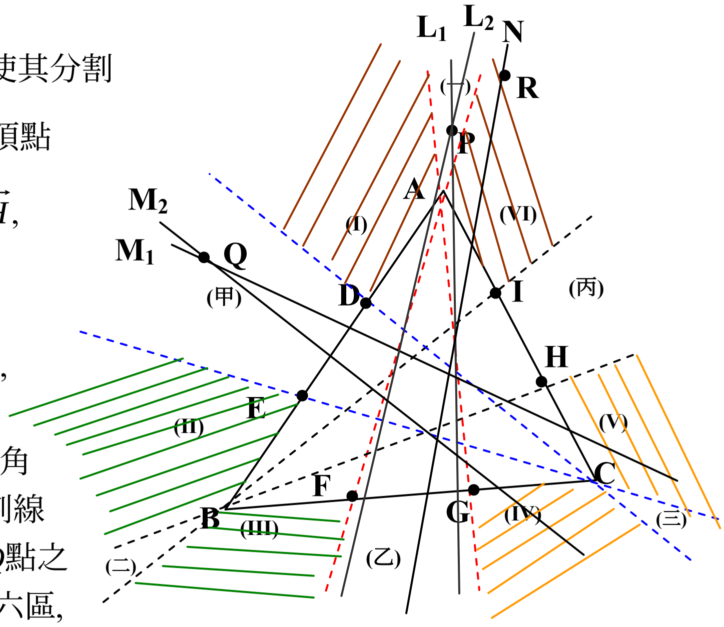
$=\frac{1}{3}\overline{AC}\times\overline{AB}$

$3.\because \angle BAC=\angle BAC \therefore \dfrac{\Delta AQP_1}{\Delta ABC}=\dfrac{\overline{AQ}\times\overline{AP_1}}{\overline{AC}\times\overline{AB}}=\dfrac{\frac{1}{3}\overline{AC}\times\overline{AB}}{\overline{AC}\times\overline{AB}}=\dfrac{1}{3}$,即$\Delta AP_1Q=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$

4.同理,$\because \overleftrightarrow{PQ_1}$平分四邊形$P_1QBC$面積$\therefore \Delta CQ_1P_2$面積$=$五邊形$P_1QBQ_1P_2$面積

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\Delta ABC$面積$=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$面積

[討論a]:首先,我們仍然先找出固定且能使其分割面積等於原三角形$\dfrac{1}{3}$的分割線,即頂點與三分點連線,計有$\overleftrightarrow{AF},\overleftrightarrow{AG},\overleftrightarrow{BI},\overleftrightarrow{BH}$,$,\overleftrightarrow{CD},\overleftrightarrow{CE}$等六條;而將三角形外部分成三類區:計有(一)(二)(三)(甲)(乙)(丙)$(I)(II)(III)(IV)(V)(VI)$等區,其中(一)(二)(三)(甲)(乙)(丙)等六區都作得兩條過定點P且含某頂角又為原三角形面積三分之一的分割線(如過(一)區P點之L_1、L_2,過(甲)區Q點之M_1、M_2);而$(I)(II)(III)(IV)(V)(VI)$六區,都只可作得一條含某頂角且分割出為原三角形面積三分之一的三角形的分割線(過(VI)區R點之N);次之,再將剩餘四邊形面積二等分



[討論b]:不論過外部定點P能作得一條或兩條含某頂角的$\dfrac{1}{3}$面積分割線,都只可作得一組"最佳分割線",且其圖狀為兩三角形區一四邊形區或一三角形區兩四邊形區

【第二部分】:四邊形

(一)、 P為四邊形$ABCD$之頂點時(即$P=C$):

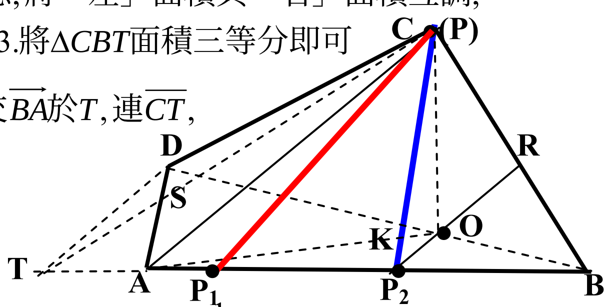
[分析]:1.可仿照P為三角形頂點的作法,先利用對角線($\overline{AC}$)將四邊形分成兩個三角形

2.再利用梯形中「左」面積=「右」面積的觀念,將「左」面積與「右」面積互調,可得與原四邊形面積相等的三角形(ΔCBT)　3.將ΔCBT面積三等分即可

[作法]:1.連$\overline{AC},\overline{BD}$,取$\overline{BO}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}$　　2.作$\overline{DT}\,//\,\overline{AC}$交$\overrightarrow{BA}$於$T$,連$\overline{CT}$,

3.過O作$\overline{P_2R}\,//\,\overline{AC}$交$\overline{AB}$,$\overline{BC}$於$P_2$、$R$

4.取$\overline{TP_2}$中點P_1,連$\overline{PP_1}$,則$\overline{PP_1}$與$\overline{PP_2}$即為所求。



[証明]:1.$\because \overline{BO}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}$中點,$\therefore \Delta COB$面積$=\dfrac{1}{3}\Delta BCD$面積,$\Delta BOA$面積$=\dfrac{1}{3}\Delta BDA$面積

故ΔCOB面積$+\Delta BOA$面積$=\dfrac{1}{3}(\Delta BCD$面積$+\Delta BDA$面積$)=\dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積

2.$\because \overline{P_2R}\,//\,\overline{AC}\,//\,\overline{DT} \therefore \Delta COK$面積$=\Delta AP_2K$面積,$\Delta CDS$面積$=\Delta AST$面積

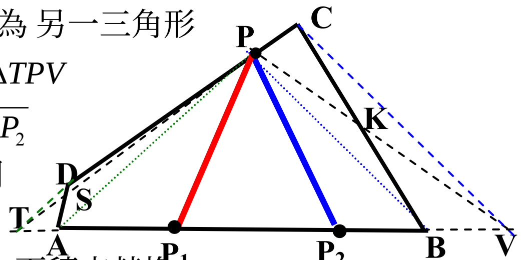
故四邊形$BCDA$面積$=$四邊形$CSAB$面積$+\Delta CDS$面積$=$四邊形$CSAB$面積
$+\Delta AST$面積$=\Delta BCT$面積,又$\because \Delta COK$面積$=\Delta AP_2K$面積,
$\therefore \Delta COB$面積$+\Delta BOA$面積$=\Delta COB$面積$+$四邊形$KOBP_2$面積$+\Delta KOP$面積
$=\Delta CBP_2$面積$=\frac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積

3.$\because P_1$為$\overline{TP_2}$中點,$\therefore \Delta CP_1P_2$面積$=\frac{1}{2}\Delta CTP_2$面積$=\frac{1}{2}(\Delta BCT$面積$-\Delta CBP_2$面積$)$
$=\frac{1}{2}(\Delta BCT$面積$-\frac{1}{3}\Delta BCT$面積$)=\frac{1}{3}\Delta BCT$面積$=\frac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積

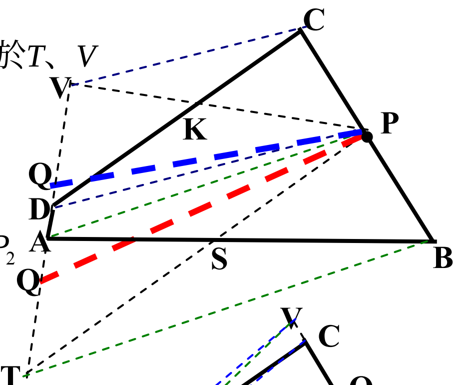
即$\overline{PP_1}$與$\overline{PP_2}$三等分四邊形$ABCD$面積$\therefore \overline{PP_1}$與$\overline{PP_2}$合於所求
(*同理:若已知條件改成$P=A$或$P=B$或$P=D$亦可)

[小結]:因為仿照P為三角形頂點的作法,先利用對角線將四邊形分成兩個三角形,
再將$\frac{2}{3}$四邊形面積的三角形兩等分,故其圖狀為三個三角形區或兩三角形區
一四邊形區,且只有一組"最佳分割線"(即兩條分割線)

(二)、 P為四邊形$ABCD$邊上之一點時:

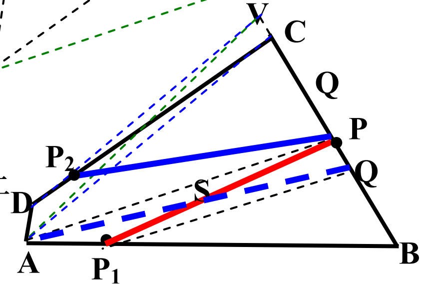


[分析]:1.若P為四邊形$ABCD$邊上之一點時,可將P視為 另一三角形
的頂點(如ΔTPV),且在四邊形$ABCD$面積$=\Delta TPV$
面積時,只須取$\overline{TV}$三等分點P_1,P_2,再連$\overline{PP_1},\overline{PP_2}$
2.要使四邊形$ABCD$面積$=\Delta TPV$面積,可利用
梯形兩對角線,所分割的「上」、「下」、
「左」、「右」四面積中的「左」面積=「右」面積來替換。



[作法]:1.連$\overline{AP},\overline{BP}$,過$C$、$D$作$\overline{DT}\,//\,\overline{AP}$ 作$\overline{CV}\,//\,\overline{BP}$,分別交$\overleftrightarrow{AB}$於$T$、$V$
2.取$\overline{TV}$三等分點P_1,P_2,連$\overline{PP_1},\overline{PP_2}$,則$\overline{PP_1},\overline{PP_2}$即為所求。

[証明]:1.$\because \overline{AP}\,//\,\overline{TD},\overline{BP}\,//\,\overline{CV},\therefore \Delta DSP=\Delta ATS,\Delta KCP=\Delta BKV,$
2.$\because P_1,P_2$為$\overline{TV}$上的三等分點,$\therefore \Delta TP_1P=\Delta P_1PP_2=\Delta VPP_2$
$=$四邊形$AP_1PS+\Delta PSD=$四邊形$BP_2PK+\Delta PKC$
$=$四邊形$BP_2PC=$四邊形$APDT$,故$\overline{PP_1},\overline{PP_2}$,
將ΔABC三等分,即$\overline{PP_1},\overline{PP_2}$合於所求



[討論1.]:在上述[作法]步驟1中,若P不在$\overline{CD}$上時,則有可能使$\overline{TV}$上
之三等分點Q_1,Q_2都不落於$\overline{AD}$上,而無法將$ABCD$面積
三等分此時可改變作法如下:

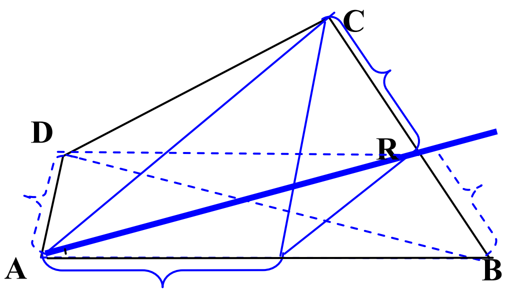
[作法]:1.作分割線$\overrightarrow{AQ_1}$分出ΔAQ_1B面積$=\frac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積,交$\overline{BC}$於Q_1
2.連$\overline{AP}$,過Q_1作$\overline{Q_1P_1}\,//\,\overline{AP}$交$\overline{AB}$於$P_1$,連$\overline{PP_1}$

3.作$\overline{PP_2}$平分五邊形AP_1PCD面積,則$\overline{PP_1},\overline{PP_2}$即為所求。
(作法、証明、討論見[附件(三)])

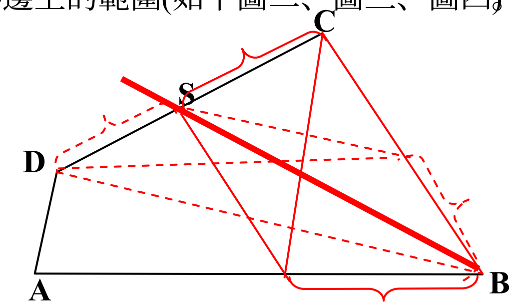
[討論2]:1.綜合上述[作法]與[討論],我們得知:過四邊形邊上所作的三等分線,都是利用梯形「左」面積 =「右」面積互調而得的

2.是否P為$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$邊上任一點,都可利用三等分線$\overleftrightarrow{AR},\overleftrightarrow{BS},\overleftrightarrow{CT},\overleftrightarrow{DU}$,作過$P$點的一直線來取得$\frac{1}{3}$四邊形$ABCD$的面積呢?

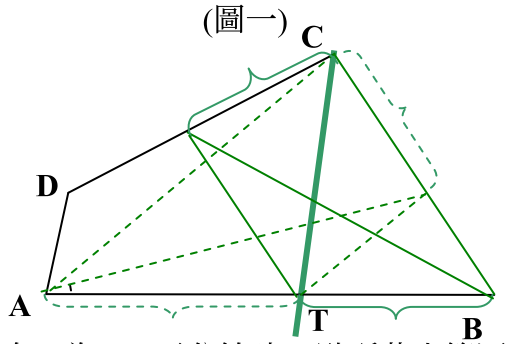
從上述的討論中發現,若以$\overrightarrow{AR}$三等分線為梯形的對角線時,可得以$\angle BAD$二鄰邊為腰(亦有可能為鄰邊的一部分)所作的兩個最大梯形(如下圖一),而P點若落於兩個最大梯形的腰上時,都可利用梯形「左」面積 =「右」面積,作得過P之三等分線$\overleftrightarrow{PQ}$ 同理:分別作各邊的三等分線$\overleftrightarrow{BS},\overleftrightarrow{CT},\overleftrightarrow{DU}$,也都可以找出$P$點落於四邊形$ABCD$邊上的範圍(如下圖二、圖三、圖四)



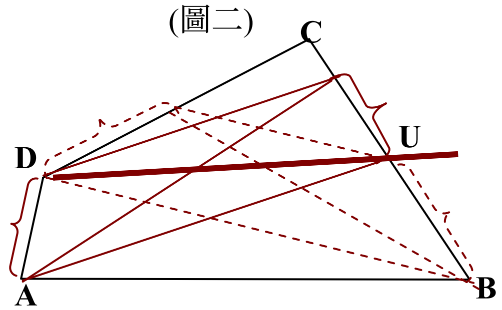
(藍色︸為 AR 平分線時,P 點所落之範圍)
(圖一)



(紅色︸為 BS 平分線時,P 點所落之範圍)
(圖二)



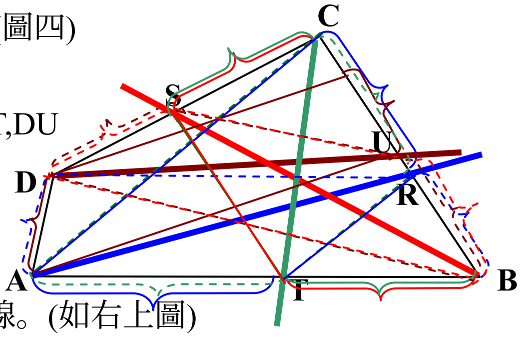
(綠色︸為 CT 平分線時,P 點所落之範圍)
(圖三)



(棕色︸為 DU 平分線時,P 點所落之範圍)
(圖四)

綜合以上四圖得知:

(i)不管 P 為四邊形 ABCD 邊上的任意點,都可利用 AR,BS,CT,DU 等三等分線,作過 P 點的一直線,取得$\frac{1}{3}$ABCD 的面積。(如右圖)再將剩餘之面積二等分即可



(ii)位於四邊形 ABCD 邊上的定點 P,都只可作出一組三等分線。(如右上圖)

[小結]:因為不論P為四邊形$ABCD$邊上之任意點,都可利用$\overline{AR},\overline{BS},\overline{CT},\overline{DU}$等三等分線,取得$\frac{1}{3}ABCD$面積(為一三角形或一四邊形),再將$\frac{2}{3}$四邊形面積的四邊形區兩等分,故其圖狀為三個三角形區或兩三角形區一四邊形區或一三角形區兩四邊形區;且只有一組"最佳分割線"

(三) 若P為四邊形$ABCD$的內部一點時:

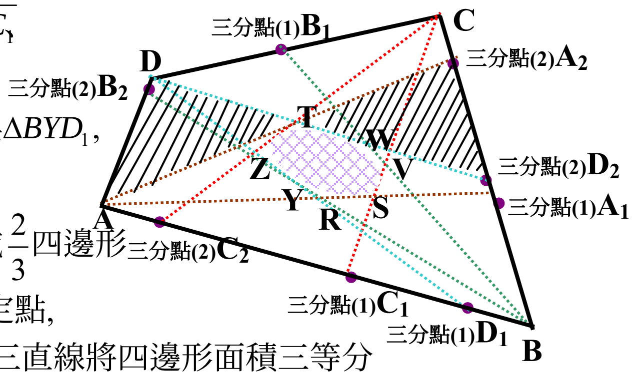
我們比照過三角形內部定點P中之[討論一]的(討論d)的結論,

分別作出過頂點的八條三分線$\overline{AA_1}\ \overline{AA_2}\ \overline{BB_1}\ \overline{BB_2}\ \overline{CC_1}$

$\overline{CC_2}\ \overline{DD_1}\ \overline{DD_2}$,可得三角形相對區分:$\Delta A_2TC$與

ΔATC_2,ΔB_1WD與ΔBWD_2,ΔATD與ΔA_2TD_2,ΔB_2YD與ΔBYD_1,

ΔA_1BR與ΔARD,ΔA_1SC與ΔASC_1,ΔC_1BV與ΔCVB_1,



(i)當定點P位於上述相對區域內,則可得分割出$\frac{1}{3}$或$\frac{2}{3}$四邊形面積的直線;而位於剩餘的區域(即包絡線區)之定點,

就改作面積的等分線。而與三角形討論同,可得三直線將四邊形面積三等分

(ii)除了三角形相對區外的剩餘區域$SVWTZYX$外,其餘區域都是兩組三角形相對區的重疊區,

因而此些重疊區都可作得兩組"最佳分割線"將四邊形面積三等分

(如圖(六)$-a$與圖(六)$-b$;圖(六)$-c$與圖(六)$-d$)

又因穿過其相對區域的直線中,可能與四邊形的鄰邊相交,也可能與四邊形的對邊相交,因此下列我們就依此二種情形,加以討論:

(A)若P位於四邊形內部,且面積三分線過相對區域又與四邊形二鄰邊相交

[分析]:1.$\because$ 面積三分線過相對區域又與四邊形二鄰邊相交

$\therefore$ 可將面積三分線與四邊形二鄰邊相交的邊,視為三角形的二邊

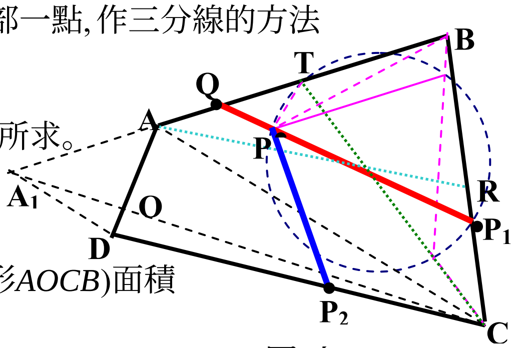
2.將四邊形$ABCD$面積轉換成相等面積的ΔA_1BC,再過內部定點作三角形面積三分線的作法

3.再將剩餘之五邊形,仿[附件(四)]過五邊形邊上一點將面積二等分即可

[作法]:1.作$\overline{A_1D}\,//\,\overline{AC}$,交$\overrightarrow{BA}$於$A_1$,連$\overline{CA_1}$　2.仿過三角形內部一點,作三分線的方法

3.連$\overleftrightarrow{PQ}$,交$\overline{BC}$於P_1

4.過P點作$\overline{PP_2}$平分五邊形$ADCP_1Q$,則$\overleftrightarrow{P_1Q}$,$\overline{PP_2}$即為所求。



圖(六)-a

[証明]:1.$\because\ \overline{A_1D}\,//\,\overline{AC}\ \therefore \Delta COD=\Delta AOA_1$

2.$\because\ \Delta QBP_1$面積$=\frac{1}{3}\Delta A_1BC$面積$=\frac{1}{3}(\Delta A_1OA+$四邊形$AOCB)$面積

$=\frac{1}{3}(\Delta COD+$四邊形$AOCB)$面積$=\frac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積

$\therefore \Delta AOA_1$面積$+$五邊形$OAQP_1C$面積$=\frac{2}{3}\Delta A_1BC$面積$=\frac{2}{3}$四邊形$ABCD$面積

故ΔCOD面積$+$五邊形$OAQP_1C$面積$=$五邊形AQP_1CD面積$=\frac{2}{3}$四邊形$ABCD$面積

3.$\because\ \overline{PP_2}$平分五邊形$AQP_1CD$面積$\therefore\ \overline{P_1Q},\overline{PP_2}$合於所求

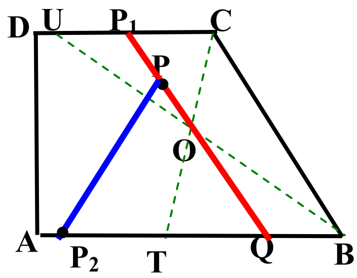
[討論]:由於三分線過相對區域又與四邊形的二鄰邊相交,故可得一三角形區,而所剩餘區域,為一四邊形區或一五邊形區;又四邊形區可平分成兩四邊形區或一三角形區一四邊形區,而五邊形區可平分成兩四邊形區或一四邊形區一五邊形區,因此其圖狀有:

(i)一三角形區兩四邊形區　　(ii)二三角形區一四邊形區

(iii)三個四邊形區　　(iv)二四邊形區一五邊形區

(B)若P位於四邊形內部,且平分線過相對區域又與四邊形對邊相交時,因為對邊可能平行也可能不平行,因此又分為下列兩種情況討論:

(a)對邊平行且平分線過相對區域又與四邊形對邊相交時:



[分析]:1.$\because$對邊平行且三分線過相對區域又與四邊形對邊相交

$\therefore$相對區域的三角形$\Delta P_1OU \sim \Delta QOB \Rightarrow \dfrac{\overline{P_1O}}{\overline{QO}} = \dfrac{\overline{UO}}{\overline{BO}}$

2.利用面積的重疊關係$\Rightarrow \Delta UOC$面積$= \Delta BOT$面積

3.利用等角(對頂角相等)定理中面積比,可得$\dfrac{\Delta UOC\text{面積}}{\Delta TOB\text{面積}}$

$= \dfrac{\overline{UO}\times\overline{CO}}{\overline{BO}\times\overline{TO}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{TO}}\times\dfrac{\overline{UO}}{\overline{BO}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{TO}}\times\dfrac{\overline{P_1O}}{\overline{QO}} = 1 \Rightarrow \Delta P_1OC$面積$= \Delta TOQ$面積。

4.將ΔP_1OC與ΔTOQ互調, 再仿過四邊形AQP_1D邊上定點,將面積二等分即可。

[作法]:1.過C,D分別作$\overline{CT},\overline{BU}$,得$\Delta BCU = \Delta BCT = \dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積,且$\overline{CT},\overline{BU}$相交於$O$

2.連$\overleftrightarrow{PO}$,分別交$\overline{AB},\overline{CD}$於$Q,P_1$; 3.過$P$作$\overline{PP_2}$平分四邊形$AQP_1D$,則$\overleftrightarrow{P_1Q},\overline{PP_2}$即為所求。

[証明]:1.$\because \overleftrightarrow{BU},\overleftrightarrow{CT}$皆為四邊形$ABCD$面積的三等分線$\therefore \Delta CBT = \dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積$= \Delta BCU$,

故ΔCOU面積$= \Delta BCU$面積$- \Delta BOC$面積$= \Delta BCT$面積$- \Delta BOC$面積$= \Delta BOT$面積

2.在ΔCOU與ΔBOT中 $\because \angle COU = \angle TOB \therefore \dfrac{\Delta UOC\text{面積}}{\Delta TOB\text{面積}} = \dfrac{\overline{CO}\times\overline{UO}}{\overline{TO}\times\overline{BO}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{TO}}\times\dfrac{\overline{UO}}{\overline{BO}} = 1$

3.在ΔCOP_1與ΔTOQ中$\because \angle COP_1 = \angle TOQ, \angle P_1CO = \angle QTO \therefore \Delta COP_1 \sim \Delta TOQ$故$\dfrac{\overline{P_1O}}{\overline{QO}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{TO}}$

即$\dfrac{\overline{P_1O}}{\overline{QO}}\times\dfrac{\overline{DO}}{\overline{UO}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{TO}}\times\dfrac{\overline{DO}}{\overline{UO}} = 1$

又$\because \angle COP_1 = \angle TOQ \therefore \dfrac{\Delta P_1OC\text{面積}}{\Delta QOT\text{面積}} = \dfrac{\overline{CO}\times\overline{P_1O}}{\overline{TO}\times\overline{QO}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{TO}}\times\dfrac{\overline{P_1O}}{\overline{QO}} = 1$,故$\Delta COP_1$面積$= \Delta TOQ$面積

4.$\because \Delta CBT$面積$=$四邊形$BCOQ$面積$+ \Delta TOQ$面積$=$四邊形$BCOQ$面積$+ \Delta COP_1$面積

$=$四邊形BCP_1Q面積$= \dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積

5.$\because \overline{PP_2}$平分四邊形$AQP_1D \therefore \Delta PP_2Q$面積$=$五邊形$PP_1DAP_2$面積

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}$四邊形$ABCD$面積$= \dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積,即$\overleftrightarrow{P_1Q},\overline{PP_2}$合於所求

(b)對邊不平行且平分線過相對區域$(II$區$)$又與四邊形對邊相交時:

[分析]:1.若過C點可作得ΔBCS面積$= \dfrac{1}{3}\times$四邊形$ABCD$面積

2.只要使$\overline{QP_1}$過P點且使$\Delta COP_1 = \Delta SOQ$,如此就可得四邊形$CBQP_1$面積$=$四邊形$AQP_1D$面積

3.要使ΔCOP_1面積$= \Delta SOQ$面積,可延長$\overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{BA}$,得$\Delta GCS$,再利用共角定理作得$\Delta GQP_1$

$=\Delta GCS$,而得四邊形BCP_1Q面積$=\Delta BCS$面積$=\dfrac{1}{3}\times$四邊形$ABCD$面積

4.再作$\overline{PP_2}$平分四邊形ADP_1Q面積即可

[作法]:1.延長$\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{BA}$交於G,連$\overline{CP}$,$\overline{GP}$

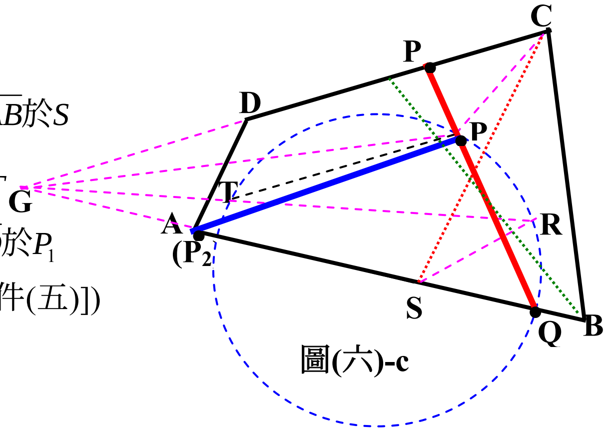
2.過C作$\overrightarrow{CS}$,使$\Delta CBS=\dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積交$\overline{AB}$於S

3.作$\Delta GRS\sim\Delta GCP$　4.過P作$\overline{PT}\,/\!/\,\overline{GC}$交$\overline{GR}$於$T$

5.作一圓過P、R、T三點交$\overline{AB}$於Q,連$\overleftrightarrow{QP}$交$\overline{CD}$於P_1

6.過P作$\overline{PP_2}$平分四邊形P_1QAD面積(作法見[附件(五)])

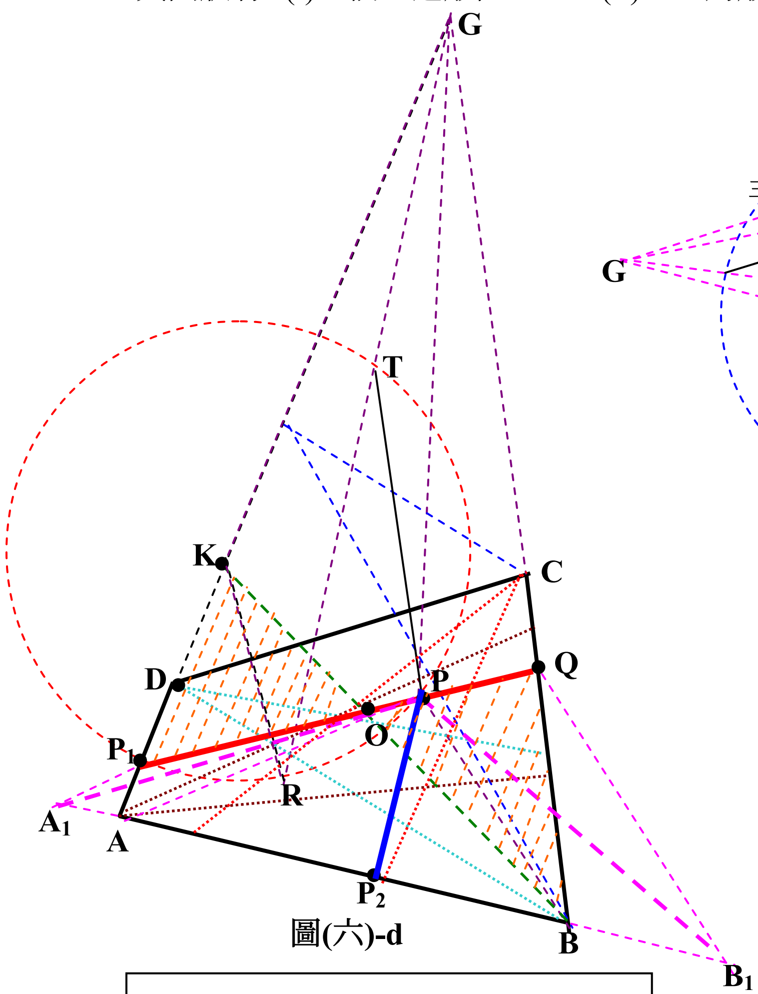
則$\overline{P_1Q}$,$\overline{PP_2}$即為所求。



圖(六)-c

[証明]:(省略)

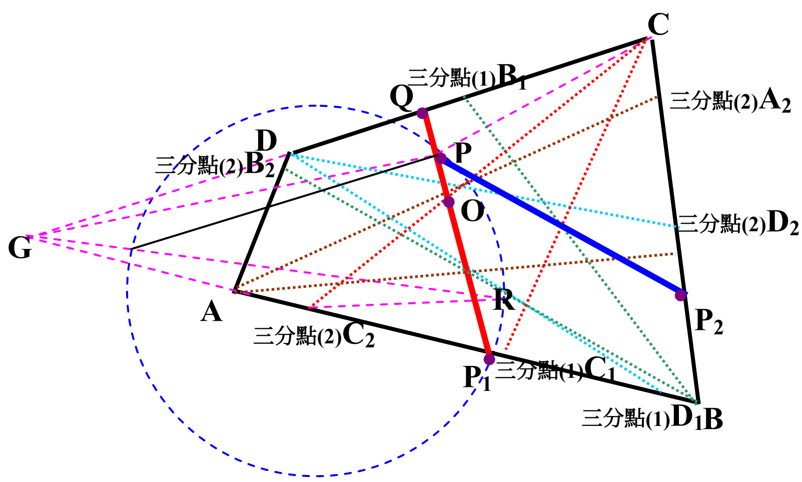
[小結]:綜合(B)之$(a)(b)$,由於三分線過相對區域又與四邊形的對邊相交,故可得一四邊形區,而剩餘一四邊形區;又四邊形區可平分成兩四邊形區或一三角形區一四邊形區,因此其圖狀有:(i)三個四邊形區　　(ii)二三角形區一四邊形區



圖(六)-d

仿圖(六)$-c$的作法,改過B作$\overline{BK}$,使

$\Delta ABK=\dfrac{2}{3}$四邊形$ABCD$



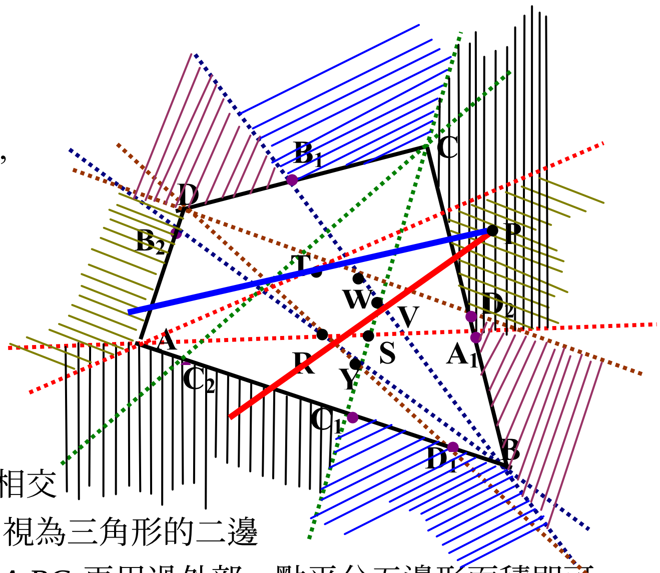
圖(六)-b

仿圖(六)$-a$的作法,改過C作$\overline{CC_2}$,使

$\Delta BCC_2=\dfrac{2}{3}$四邊形$ABCD$

(四)若P為四邊形$ABCD$的外部一點時：

理由仍如P為四邊形$ABCD$的內部一點時所述，我們仍須分(A)平分線與四邊形的鄰邊相交(B)平分線與四邊形的對邊相交等兩種情況，加以討論：(註：四邊形外部定點P，不論位於何區，都只有一組"最佳分割線")



(A)若P位於四邊形外部，且三分線過相對區域又與四邊形二鄰邊相交時：

[分析]：1.$\because$ 三分線過相對區域又與四邊形二鄰邊相交

$\therefore$ 可將平分線與四邊形二鄰邊相交的邊，視為三角形的二邊

2.將四邊形$ABCD$面積轉換成相等面積的ΔA_1BC，再用過外部一點平分五邊形面積即可。

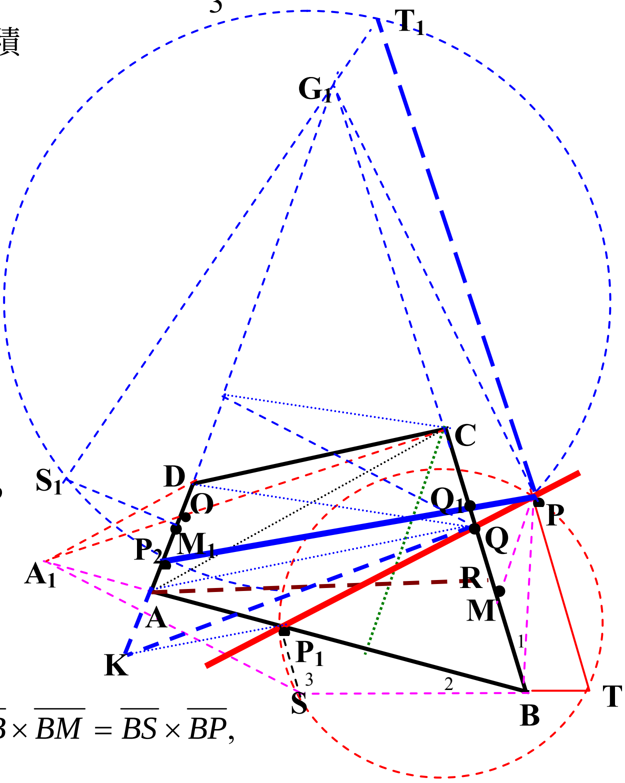
[作法]：1.作$\overline{A_1D}\,//\,\overline{AC}$，交$\overrightarrow{BA}$於$A_1$，連$\overline{CA_1}$

2.取$\overline{BM}=\dfrac{1}{3}\overline{BC}$，仿過三角形外部一點$P$，作得$\Delta BQP_1$面積$=\dfrac{1}{3}\Delta A_1BC$面積

3.作四邊形$CDKQ$面積$=$五邊形AP_1QCD面積

4.仿過四邊形外部一點P，作過對邊之$\overline{PP_2}$平分四邊形$CDKQ$面積，則$\overleftrightarrow{P_1P}$，$\overleftrightarrow{P_2P}$，即為所求。

(作法、證明見下頁$(B)(b)$)



[証明]：1.$\because \Delta ABS\sim\Delta BPM$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，

又$\because$ P、T、S、P_1四點共圓，

且$\because \overline{PT}\,//\,\overline{BC}$，$\therefore \angle 3+\angle TPQ$

$=\angle BQP+\angle TPQ=180°$，故$\angle 3=\angle BQP$

即$\Delta BPQ\sim\Delta BP_1S$，$\therefore \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BS}}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_1}}$，

故$\overline{BQ}\times\overline{BP_1}=\overline{BS}\times\overline{BP}$

2.$\because \Delta A_1BS\sim\Delta PBM$，$\therefore \dfrac{\overline{PB}}{\overline{A_1B}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BS}}$，即$\overline{A_1B}\times\overline{BM}=\overline{BS}\times\overline{BP}$，

故$\overline{BQ}\times\overline{BP_1}=\overline{A_1B}\times\overline{BM}=\dfrac{1}{3}\overline{BC}\times\overline{A_1B}$

3.$\because \angle A_1BC=\angle A_1BC$ $\therefore \dfrac{\Delta BQP_1}{\Delta A_1BC}=\dfrac{\overline{BQ}\times\overline{BP_1}}{\overline{BC}\times\overline{A_1B}}=\dfrac{\frac{1}{3}\overline{BC}\times\overline{A_1B}}{\overline{BC}\times\overline{A_1B}}=\dfrac{1}{3}$，即$\Delta BP_1Q=\dfrac{1}{3}\Delta A_1BC$

4.$\because \overline{A_1D}\,//\,\overline{AC}$ $\therefore \Delta COD=\Delta AOA_1$，故$\Delta A_1BC$面積$=$四邊形$ABCD$面積，即$\Delta BP_1Q=\dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積 $\therefore \Delta AOA_1+$五邊形OAP_1QC面積$=\dfrac{2}{3}\Delta A_1BC=\dfrac{2}{3}$四邊形$ABCD$面積

故$\Delta COD+$五邊形OAP_1QC面積$=$五邊形AP_1QCD面積$=\dfrac{2}{3}$四邊形$ABCD$面積

5.$\because \overleftrightarrow{PP_2}$平分五邊形$AP_1QCD$面積$\therefore \overleftrightarrow{PP_1},\overleftrightarrow{PP_2}$合於所求

[討論]:由於三分線過相對區域又與四邊形的二鄰邊相交,故可得一三角形區,而所剩餘區域,為一四邊形區或一五邊形區;又四邊形區可平分成兩四邊形區或一三角形區一四邊形區,而五邊形區可平分成兩四邊形區或一四邊形區一五邊形區,因此其圖狀有:

(i)一三角形區兩四邊形區　　(ii)二三角形區一四邊形區

(iii)三個四邊形區　　(iv)二四邊形區一五邊形區

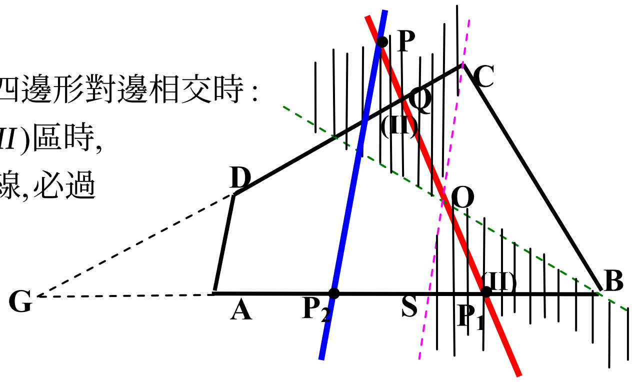
(B)若P位於四邊形外部,且平分線過相對區域又與四邊形對邊相交時,

也因為對邊可能平行也可能不平行,因此仍可分為下列兩種情況討論:

(a)對邊平行且平分線過相對區域又與四邊形對邊相交時:

([分析][作法][証明]亦都同與P位於四邊形內部,且平分線,過相對區域又與四邊形對邊相交時,故省略)

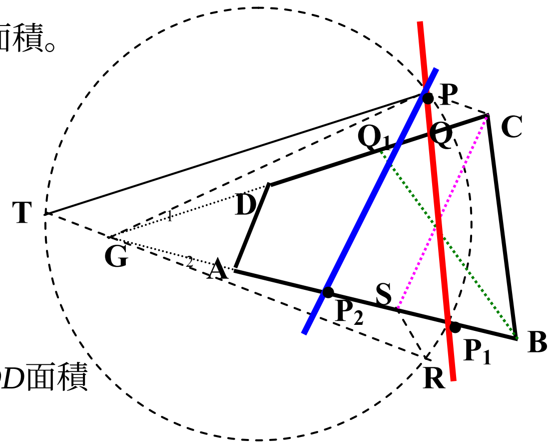
(b)對邊不平行且平分線過相對區域(II區)又與四邊形對邊相交時:



[分析]:1.若P為四邊形$ABCD$外部之一點,且落於(II)區時,其過P點且將四邊形面積三等分的分割線,必過四邊形$ABCD$的對邊

2.只要使$\overleftrightarrow{QP_1}$過$P$點且使$\Delta COQ$面積$=\Delta SOP_1$面積,如此就可得四邊形$BCQP_1$面積$=\Delta BCS$面積$=\dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積。

3.要使ΔCOQ面積$=\Delta SOP_1$面積,可延長$\overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{BA}$,得$\Delta GCS$,再利用共角定理作得$\Delta GQP_1=\Delta GCS$,進而作$\overleftrightarrow{PP_2}$平分四邊形$AP_1QD$面積。



[作法]:1.延長$\overrightarrow{CD}\ \overrightarrow{BA}$交於$G$,連$\overline{CP},\overline{GP}$

2.過C作$\overline{CS}$得ΔCBS面積$=\dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$面積

3.作$\Delta GRS\sim\Delta GCP$,過P作$\overline{PT}\,/\!/\,\overline{GC}$

4.作一圓過P、R、T三點交$\overline{AB}$於P_1,連$\overleftrightarrow{P_1P}$

5.仿過四邊形外部一點P,作$\overleftrightarrow{PP_2}$平分 四邊形$AP_1QD$面積

[証明]:1.$\because \Delta GRS\sim\Delta GCP,\therefore \dfrac{\overline{GC}}{\overline{GP}}=\dfrac{\overline{GR}}{\overline{GS}}$,故$\overline{GC}\times\overline{GS}=\overline{GR}\times\overline{GP}$

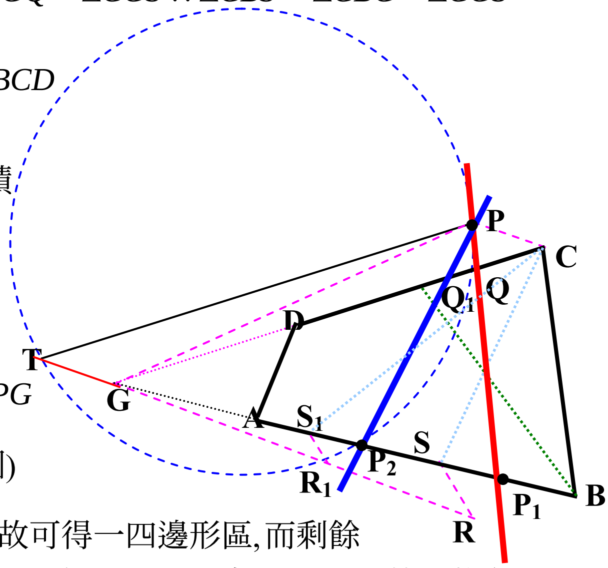
2.$\because \overline{PT}\,/\!/\,\overline{GC}\therefore \angle GQP+\angle TPP_1=180^\circ$,又$\because T,P,R,P_1$四點共圓$\therefore \angle TPP_1+\angle TRP_1=180^\circ$

故$\angle TPP_1=\angle GQP$且$\angle 1=\angle 2$,即$\Delta QGP\sim\Delta RGP_1$,

$\therefore \dfrac{\overline{QG}}{\overline{GP}}=\dfrac{\overline{GR}}{\overline{GP_1}}\Rightarrow \overline{QG}\times\overline{GP_1}=\overline{GR}\times\overline{GP}$,即$\overline{QG}\times\overline{GP_1}=\overline{GC}\times\overline{GS}$

3. $\because \angle P_1GQ=\angle CGS\ \therefore \dfrac{\overline{QG}\times\overline{GP_1}}{\overline{GC}\times\overline{GS}}=\dfrac{\Delta P_1GQ}{\Delta CGS}$, 故$\Delta P_1GQ=\Delta CGS\ \therefore \Delta CBS=\Delta CBG-\Delta CGS$

$=\Delta CBG-\Delta P_1GQ=$ 四邊形$CBP_1Q=\dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$



4. $\because \overleftrightarrow{PP_2}$平分四邊形$AP_1QD\ \therefore$ 四邊形AP_2Q_1D面積

$=$ 四邊形$Q_1P_2P_1Q$面積 $=\dfrac{1}{3}$四邊形$ABCD$,

故$\overleftrightarrow{P_1P},\overleftrightarrow{PP_2}$將四邊形$ABCD$面積三等分

(註:也可改取$\overline{BS_1}=\dfrac{2}{3}\overline{BG}\rightarrow$作$\Delta R_1S_1G\sim\Delta CPG$

$\rightarrow$作一圓過P,T,R_1,交$\overline{BG}$於P_2,連$\overline{PP_2}$)(如右圖)

[討論]:由於三分線過相對區域又與四邊形的對邊相交,故可得一四邊形區,而剩餘一四邊形區;又四邊形區可平分成兩四邊形區或一三角形區一四邊形區,因此其圖狀有:

(i)三個四邊形區(ii)二三角形區一四邊形區

[小結一]:綜合(A)(B)的討論,得知:四邊形外部一點P若落於重複區域,都可作得兩組"最佳分割線"三等分四邊形面積,而不重複區只可作得一組"最佳分割線"三等分四邊形面積。

【小結二】**:**將過四邊形外部定點所成的最佳分割線的組數及圖狀,整理如下:

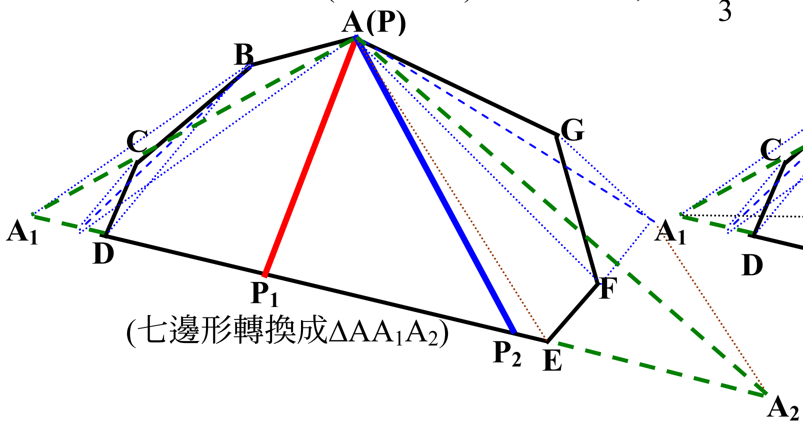
	三分線過三角形相對區且與四邊形二鄰邊相交	三分線過三角形相對區且與四邊形對邊相交
"最佳分割線"之組數	一組	一組
圖狀	(i)一三角形區兩四邊形區 (ii)二三角形區一四邊形區 (iii)三個三角形區 (iv)二四邊形區一五邊形區	(i)三個四邊形區 (ii)兩個三角形區 一個四邊形區

【第三部分】:N 邊形　([作法]及[証明]均如前,故省略)

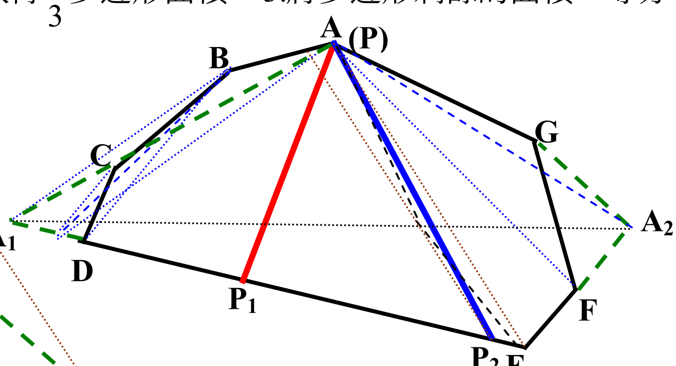
(一)、 P為N邊形(以七邊形為例)之頂點時(即$P=A$):

[分析]:1.可仿照P為四邊形(或三角形)頂點的作法,先將七邊形轉成含有定點的四邊形(或三角形)

2.再利用過四邊形(或三角形)頂點的作法,取得$\dfrac{1}{3}$多邊形面積　3.將多邊形剩餘的面積二等分



(七邊形轉換成ΔAA_1A_2)



(七邊形轉換成四邊形 AA_1EA_2)

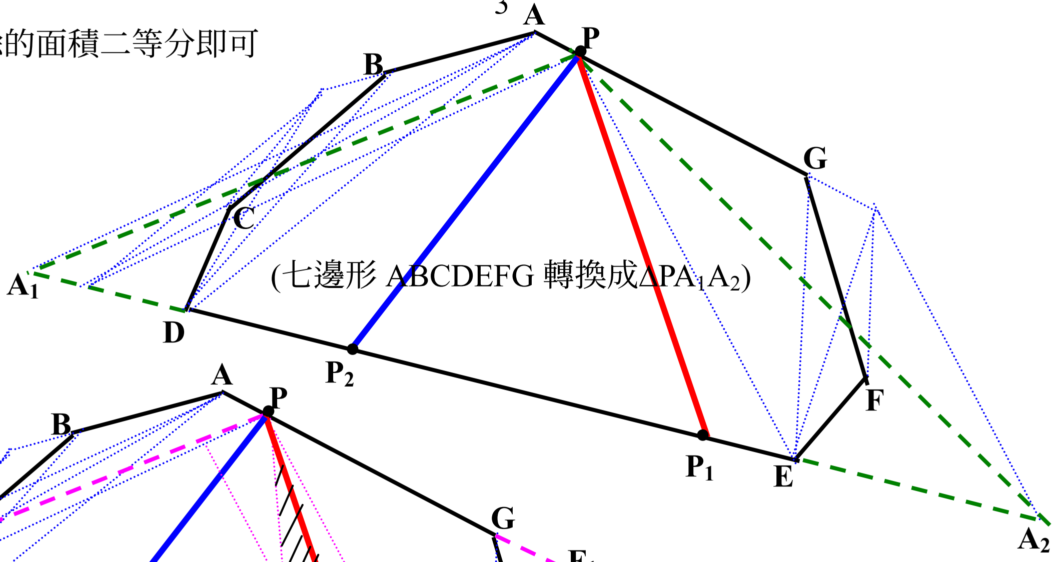
[推論]: P為N邊形之頂點時,仍只有一組最佳分割線;而其所有可能圖狀列於[表一]

(二)、 P為N邊形(以七邊形為例)邊上之一點時:

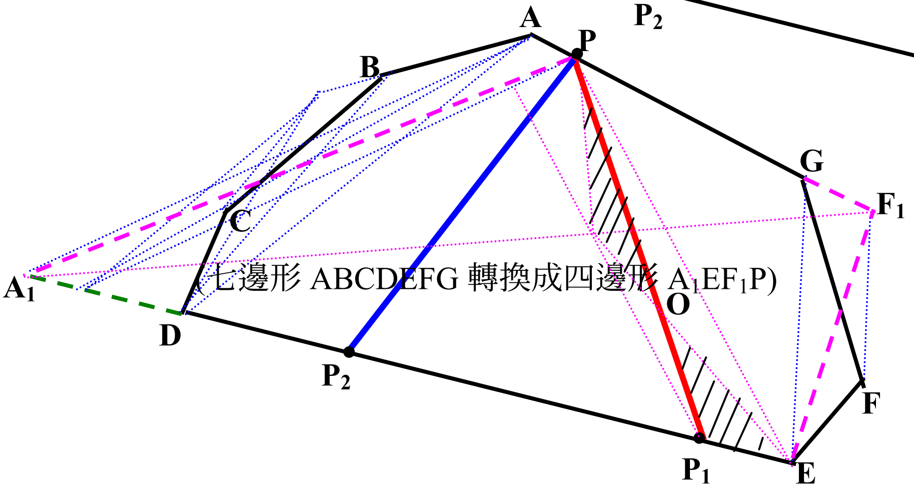
[分析]:1.可仿照P為四邊形(或三角形)邊上一點的作法,先將七邊形轉成含有定點的四邊形(或三角形)

2.再利用過四邊形(或三角形)邊上一點的作法,取得$\frac{1}{3}$多邊形面積

3.將多邊形剩餘的面積二等分即可



(七邊形 ABCDEFG 轉換成ΔPA_1A_2)



(七邊形 ABCDEFG 轉換成四邊形 A_1EF_1P)

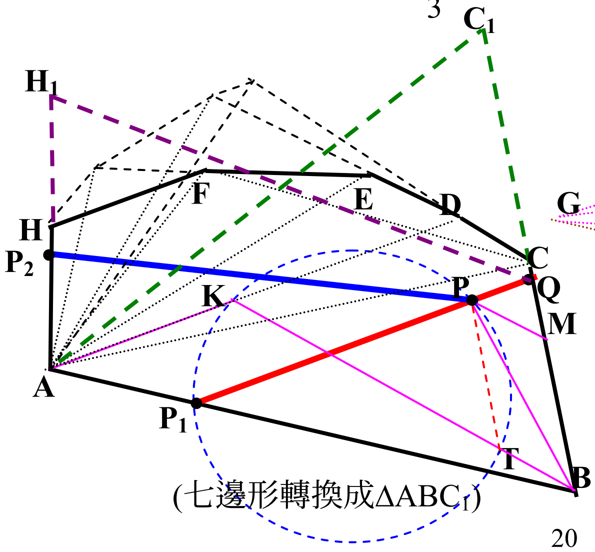
[討論]:仍只有一組最佳分割線,而其圖狀列於[表(二)][見附件(六)]

(三)、 P為N邊形(以七邊形為例)內部之一點時:

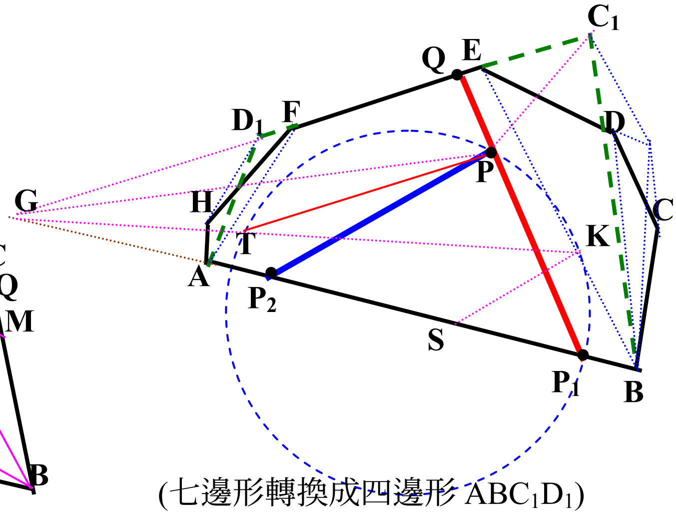
[分析]:1.可仿照P為四邊形內部一點的作法,先將七邊形轉成含有原七邊形中最長邊(或次長邊)的四邊形(如此較易作得三等分線)

2.利用過四邊形內部一點分割區域的研判法(即[第二部分](三)的作法),決定出三等分線是過四邊形的鄰邊還是對邊

3.比照過四邊形內部一點,作得$\frac{1}{3}$多邊形面積　4.將多邊形剩餘的面積二等分即可



(七邊形轉換成ΔABC_1)



(七邊形轉換成四邊形 ABC_1D_1)

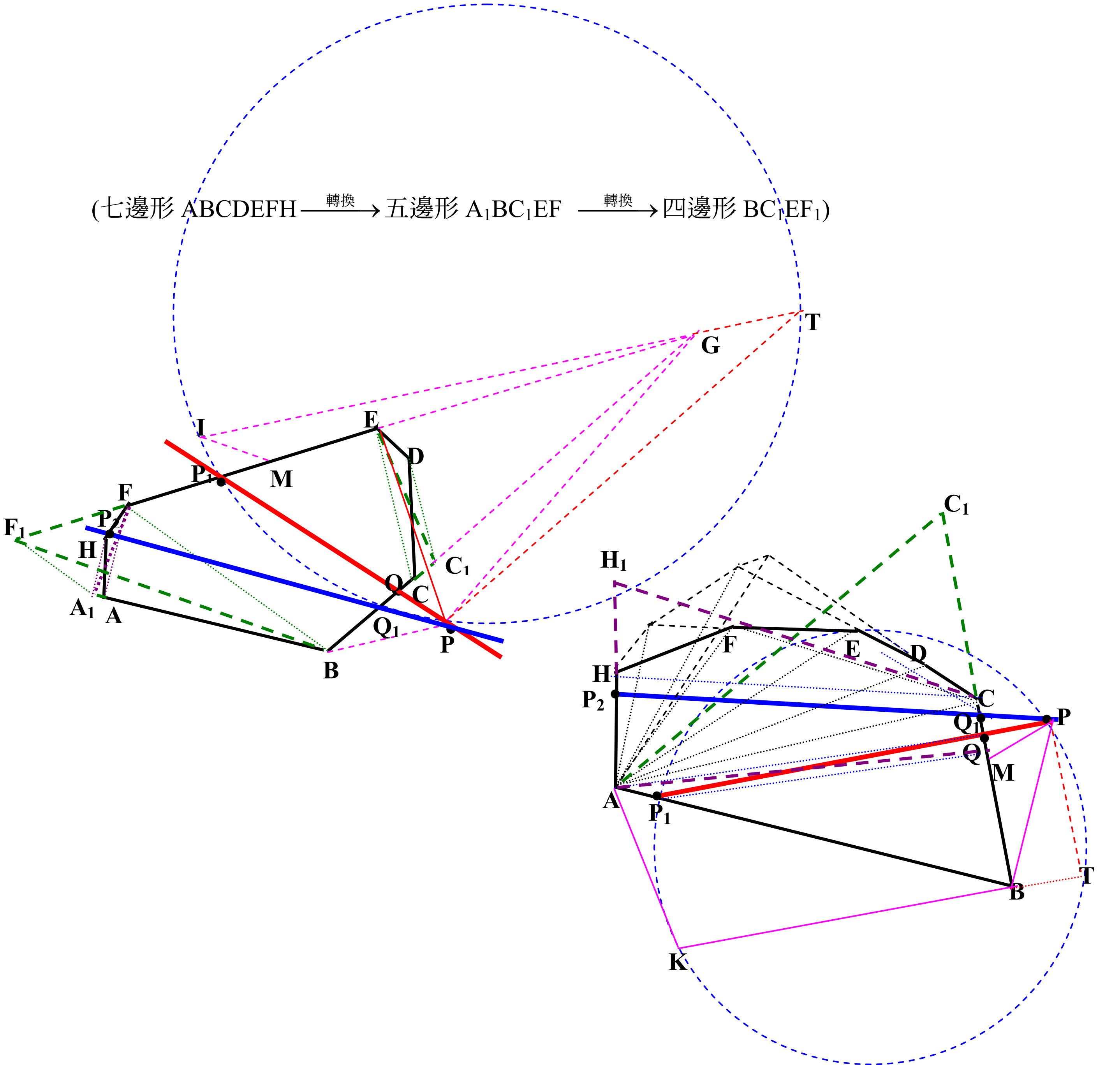
[討論]: 仿四邊形內部,過N邊形內部定點P仍有兩組最佳分割線,其圖狀列於[表(三)][見附件(七)]

(四)、 P為N邊形(以七邊形為例)外部之一點時:

[分析]: 1.可仿照P為四邊形外部一點的作法,先將七邊形轉成含有原七邊形中最長邊(或次長邊)的四邊形(如此較易作得三等分線)

2.利用過四邊形外部一點分割區域的研判法(即[第二部分](四)的作法),決定出三等分線是過四邊形的鄰邊還是對邊

3.比照過四邊形內部一點,作得$\frac{1}{3}$多邊形面積　4.將多邊形剩餘的面積二等分即可



(七邊形 ABCDEFH $\xrightarrow{\text{轉換}}$ 五邊形 A_1BC_1EF $\xrightarrow{\text{轉換}}$ 四邊形 BC_1EF_1)

(七邊形轉換成ΔABC_1)

[討論]: 仿四邊形外部,過N邊形外部定點P仍只有一組"最佳分割線",其圖狀列於[表(四)][見附件(八)]

【第四部分】:N 邊形之圖狀:

由【第一部分】【第二部分】【第三部分】的討論研究中,我們發現了三等分 N 邊形圖狀種類的規律:

(A).P 位於 N 邊形頂點時:

(i).分割圖狀之總邊數為 N+4~N+6:其因是為分割線恰過頂點時,分割線恰為二圖狀之公共邊,因而分割圖狀之總邊數至少比 N 邊形的邊數多 4,直至分割點全落於同一邊上,如何仍有分割線為二圖狀之公共邊,再加上 N 邊形中的某一邊為三圖狀之共用邊,因此分割圖狀之總邊數至多比 N 邊形的邊數多 6。然而三等分面積之總邊數為最少的圖形必為三個三角形,因此三等分三角形面積之總邊數必為 9,而三等分四邊形面積之總邊數為 9~10

(ii).將 N 邊形所形成的三種圖狀以(a 邊形邊數-- b 邊形邊數--c 邊形邊數)排列之,其中 a≤b≤c, a≥3, 可得[下表(一)]:

定點 P 位於 N 邊形頂點:[表(一)]

多邊形	三邊形	四邊形	五邊形	六邊形	七邊形	八邊形	九邊形	十邊形
分割圖狀總邊數 (所有圖狀邊數總和)	9	9～10	9～11	10～12	11～13	12～14	13～15	14～16
	3-3-3	3-3-3 3-3-4	3-3-3 3-3-4 3-3-5	3-3-4 3-3-5 3-3-6	3-3-5 3-3-6 3-3-7	3-3-6 3-3-7 3-3-8	3-3-7 3-3-8 3-3-9	3-3-8 3-3-9 3-3-10
			3-4-4	3-4-4 3-4-5	3-4-4 3-4-5 3-4-6	3-4-5 3-4-6 3-4-7	3-4-6 3-4-7 3-4-8	3-4-6 3-4-7 3-4-8
				4-4-4	3-5-5	3-5-5 3-5-6	3-5-5 3-5-6 3-5-7	3-5-6 3-5-7 3-5-8
					4-4-4 4-4-5	4-4-4 4-4-5 4-4-6	3-6-6	3-6-6 3-6-7
						4-5-5	4-4-5 4-4-6 4-4-7	4-4-6 4-4-7 4-4-8
							4-5-5 4-5-6	4-5-5 4-5-6 4-5-7
							5-5-5	4-6-6
								5-5-5 5-5-6
圖狀種類合計	1	2	4	6	9	12	15+1 =16	18+2 =20

多邊形	十一邊形	十二邊形	十三邊形	十四邊形	十五邊形	十六邊形	十七邊形
分割圖狀總邊數(所有圖狀邊數總和)	15～17	16～18	17～19	18～20	19～21	20～22	21～23
	3−3−9 3−3−10 3−3−11	3−3−10 3−3−11 3−3−12	3−3−11 3−3−12 3−3−13	3−3−12 3−3−13 3−3−14	3−3−13 3−3−14 3−3−15	3−3−14 3−3−15 3−3−16	3−3−15 3−3−16 3−3−17
	3−4−8 3−4−9 3−4−10	3−4−9 3−4−10 3−4−11	3−4−10 3−4−11 3−4−12	3−4−11 3−4−12 3−4−13	3−4−12 3−4−13 3−4−14	3−4−13 3−4−14 3−4−15	3−4−14 3−4−15 3−4−16
	3−5−7 3−5−8 3−5−9	3−5−8 3−5−9 3−5−10	3−5−9 3−5−10 3−5−11	3−5−10 3−5−11 3−5−12	3−5−11 3−5−12 3−5−13	3−5−12 3−5−13 3−5−14	3−5−13 3−5−14 3−5−15
	3−6−6 3−6−7 3−6−8	3−6−7 3−6−8 3−6−9	3−6−8 3−6−9 3−6−10	3−6−9 3−6−10 3−6−11	3−6−10 3−6−11 3−6−12	3−6−11 3−6−12 3−6−13	3−6−12 3−6−13 3−6−14
	3−7−7	3−7−7 3−7−8	3−7−7 3−7−8 3−7−9	3−7−8 3−7−9 3−7−10	3−7−9 3−7−10 3−7−11	3−7−10 3−7−11 3−7−12	3−7−11 3−7−12 3−7−13
	4−4−7 4−4−8 4−4−9	4−4−8 4−4−9 4−4−10	3−8−8	3−8−8 3−8−9	3−8−8 3−8−9 3−8−10	3−8−9 3−8−10 3−8−11	3−8−10 3−8−11 3−8−12
	4−5−6 4−5−7 4−5−8	4−5−7 4−5−8 4−5−9	4−4−9 4−4−10 4−4−11	4−4−10 4−4−11 4−4−12	3−9−9	3−9−9 3−9−10	3−9−9 3−9−10 3−9−11
	4−6−6 4−6−7	4−6−6 4−6−7 4−6−8	4−5−8 4−5−9 4−5−10	4−5−9 4−5−10 4−5−11	4−4−11 4−4−12 4−4−13	4−4−12 4−4−13 4−4−14	3−10−10
	5−5−5 5−5−6 5−5−7	4−7−7	4−6−7 4−6−8 4−6−9	4−6−8 4−6−9 4−6−10	4−5−10 4−5−11 4−5−12	4−5−11 4−5−12 4−5−13	4−4−15 4−4−16 4−4−17
	5−6−6	5−5−6 5−5−7 5−5−8	4−7−7 4−7−8	4−7−7 4−7−8 4−7−9	4−6−9 4−6−10 4−6−11	4−6−10 4−6−11 4−6−12	4−5−14 4−5−15 4−5−16
		5−6−6 5−6−7	5−5−7 5−5−8 5−5−9	4−8−8	4−7−8 4−7−9 4−7−10	4−7−9 4−7−10 4−7−11	4−6−11 4−6−12 4−6−13

多邊形	十一邊形	十二邊形	十三邊形	十四邊形	十五邊形	十六邊形	十七邊形
		$6-6-6$	$\begin{cases}5-6-6\\5-6-7\\5-6-8\end{cases}$	$\begin{cases}5-5-8\\5-5-9\\5-5-10\end{cases}$	$\begin{cases}4-8-8\\4-8-9\end{cases}$	$\begin{cases}4-8-8\\4-8-9\\4-8-10\end{cases}$	$\begin{cases}4-7-10\\4-7-11\\4-7-12\end{cases}$
			$5-7-7$	$\begin{cases}5-6-7\\5-6-8\\5-6-9\end{cases}$	$\begin{cases}5-5-9\\5-5-10\\5-5-11\end{cases}$	$4-9-9$	$\begin{cases}4-8-9\\4-8-10\\4-8-11\end{cases}$
			$\begin{cases}6-6-6\\6-6-7\end{cases}$	$\begin{cases}5-7-7\\5-7-8\end{cases}$	$\begin{cases}5-6-8\\5-6-9\\5-6-10\end{cases}$	$\begin{cases}5-5-10\\5-5-11\\5-5-12\end{cases}$	$\begin{cases}4-9-9\\4-9-10\end{cases}$
				$\begin{cases}6-6-6\\6-6-7\\6-6-8\end{cases}$	$\begin{cases}5-7-7\\5-7-8\\5-7-9\end{cases}$	$\begin{cases}5-6-9\\5-6-10\\5-6-11\end{cases}$	$\begin{cases}5-5-11\\5-5-12\\5-5-13\end{cases}$
				$6-7-7$	$5-8-8$	$\begin{cases}5-7-8\\5-7-9\\5-7-10\end{cases}$	$\begin{cases}5-6-10\\5-6-11\\5-6-12\end{cases}$
					$\begin{cases}6-6-7\\6-6-8\\6-6-9\end{cases}$	$\begin{cases}5-8-8\\5-8-9\end{cases}$	$\begin{cases}5-7-9\\5-7-10\\5-7-11\end{cases}$
					$\begin{cases}6-7-7\\6-7-8\end{cases}$	$\begin{cases}6-6-8\\6-6-9\\6-6-10\end{cases}$	$\begin{cases}5-8-8\\5-8-9\\5-8-10\end{cases}$
						$\begin{cases}6-7-7\\6-7-8\\6-7-9\end{cases}$	$5-9-9$
						$6-8-8$	$\begin{cases}6-6-9\\6-6-10\\6-6-11\end{cases}$
						$\begin{cases}7-7-7\\7-7-8\end{cases}$	$\begin{cases}6-7-8\\6-7-9\\6-7-10\end{cases}$
							$\begin{cases}6-8-8\\6-8-9\end{cases}$
							$\begin{cases}7-7-7\\7-7-8\\7-7-9\end{cases}$
							$7-8-8$
圖狀種類合計	$21+4$ $=25$	$24+6$ $=30$	$27+9$ $=36$	$30+12$ $=42$	$33+15+1$ $=49$	$36+18+2$ $=56$	$39+21+4$

(iii).由[表(一)]中得知:三等分 N 邊形所形成的三種圖狀具有如下的規律:

(a).	三角形 →	九邊形 →	十五邊形 →	二十一邊形	→……
[圖狀總類數]	1	15+1=16	33+15+1=49	51+33+15+1=100	……
(b).	四邊形 →	十邊形 →	十六邊形 →	二十二邊形	→……
[圖狀總類數]	2	18+2=20	36+18+2=56	54+36+18+2=110	……
(c).	五邊形 →	十一邊形 →	十七邊形 →	二十三邊形	→……
[圖狀總類數]	4	21+4=25	39+21+4=64	57+39+21+4=121	……
(d).	六邊形 →	十二邊形 →	十八邊形 →	二十四邊形	→……
[圖狀總類數]	6	24+6=30	42+24+6=72	60+42+24+6=132	……
(e).	七邊形 →	十三邊形 →	十九邊形 →	二十五邊形	→……
[圖狀總類數]	9	27+9=36	45+27+9=81	63+45+27+9=144	……
(f).	八邊形 →	十四邊形 →	二十邊形 →	二十六邊形	→……
[圖狀總類數]	12	30+12=42	48+30+12=90	66+48+30+12=156	……

再將此規律,加以公式化,可得如下公式:

(a).N 邊形中:(N=6(k-1)+3) (k為正整數)

求級數 1+16+49+100+169+256+……之第 k 項

[解]:將級數之各項依次列出,得

	1	16	49	100	169	256	…………
第一階差		15	33	51	69	87	…………
第二階差			18	18	18	18	…………
第三階差				0	0	0	…………

則因 $a_1 = 1,\quad b_1 = 15,\quad c_1 = 18,\quad d_1 = 0,$

故由階差之第 k 項公式:

$$a_k = a_1 + (k-1)b_1 + \frac{(k-1)(k-2)}{2!}c_1 + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3!}d_1 + \cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(k-r)}{r!}d_r \qquad (\text{其中}d_r\text{為級數第}r\text{階差之首項})$$

得:

$$a_k = 1 + 15(k-1) + 18\cdot\frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 1 + 15(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 - 12k + 4$$
$$= \frac{(N-1)^2}{4} \quad (\because k = \frac{N+3}{6})$$

(b).N 邊形中:(N=6(k-1)+4) (k為正整數)

求級數 2+20+56+110+182+272+……之第 k 項,得:

$$a_k = 2 + 18(k-1) + 18\cdot\frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 2 + 18(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 - 9k + 2$$
$$= \frac{N^2 - 2N}{4} \quad (\because k = \frac{N+2}{6})$$

(c).N 邊形中:(N=6(k-1)+5) (k為正整數)

求級數 4+25+64+110+182+272+……之第 k 項,得:

$$a_k = 4 + 21(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)k-2)}{2!} = 4 + 21(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 - 6k + 1$$

$$= \frac{(N-1)^2}{4} \quad (\because k = \frac{N+1}{6})$$

(d).N 邊形中: (N=6(k-1)+6) (k為正整數)

求級數 6+30+72+132+210+306+……之第 k 項,得:

$$a_k = 6 + 24(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 6 + 24(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 - 3k$$

$$= \frac{N^2 - 2N}{4} \quad (\because k = \frac{N}{6})$$

(e).N 邊形中: (N=6(k-1)+7) (k為正整數)

求級數 9+36+72+132+210+306+……之第 k 項,得:

$$a_k = 9 + 27(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 9 + 27(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2$$

$$= \frac{(N-1)^2}{4} \quad (\because k = \frac{N-1}{6})$$

(f).N 邊形中: (N=6(k-1)+8) (k為正整數)

求級數 12+42+90+156+240+342+……之第 k 項,得:

$$a_k = 12 + 30(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 12 + 30(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 + 3k$$

$$= \frac{N^2 - 2N}{4} \quad (\because k = \frac{N-2}{6})$$

(B).P 位於 N 邊形邊上一點時:(由[表(二)]知)

(i).分割圖狀之總邊數為(N+5)~(N+7):其因是為分割線恰過對邊二端點時,分割線為二圖狀之公共邊,且定點所居之邊亦為二圖狀之共用邊,故其所分割圖狀之總邊數至少比 N 邊形的邊數多 5,直至分割點全落於同一邊上,如此仍有分割線為二圖狀之公共邊,再加上 N 邊形中的某一邊為三圖狀之共用邊,因此分割圖狀之總邊數至多比 N 邊形的邊數多 7。

(ii).將 N 邊形所形成的三種圖狀以(a 邊形邊數-- b 邊形邊數--c 邊形邊數)排列之,其中 a≤b≤c, a≥3,可得[表(二)](見[附件(六)])

(iii).由[表(二)]中得知:三等分 N 邊形所形成的三種圖狀具有如下的規律:

(a). 三角形 → 九邊形 → 十五邊形 → 二十一邊形 →……

[圖狀總類數] 2 18+2=20 36+18+2=56 54+36+18+2=110 ……

(b). 四邊形 → 十邊形 → 十六邊形 → 二十二邊形 →……

[圖狀總類數] 4 21+4=25 39+21+4=64 57+39+22+3=121 ……

(c). 五邊形 → 十一邊形 → 十七邊形 → 二十三邊形 →……

[圖狀總類數] 6 24+6=30 42+24+6=72 60+42+24+6=132 ……

(d). 六邊形 → 十二邊形 → 十八邊形 → 二十四邊形 →……

[圖狀總類數] 9 27+9=36 45+27+9=81 63+45+27+9=144 ……

(e). 七邊形 → 十三邊形 → 十九邊形 → 二十五邊形 →……

[圖狀總類數]　12　　30+12=42　48+30+12=90　66+48+30+12=156　……

(f).　八邊形 → 十四邊形 → 二十邊形 → 二十六邊形 →……

[圖狀總類數]　16　33+16=49　51+33+16=100　69=51+33+16=169　……

再將此規律,利用階差數列公式加以公式化,可得如下公式:

(a).N 邊形中:(N=6(k-1)+3)　(k為正整數)

求級數 2+20+56+110+182+272+……之第 k 項,得:

$$a_k = 2 + 18(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 2 + 18k - 1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 - 9k + 2$$

$$= \frac{N^2 - 1}{4} \quad (\because k = \frac{N+3}{6})$$

(b).N 邊形中:(N=6(k-1)+4)　(k為正整數)

求級數 4+25+64+110+182+272+……之第 k 項,得:

$$a_k = 4 + 21(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 4 + 21(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 - 6k + 1$$

$$= \frac{N^2}{4} \quad (\because k = \frac{N+2}{6})$$

(c).N 邊形中: (N=6(k-1)+5)　(k為正整數)

求級數 6+30+72+132+210+306+……之第 k 項,得:

$$a_k = 6 + 24(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 6 + 24(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 - 3k$$

$$= \frac{N^2 - 1}{4} \quad (\because k = \frac{N+1}{6})$$

(d).N 邊形中: (N=6(k-1)+6)　(k為正整數)

求級數 9+36+81+144+225+324+……之第 k 項,得:

$$a_k = 9 + 27(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 9 + 27(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2$$

$$= \frac{N^2}{4} \quad (\because k = \frac{N}{6})$$

(e).N 邊形中: (N=6(k-1)+7)　(k為正整數)

求級數 12+42+90+156+240+342+……之第 k 項,得:

$$a_k = 12 + 30(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 12 + 30(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 + 3k$$

$$= \frac{N^2 - 1}{4} \quad (\because k = \frac{N-1}{6})$$

(f).N 邊形中:(N=6(k-1)+8)　(k為正整數)

求級數 16+49+100+169+256+361+……之第 k 項,得:

$$a_k = 16 + 33(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 16 + 33(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 + 6k + 1$$

$$= \frac{N^2}{4} \quad (\because k = \frac{N-2}{6})$$

(C).P 位於 N 邊形內部之一點時: (由[表(三)]知)

(i).分割圖狀之<u>總邊數</u>為(N+6)~(N+8):其因是兩分割線恰過二端點時,則一分割線為三圖狀之公共邊,而另一分割線為二圖狀之共用邊,且 N 邊形的某一邊亦為二圖狀之共用邊,故其所分割圖狀之總邊數至少比 N 邊形的邊數多 6,直至分割點全落於同一邊上,如此仍有分割線為二圖狀之公共邊,再加上 N 邊形中的某一邊為三圖狀之共用邊,以及 N 邊形的某一邊為二圖狀之共用邊,因此分割圖狀之總邊數至多比 N 邊形的邊數多 8。

(ii).仿[表(二)]將 N 邊形所形成的三種圖狀以(a 邊形邊數-- b 邊形邊數--c 邊形邊數)排列之,其中 a≤b≤c, a≥3,(見[附件(七)])

(iii).得知:三等分 N 邊形所形成的三種圖狀具有如下的規律:

(a).	三角形 →	九邊形 →	十五邊形 →	二十一邊形	→……
[圖狀總類數]	4	21+4=25	39+21+4=64	57+39+22+3=121	……
(b).	四邊形 →	十邊形 →	十六邊形 →	二十二邊形	→……
[圖狀總類數]	6	24+6=30	42+24+6=72	60+42+24+6=132	……
(c).	五邊形 →	十一邊形 →	十七邊形 →	二十三邊形	→……
[圖狀總類數]	9	27+9=36	45+27+9=81	63+45+27+9=144	……
(d).	六邊形 →	十二邊形 →	十八邊形 →	二十四邊形	→……
[圖狀總類數]	12	30+12=42	48+30+12=90	66+48+30+12=156	……
(e).	七邊形 →	十三邊形 →	十九邊形 →	二十五邊形	→……
[圖狀總類數]	16	33+16=49	51+33+16=100	69+51+33+16=169	……
(f).	八邊形 →	十四邊形 →	二十邊形 →	二十六邊形	→……
[圖狀總類數]	20	36+20=56	54+36+20=110	72+54+36+20=182	……

再將此規律,利用階差數列公式加以公式化,可得如下公式:

(a).N 邊形中:(N=6(k-1)+3) (k為正整數)

求級數 4+25+64+110+182+272+……之第 k 項,得:

$$a_k = 4 + 21(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 4 + 21k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 - 6k + 1$$

$$= \frac{(N+1)^2}{4} \quad (\because k = \frac{N+3}{6})$$

(b).N 邊形中: (N=6(k-1)+4) (k為正整數) :

求級數 6+30+72+132+210+306+……之第 k 項**,**得

$$a_k = 6 + 24(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 6 + 24(k-1) + 9(k-1)(k-2) = 9k^2 - 3k$$

$$= \frac{N^2 + 2n}{4} \quad (\because k = \frac{N+2}{6})$$

(c).N 邊形中: (N=6(k-1)+5) (k為正整數)

求級數 9+36+81+144+225+324+……之第 k 項,得:

$$a_k = 9 + 27(k-1) + 18 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2!} = 9 + 27(k-1) + 9(k-1)k-2) = 9k^2$$

$$= \frac{(N+1)^2}{4} \quad (\because k = \frac{N+1}{6})$$

(d).N 邊形中: (N=6(k-1)+6) (k為正整數)

求級數 12+42+90+156+240+342+……之第 k 項,得:

$$a_k=12+30(k-1)+18\cdot\frac{(k-1)(k-2)}{2!}=12+30(k-1)+9(k-1)(k-2)=9k^2+3k$$

$$=\frac{N^2+2N}{4}\quad(\because k=\frac{N}{6})$$

(e).N 邊形中:(N=6(k-1)+7) (k為正整數)

求級數 16+49+100+169+256+361+……之第 k 項,得:

$$a_k=16+33(k-1)+18\cdot\frac{(k-1)(k-2)}{2!}=16+33k-1)+9(k-1)(k-2)=9k^2+6k+1$$

$$=\frac{(N+1)^2}{4}\quad(\because k=\frac{N-1}{6})$$

(f).N 邊形中:(N=6(k-1)+8) (k為正整數)

求級數 20+56+110+182+272+380+……之第 k 項,得:

$$a_k=20+36(k-1)+18\cdot\frac{(k-1)(k-2)}{2!}=20+36(k-1)+9(k-1)(k-2)=9k^2+9k+2$$

$$=\frac{N^2+2N}{4}\quad(\because k=\frac{N-2}{6})$$

(D).P 位於 N 邊形外部之一點時: (由[表(四)]知)

(i).分割圖狀之總邊數為(N+5)~(N+8):其因是兩分割線恰過二頂點時,則兩分割線分別為相鄰二圖狀之公共邊,而 N 邊形的某一邊亦為二圖狀之共用邊,故其所分割圖狀之總邊數至少比 N 邊形的邊數多 5,直至分割點落於 N 邊形之對邊上(且皆不過頂點),如此仍有分割線為二圖狀之公共邊,再加上 N 邊形中的四邊為三圖狀之共用邊,因此分割圖狀之總邊數至多比 N 邊形的邊數多 8。

(ii).仿[表(二)]將 N 邊形所形成的三種圖狀以(a 邊形邊數-- b 邊形邊數--c 邊形邊數)排列之,其中 a≤b≤c, a≥3(見[附件(八)])

(iii).得知:三等分 N 邊形所形成的三種圖狀具有如下的規律:

三角形 → 四邊形 → 五邊形 → 六邊形 → 七邊形

[圖狀總類數] 2+1　3+2+1=6　4·1+3+2+1 =8+2　4·2+3+2+1 =10+4　4·2+3+1+4·1+2+1 =12+6+1

→ 八邊形 → 九邊形 → 十邊形

[圖狀總類數] 4·3+2+4·1+3+2+1 =14+8+2　4·3+3+1+4·2+3+2+1 =16+10+4　4·4+2+4·2+3+1+4·1+2+1 =18+12+6+1

→ 十一邊形 → 十二邊形

[圖狀總類數] 4·4+3+1+4·3+2+4·1+3+2+1 =20+14+8+2　5·4+2+4·3+3+1+4·2+3+2+1 =22+16+10+4

→ 十三邊形 → 十四邊形

[圖狀總類數] 5·4+3+1+4·4+2+4·2+3+1+4·1+2+1 =24+18+12+6+1　6·4+2+4·4+3+1+4·3+2+4·1+3+2+1 =26+20+14+8+2

→ 十五邊形 →………… → N 邊形

[圖狀總類數] 6·4+3+1+5·4+2+4·3+3+1+4·2+3+2+1

=28+22+16+10+4 ....

再將此規律,利用等差級數公式加以公式化,可得如下公式:

(a).N 邊形中:(N=3k+2) (k為正整數)

求級數 $a_N = \underbrace{2+8+14+20+26+32+\cdots\cdots}_{\frac{N+1}{3}\text{項}}$

得: $a_N = \dfrac{\frac{N+1}{3}\cdot[2\cdot 2+(\frac{N+1}{3}-1)\cdot 6]}{2} = \dfrac{N+1}{3}\cdot[2+(\dfrac{N+1}{3}-1)\cdot 3] = \dfrac{N(N+1)}{3} = \dfrac{N^2+N}{3}$

(b).N 邊形中:(N=3k+3) (k為正整數)

求級數 $a_N = \underbrace{4+10+16+22+28+34+\cdots\cdots}_{\frac{N}{3}\text{項}}$

得: $a_N = \dfrac{\frac{N}{3}\cdot[2\cdot 4+(\frac{N}{3}-1)\cdot 6]}{2} = \dfrac{N}{3}\cdot[2+(\dfrac{N}{3}-1)\cdot 3] = \dfrac{N(N-1)}{3} = \dfrac{N^2-N}{3}$

(c).N 邊形中:(N=3k+4) (k為正整數)

求級數 $a_N = 1+\underbrace{6+12+18+24+30+36+\cdots\cdots}_{\frac{N-1}{3}\text{項}}$

得: $a_N = \dfrac{\frac{N-1}{3}\cdot[2\cdot 6+(\frac{N-1}{3}-1)\cdot 6]}{2}+1 = \dfrac{N-1}{3}\cdot[6+(\dfrac{N-1}{3}-1)\cdot 3]+1 = \dfrac{N^2+N+1}{3}$

(註 : $N=3, a_3=4$; $N=4, a_4=6$)

其次,再將定點 P 位於 N 邊形各位置時,所得圖狀種類數量公式,整理如下:

形式 / 位置	N= 2k+1 (k 為正整數)	N= 2k+2 (k 為正整數)
P 位於頂點	$\frac{(N-1)^2}{4}$	$\frac{N^2-2N}{4}$
P 位於邊上	$\frac{N^2-1}{4}$	$\frac{N^2}{4}$
P 位於內部	$\frac{(N+1)^2}{4}$	$\frac{N^2+2N}{4}$

形式 / 位置	N= 3k+2 (k 為正整數)	N= 3k+3 (k 為正整數)	N= 3k+4 (k 為正整數)
P 位於外部	$\frac{N^2+N}{3}$	$\frac{N^2-N}{3}$	$\frac{N^2+N+1}{3}$
	(註 : $N=3, a_3=4$; $N=4, a_4=6$)		

捌、研究的心得與結論:

(一).過 N 邊形邊上(含頂點)之定點,都只有一組“最佳分割線”

(二).採共角定理法可作過三角形內部之定點的三等分面積線,又依三邊之三分點及中點,可將三角形分成以下三類區域:

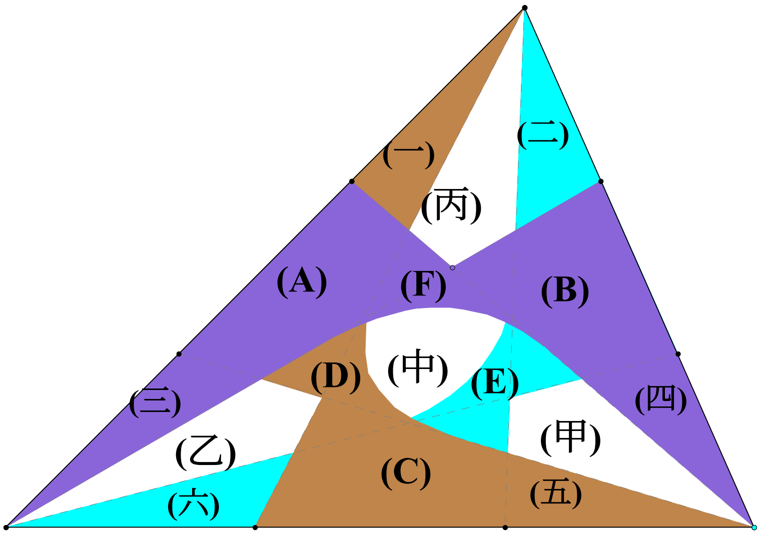
(*i*).單一區:能作出一組"最佳分割線",如下圖中之(一)(二)(三)(四)(五)(六)區

(*ii*).重疊區:能作出兩組"最佳分割線"。如下圖中之(*A*)(*B*)(*C*)(*D*)(*E*)(*F*)區

(*iii*).空白區:分成:

(*a*)能作出分割出$\frac{2}{3}$原三角形面積區:如下圖之(甲)(乙)(丙)區,能作出二組"最佳分割線"

(*b*)能作出分割出$\frac{1}{2}$原三角形面積區:如下圖之(中)區(包絡線區),只會作出"次佳分割線"



(三).過 N 邊形內部一點三等分面積的具體作法:

(1).作N邊形各邊之三等分線以及包絡線區

(2).確定定點是對何頂角作分割線?作出是何種面積比值的三角形?

(3).對所分出之三角形及剩餘四邊形作適當的比例分配

(四).過 N 邊形內部之定點(除包絡線區外)三等分面積,都有兩組“最佳分割線”

(五).過 N 邊形外部一點三等分面積,都有一組“最佳分割線”

(六).過 N 邊形之定點,不論其位於邊上、內部或外部,都可先將 N 邊形轉換成三角形或四邊形,再依三角形或四邊形三等分面積的作法,作得 N 邊形的三等分面積線(含“次佳分割線”)

(七).定點 P 位於 N 邊形各位置時,所形成各種圖形及圖狀種類數量公式如下：

形式 / 位置	N= 2k+1 (k 為正整數)	N= 2k+2 (k 為正整數)
P 位於頂點	$\dfrac{(N-1)^2}{4}$	$\dfrac{N^2-2N}{4}$
	其圖狀之所有圖形介於三角形與 N 邊形之間	
P 位於邊上	$\dfrac{N^2-1}{4}$	$\dfrac{N^2}{4}$
	其圖狀之所有圖形介於三角形與(N+1)邊形之間	
P 位於內部	$\dfrac{(N+1)^2}{4}$	$\dfrac{N^2+2N}{4}$
	其圖狀之所有圖形介於三角形與(N+2)邊形之間	

形式 / 位置	N= 3k+2 (k 為正整數)	N= 3k+3 (k 為正整數)	N= 3k+4 (k 為正整數)
P 位於外部	$\dfrac{N^2+N}{3}$	$\dfrac{N^2-N}{3}$	$\dfrac{N^2+N+1}{3}$
	(註 : $N=3, a_3=4$; $N=4, a_4=6$)		
	其圖狀之所有圖形介於三角形與(N+2)邊形之間		

玖、問題的討論與展望:

能夠如期完成此篇報告,首先要感謝老師的指導。然而美中不足的是:(1).對於各位置“ 最佳分割線 ”的組數只能說明,而無法証明(2).對於 N≧4 時的“ 包絡線區 ”,而無法完整繪出(3).對於三等分凹多邊形面積,無法完全突破。此三問題,還請教授予以指導！(現將所研究之三等分凹多邊形面積置於[附件(九)]

柒、參考資料:

中華民國第四十二屆數學科展(高中組)

030419