
030420

--	--

正多邊形的可造性與可摺性

摘要

本報告旨在利用國中所學的數學概念、探討如何以尺規作圖作出正多邊形、如何以方形紙摺出正多邊形

壹、研究動機：

國中數學第一、二冊中談到正多邊形，現在我們又學會尺規作圖，從線對稱當中，我們又體會出摺紙和數學的趣味關係，如今我們想融合尺規作圖和摺紙藝術來探討正多邊形

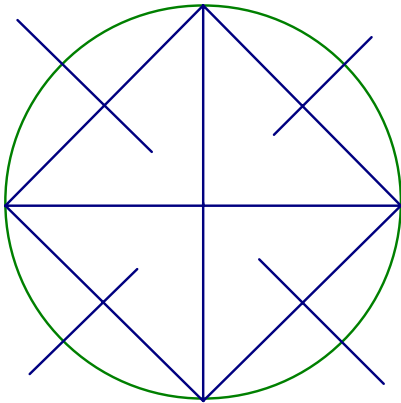
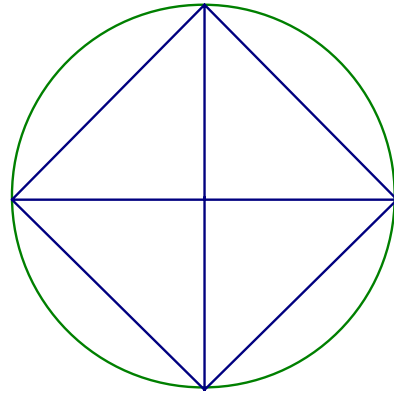
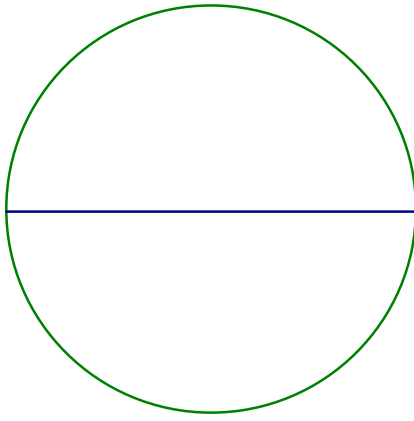
貳、研究目的：

當一個圖形可以用尺規作圖完成時我們稱它具有可造性，若這個圖形可以用方形紙摺出時，我們稱它具有可摺性，以下我們將就我們目前的數學知識來探討正多邊形的可造性與可摺性

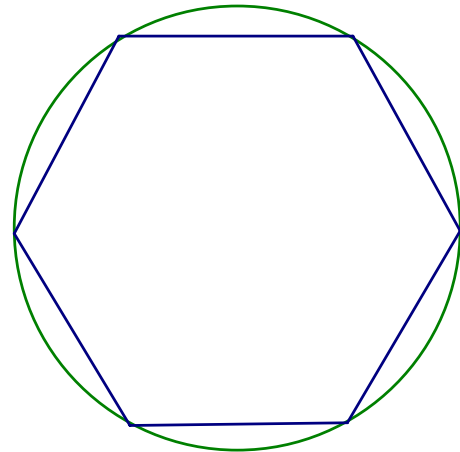
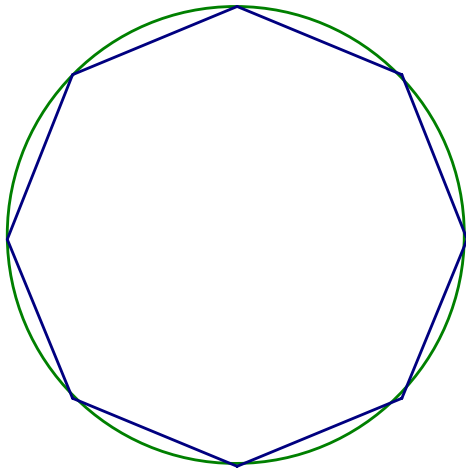
參、研究過程：

一. 正多邊形的尺規作圖

1. 如果已造出某正 n 邊形，再作每一邊的中垂線令其交正 n 邊外接圓的圓周上一點，可得 n 個交點，連同原來正 n 邊形的 n 個頂點，可逐次連接成正 $2n$ 邊形
2. 反之、如已知正 $2n$ 邊形，從任一點開始每間隔一個頂點逐次作頂點的連接線段，就可造得正 n 邊形
3. 根據 1.2.原則我們開始造邊數最小的正 n 邊形



.....



從上圖可知正 2×2^n 及正 3×2^n 邊形可以尺規造出

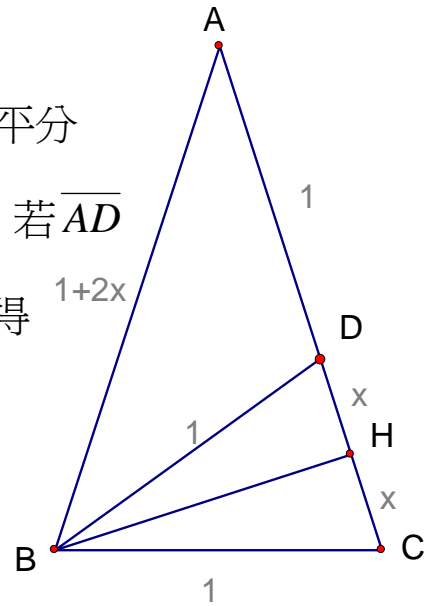
4. 若 $\triangle ABC$ 為一頂角為 36° 等腰三角形，作 \overline{BD} 平分

$\angle ABC$ ，再作 $\overline{BH} \perp \overline{CD}$ ，設 $\overline{DH} = \overline{CH} = x$ ，若 $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BC} = 1$ ，則根據 三角形相似性質可得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \text{ 即 } \frac{2x+1}{1} = \frac{1}{2x} \quad 4x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ 即 } 18^\circ, 72^\circ, 90^\circ \text{ 的直角三角}$$

形之邊長比為 $(\sqrt{5}-1) : \sqrt{10+2\sqrt{5}} : 4$



5. 利用 4. 所得性質按以下步驟即可造出正五邊形

(1) 任作一圓 O 並在圓 O 上作互相垂直的兩直徑 \overline{AB} 、 \overline{CD}

(2) 取 \overline{OC} 中點 E 作 \overline{BE}

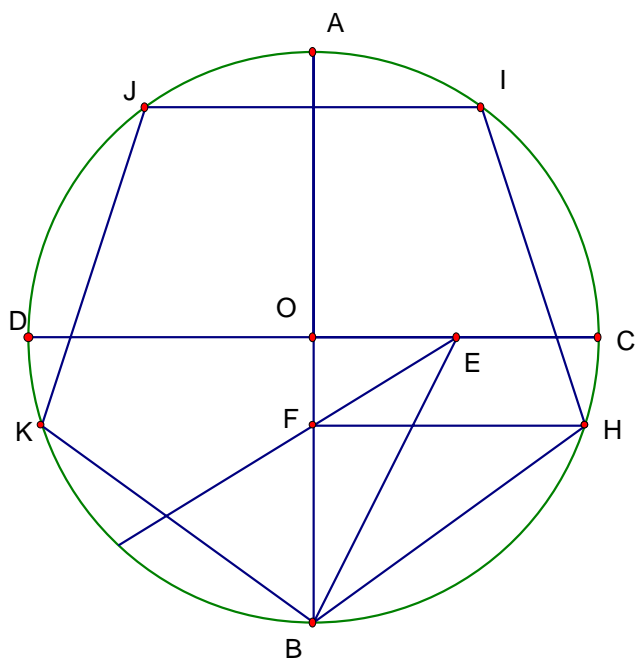
(3) 作 $\angle OEB$ 的平分線交 \overline{OB} 於 F

(4) 過 F 作 \overline{BO} 的垂直線交圓 O 於 H

(5) 在圓 O 上取 I 、 J 、 K 三點使弧 $BH = \text{弧 } HI = \text{弧 } IJ = \text{弧 } JK = \text{弧 } KB$

即成正五邊形 $BHIJK$

故正 5×2 邊形也可以尺規作圖造成。

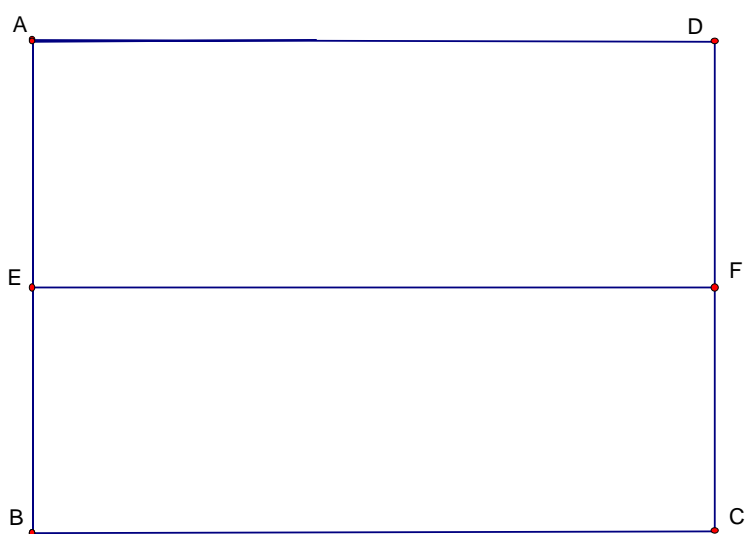


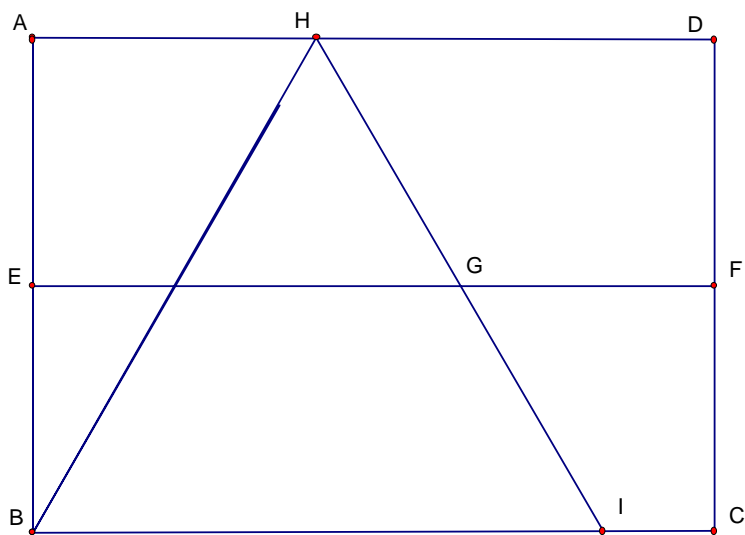
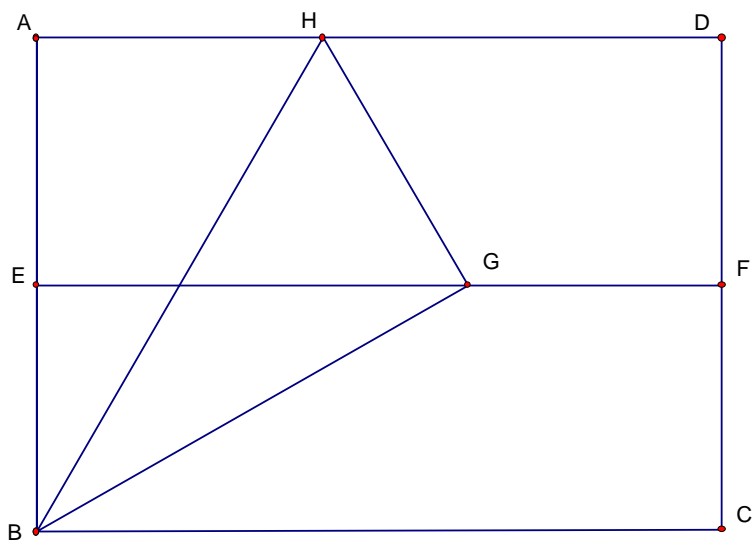
二、正多邊形摺法

1. 正三角形摺法

(1). 在矩形 ABCD (設 $\overline{AD} > \overline{AB}$) 中取中線 \overline{EF}

(2). 以 B 點為中心，將左上角 A 點置於 \overline{EF} 上 G 點摺出摺痕 \overline{BH} ，再沿 \overline{HG} 摺出摺痕 \overline{HI} ，則 $\triangle BHI$ 即為正三角形





2. 正五邊形摺法

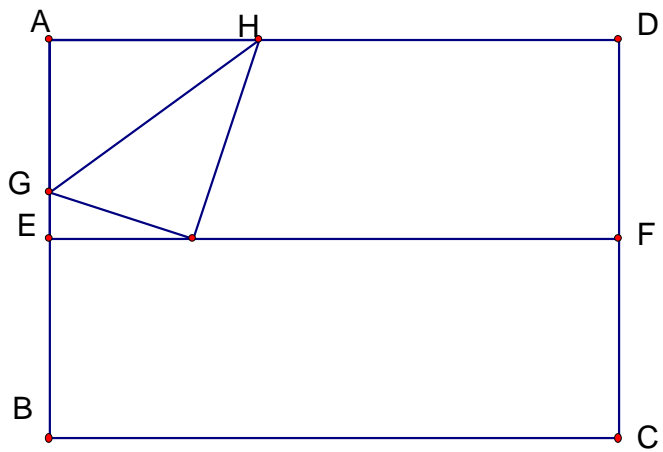
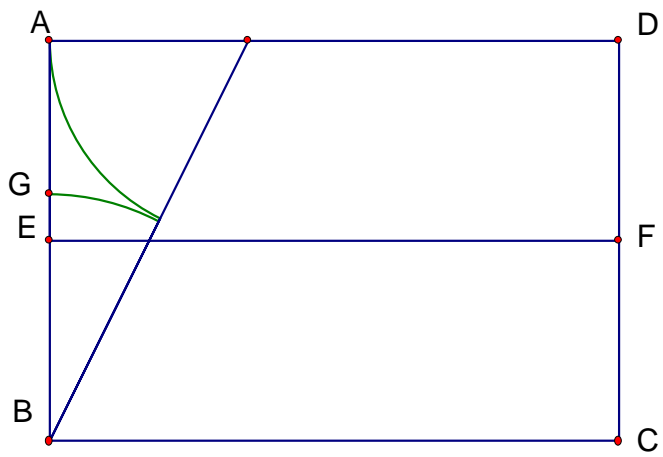
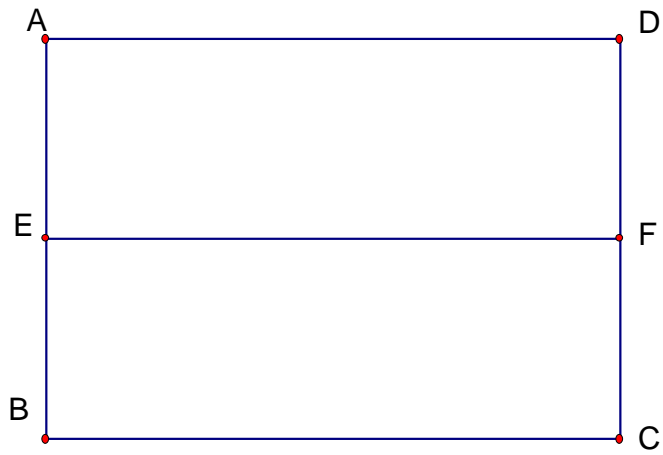
(1).在矩形 $ABCD$ (設 $\overline{AD} > \overline{AB}$)中取中線 \overline{EF}

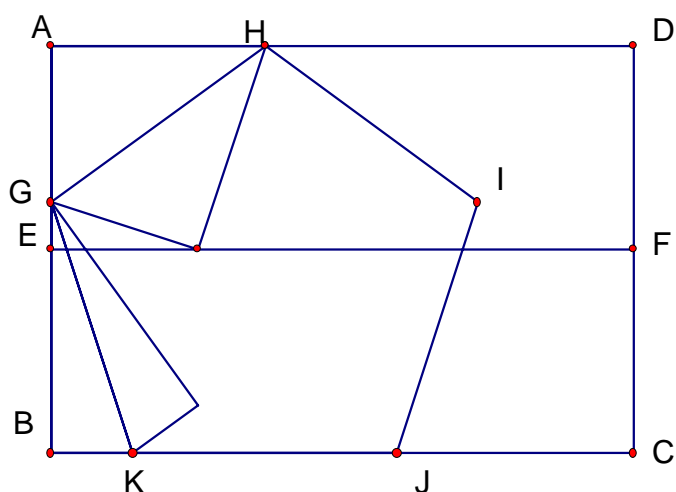
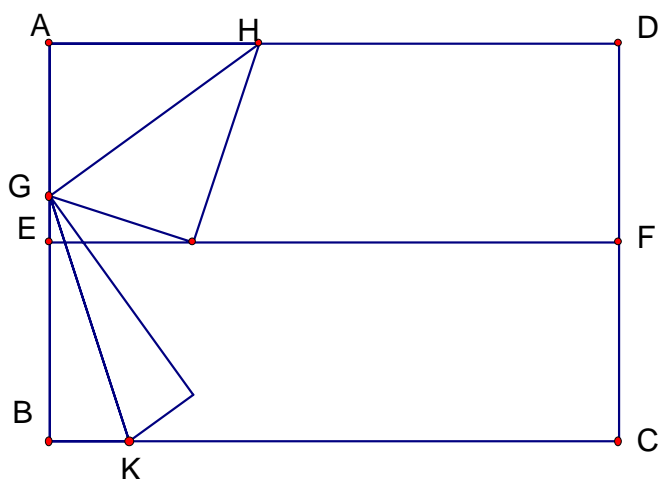
(2).找出 \overline{AB} 的黃金分割點 G

(3).以 G 點為中心，將 A 點置於 \overline{EF} 上，摺出摺痕 \overline{GH} ，

\overline{GH} 即為正五邊形的一邊

(4).再利用正五邊形的對稱性質即可摺出正五邊形 $GHIJK$





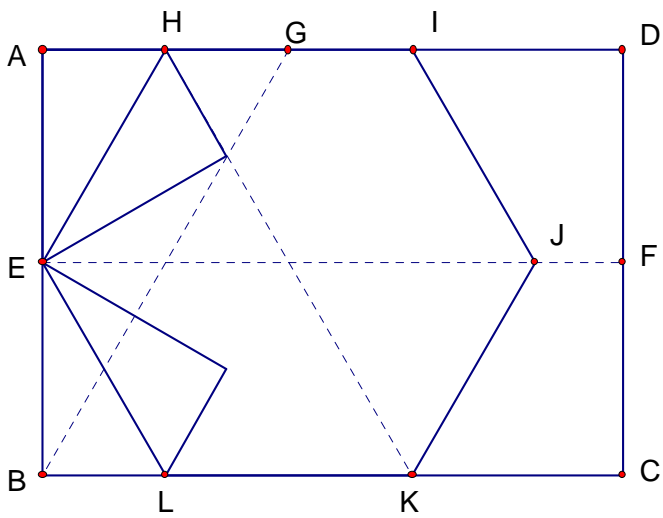
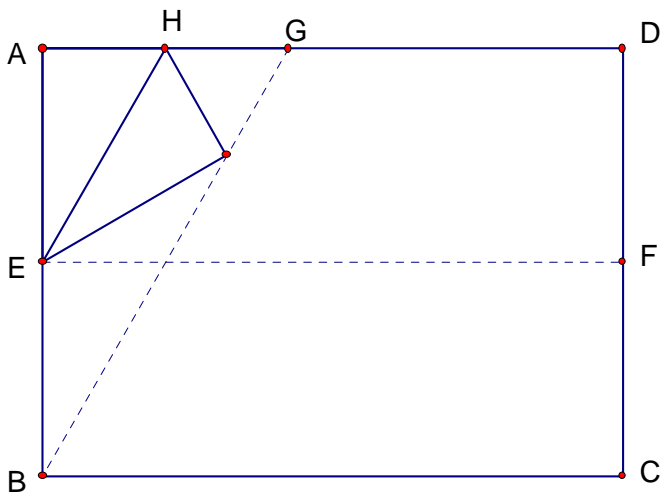
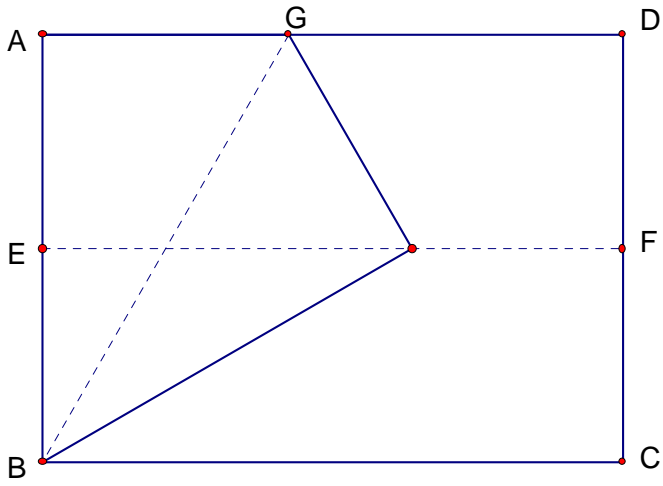
3.正六邊形摺法

(1).在矩形 ABCD(設 $\overline{AD} > \overline{AB}$)中,先利用正三角形摺法的第一步驟

找出摺線 \overline{BG}

(2).以 E 為中心將 A 點置於 \overline{BG} 上摺出摺痕 \overline{EH}

(3).再根據正六邊形對稱性質即可作出正六邊形 EHIJKL



4.正八邊形摺法

(1).作一矩形 ABCD 使 $\overline{AB}:\overline{BC} = 1:\sqrt{2}$

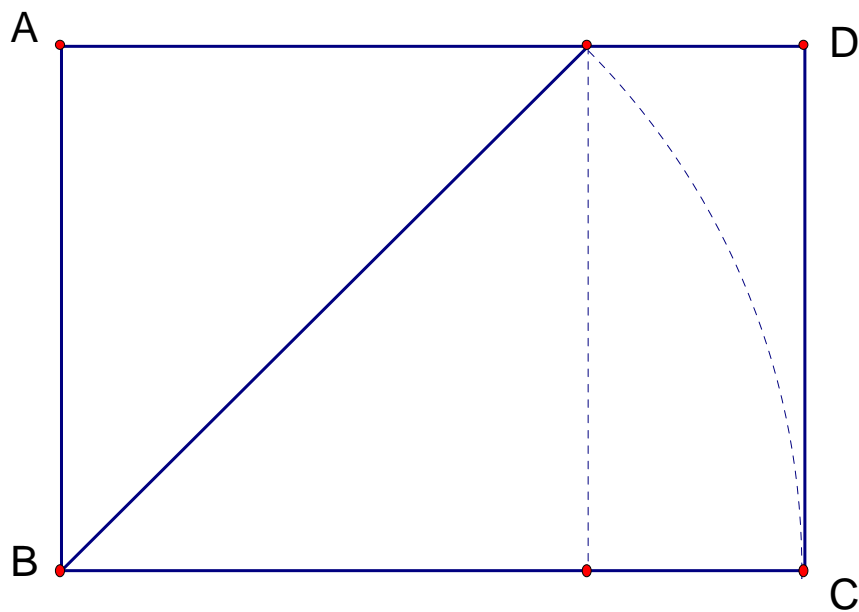
(2).作正方形 ABFE 及其中心 O

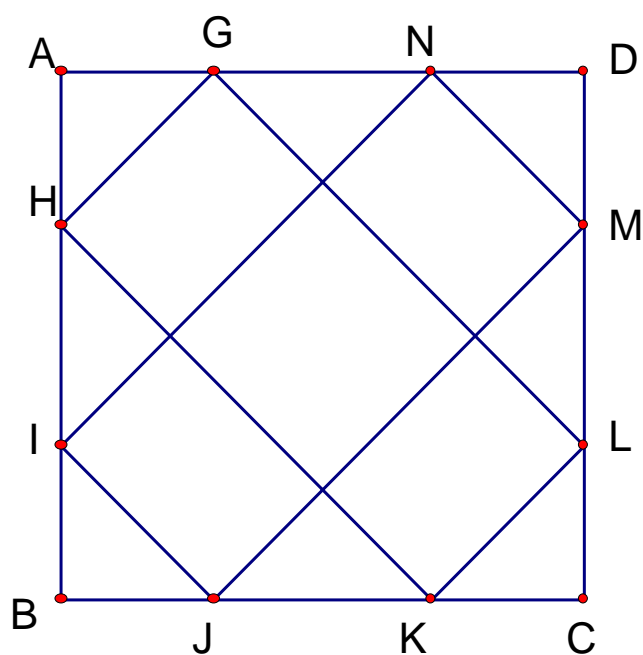
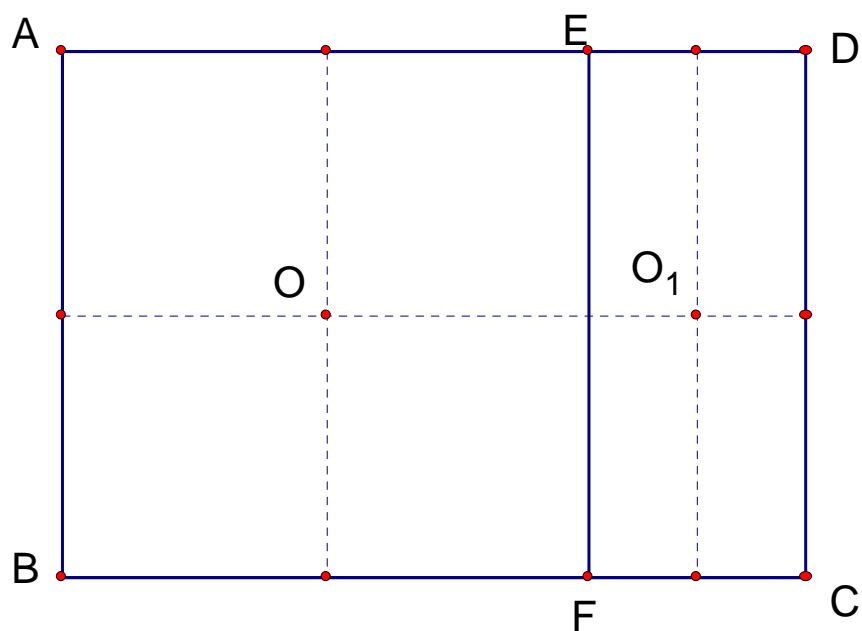
(3).將矩形 EFC D 剪下並取其中心 O_1

(4).讓矩形 EFC D 置於正方形 ABFE 上使 O_1 點落在 O 點上矩形的四個頂點分別落在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 上 I、J、M、N 四點

(5).按以上方法轉另一個方向取 G、H、K、L 四點，

則成正八邊形 GHIJKLMN





5. 正十邊形摺法

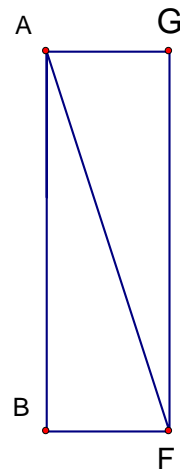
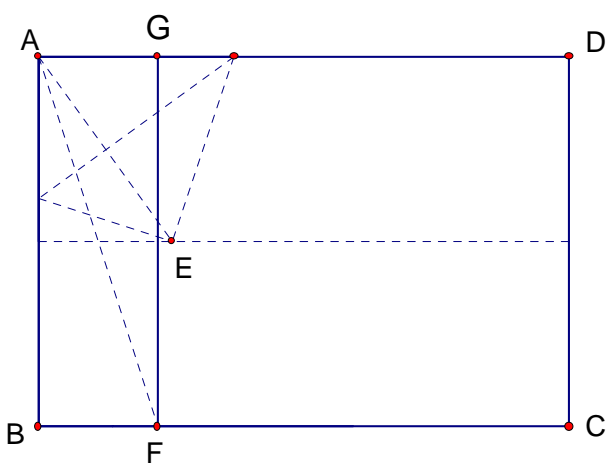
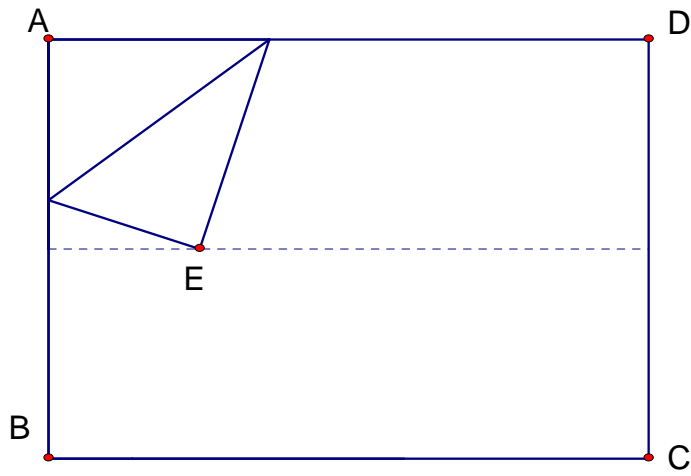
(1). 依摺正五邊形的第一步驟在矩形 ABCD 上取 E 點，

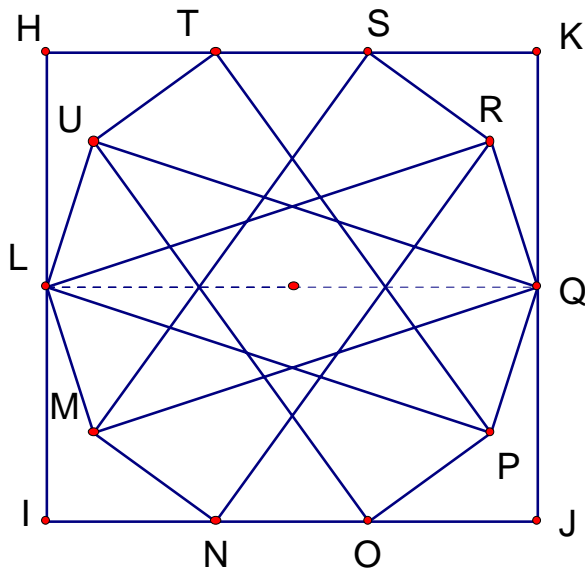
則 $\angle BAE = 36^\circ$

(2). 平分 $\angle BAE$ 得 F 點再作矩形 ABEF

(3). 作一矩形 HIJK 使 $\overline{HK} = \overline{AF}$ 、 $\overline{HI} = \overline{AB}$

(4).將矩形 ABFG 移置到矩形 HIJK 上使兩矩形中心重疊，依下圖方法可得正十邊形 LMNOPQRSTU





6.正十二邊形摺法

(1).依正三角形摺法的第一步驟，在矩形 ABCD 上摺一摺痕 \overline{BE} 使

$$\angle ABE = 30^\circ$$

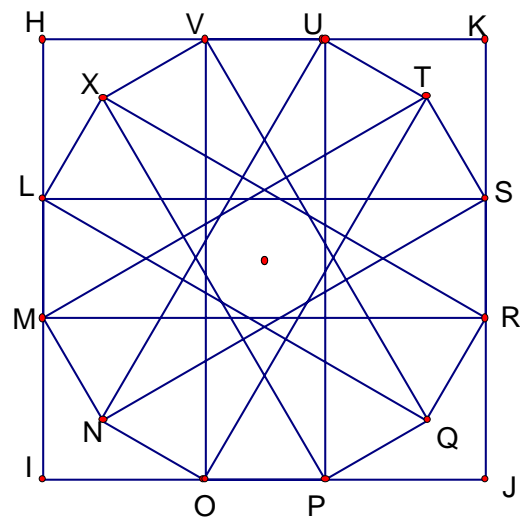
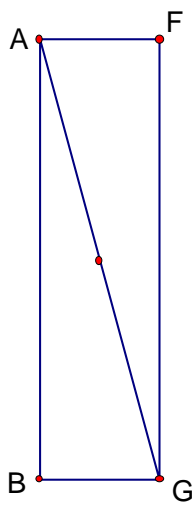
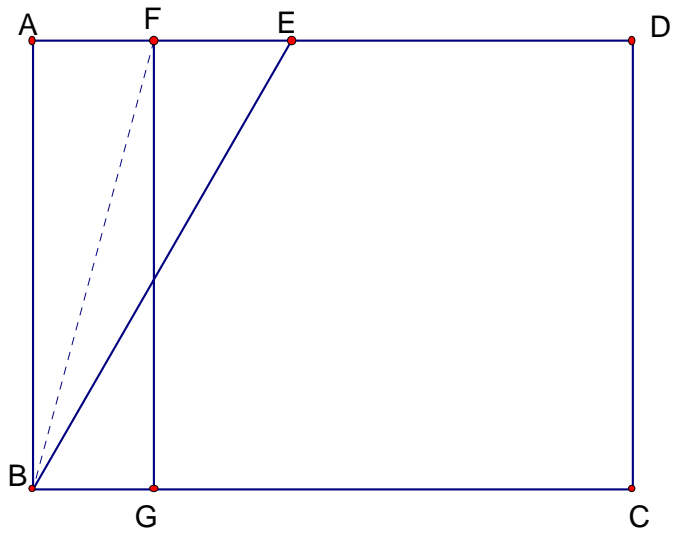
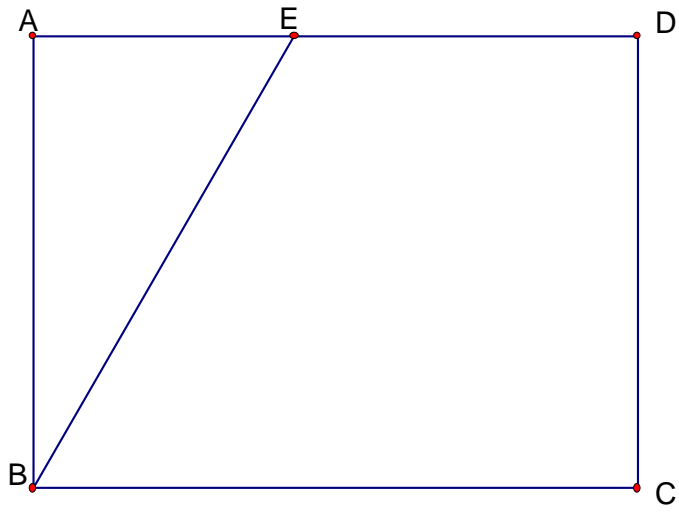
(2).平分 $\angle ABE$ 則 $= 15^\circ$ 作矩形 ABGF

(3).取一正方形 HIJK 使 $\overline{HI} = \overline{AB}$

(4).將矩形 ABGF 置於正方形 HIJK 上使矩形與正方形的中心點

重疊如圖可得 L、M、N、O、P、Q、R、S、T、U、V、X 等

12 點而得正十二邊形



肆、結論:

1. 以目前我們所學的數學定理和觀念，應用尺規作圖可作出正 4×2^n 邊形、 3×2^n 邊形、 5×2^n 邊形，其中 $n=0、1、2、3、\dots$
2. 以一張矩形紙張依上法可以摺出正三角形、正五邊形、正六邊形、正八邊形、正十邊形、正十二邊形
3. 當 $n=4k+2$ 時，若能得到 $\frac{180^\circ}{n}$ 角，則可仿正 10 邊形作法摺出正 n 邊形(其中 k 為正整數)
4. 當 $n=4k$ 時，若能得到 $\frac{180^\circ}{n}$ 角，則可仿正 12 邊形作法摺出正 n 邊形(其中 k 為正整數)

伍、研究心得:

以上有關正多邊形可造性與可摺性的研究僅止於目前我們所學，盼望往後在數學研究上對相關題材有更進一步的發現

陸、參考文獻：

1. 國中數學第 2、3、4、5、6 冊
2. 用摺紙來學數學 (國際村文庫書店有限公司)

030420

1.

2.

3.