

---

030423

---

--	--

---

# 拿破崙 與畢氏定理的聯想

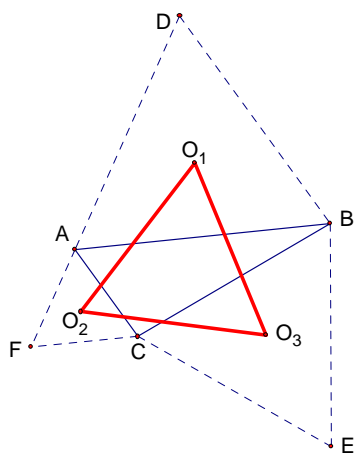
## 壹、摘要：

以任意 三邊為直徑的半圓，依相同圓心角所畫出來的三切線相交所成的 必與原 相似，不論這些半圓同時向外畫或同時向內畫或內外混雜著畫，所作出來的 一定都與原 相似。對任一直角 ，若兩股的半圓往外畫，斜邊的半圓向內畫，取圓心角為  $30^\circ$  時，所作出來的切線 與原 的邊長比值恆為  $\frac{1}{2}$ ，本文掌握它的逆向作圖法，因此對任一直角 ，若按此

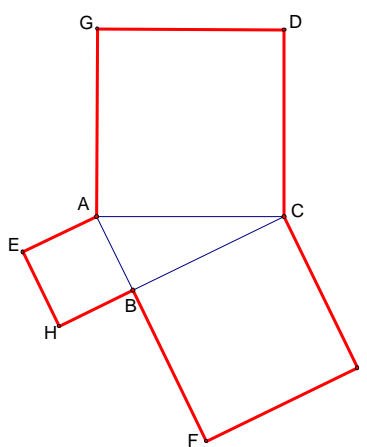
法連續作  $n$  次，即可得  $2^n$  倍的相似 ，反之可得  $(\frac{1}{2})^n$  倍的相似 。 外拿破崙 與內拿破崙 的面積差恆與原 的面積相等，這是一個著名的拿破崙 性質，本文發現了一個同樣有趣的性質：在同圓心角的條件下，向外與向內切線 的對應邊長和，恆為圓心角是  $0^\circ$  時的邊長的兩倍。

## 貳、研究動機：

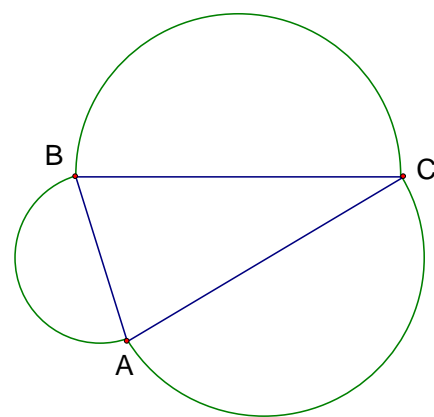
在一篇數學課外文章中提到著名的拿破崙 ，如圖(1)，以任一 的三邊為邊長分別往外畫正 ，再分別連接這三個正 的中心點，結果會發現  $O_1O_2O_3$  仍為正 ，而內外兩拿破崙 的面積差恆等於原 的面積。又畢達哥拉斯發現，以任一直角 的三邊長為邊長分別往外畫正方形，結果會發現那兩個小正方形的面積會等於最大的那個正方形面積，如圖(2)。由於正 、正方形都是正多邊形，當它們畫在 的三邊上都有意外的發現，而正多邊形當邊數無限增多時可看成近似一個圓，因此我們想嘗試在一般 的三邊上，分別畫出半圓，如圖(3)，希望也能發現一個有特點的性質。



圖(1)



圖(2)



圖(3)

## 參、研究目的：

利用幾何知識探討如圖(3)的一個有特色的幾何性質

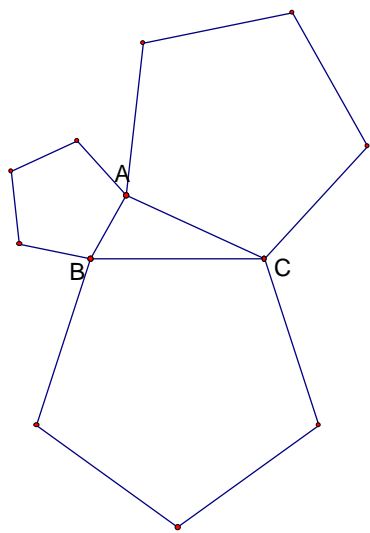
## 肆、研究設備器材：

紙、尺、筆、圓規、GSP 軟體。

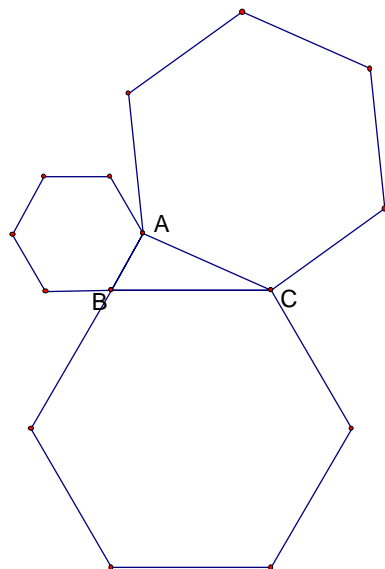
## 伍、研究過程：

首先我們要再解釋研究動機中的圖(3)靈感是怎麼來的，觀察圖(1)的拿破崙 的圖形構造是由三角形的三邊各自往外畫一個正 ，而在圖(2)的構造是由直角 的三邊各自往外畫正方形。按此道理擴展下去應該也可以往外畫正五邊形，如圖(4) 正六邊形，如圖(5)

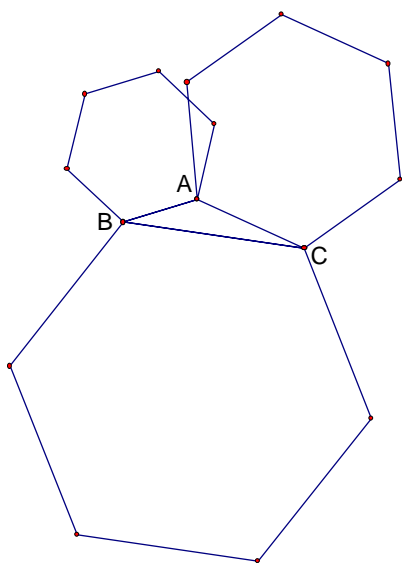
等，但這有些先天上的問題缺陷，就是那些正多邊形會漸漸重疊，如圖(6)，若要不使它們重疊，則母 要越來越特殊才行，也就是說最後很可能母 都要變成正 時，圖形才像個樣。但我們知道當邊數愈來愈多時，正多邊形就越接近圓形，且為了使母 不要特殊化成正 ，如圖(7)，我們設計了三邊各自往外畫半圓的圖形架構，如圖(3)。如此一來，對任一鈍角、直角 或銳角 來說，以三邊為直徑各自往外畫半圓所形成的圖形就顯得較自然了。



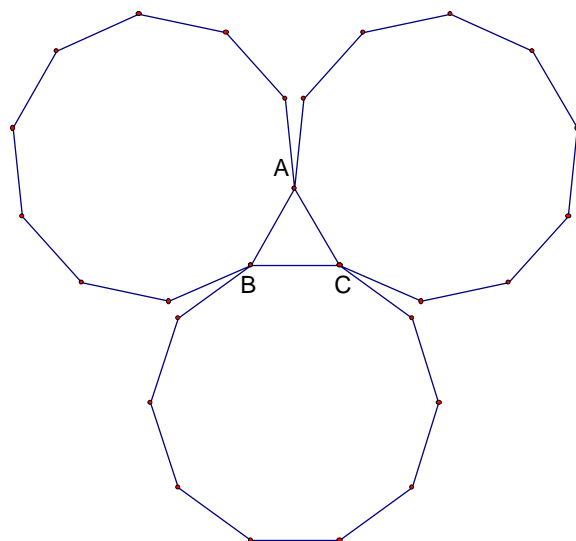
圖(4)



圖(5)



圖(6)



圖(7)

接下來另一條重要的線索是在圖(2)的畢氏圖中若分別延長  $\overrightarrow{DG}$ 、 $\overrightarrow{EH}$ 、 $\overrightarrow{FI}$  得直線  $L_b$ 、 $L_c$ 、 $L_a$ ，各交於  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  點，如圖(8)，則明顯的我們可以得知， $A_1B_1C_1 \sim ABC$ ，因此我們自然的就能想到若我們在圖(3)的三個半圓弧上分別畫出切線  $L_b$ 、 $L_c$ 、 $L_a$ ，設三切線各自平行原 的對應邊，且三交點各為  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ ，則明顯的  $A_1B_1C_1 \sim ABC$ ，如圖(9)

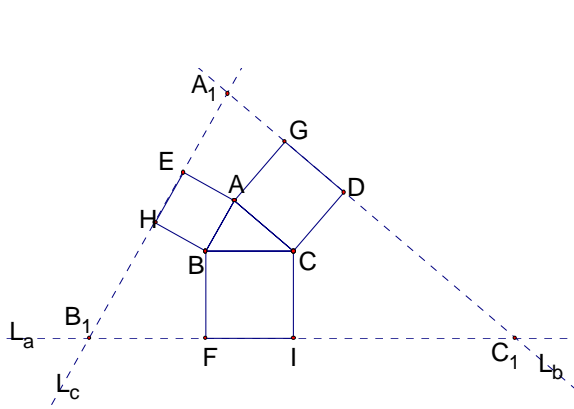


圖 (8)

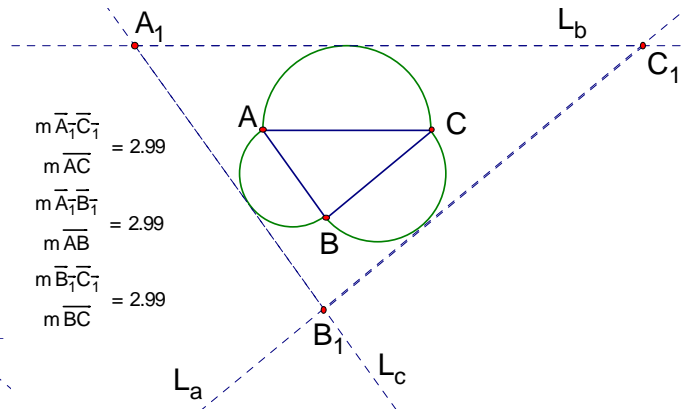


圖 (9)

而當  $L_b$ 、 $L_c$ 、 $L_a$  逐漸向內平移成為割線時，我們顯然可以得知， $A_1B_1C_1 \sim ABC$ ，如圖 (10) 圖 (11) 圖 (12)，其中割線與各自對應邊長的距離分別為  $\frac{1}{2}r$ 、 $\frac{1}{4}r$ 、 $0$  ( $r$  表半徑)。由相似形概念，可推得邊長比值分別為 2、1.5 和 1。

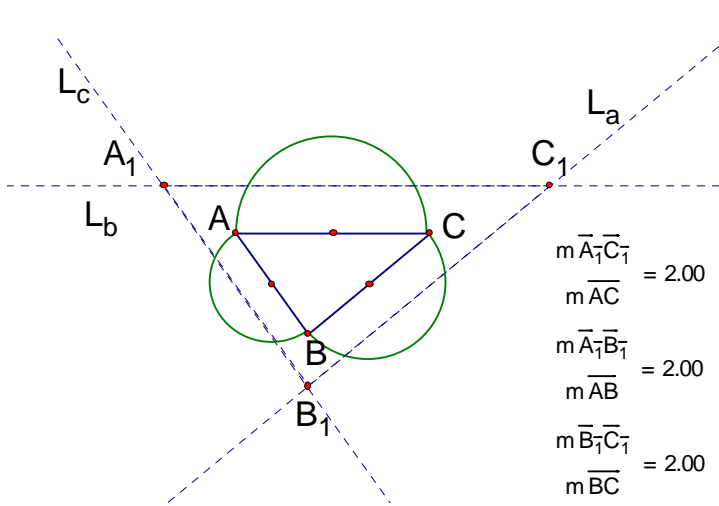


圖 (10)

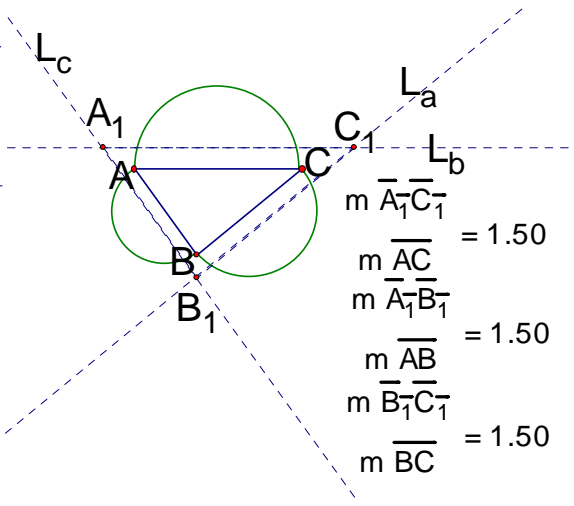


圖 (11)

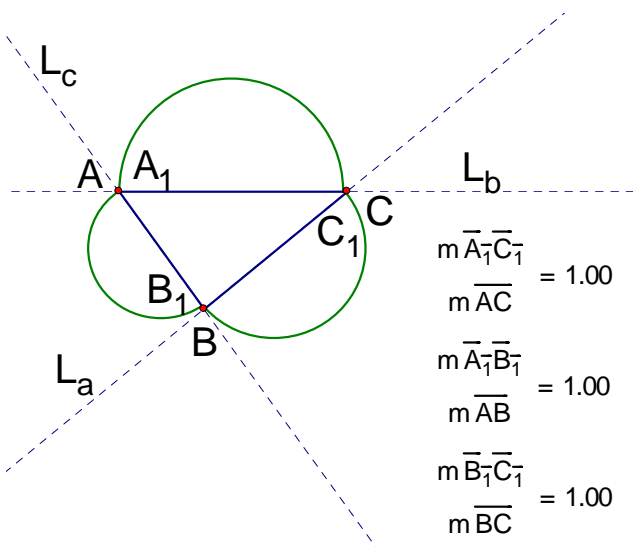


圖 (12)

在圖 (12) 中， $L_a$ 、 $L_b$ 、 $L_c$  已分別和原三邊重合，當然  $A_1B_1C_1 \sim ABC$ ，經由這個

圖我們聯想到將三割線的一端若固定在原 的一頂點上，如圖 (13) (14) (15) (16)，而各取圓周角  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ 時，這時  $A_1B_1C_1$  仍會相似  $ABC$  嗎？

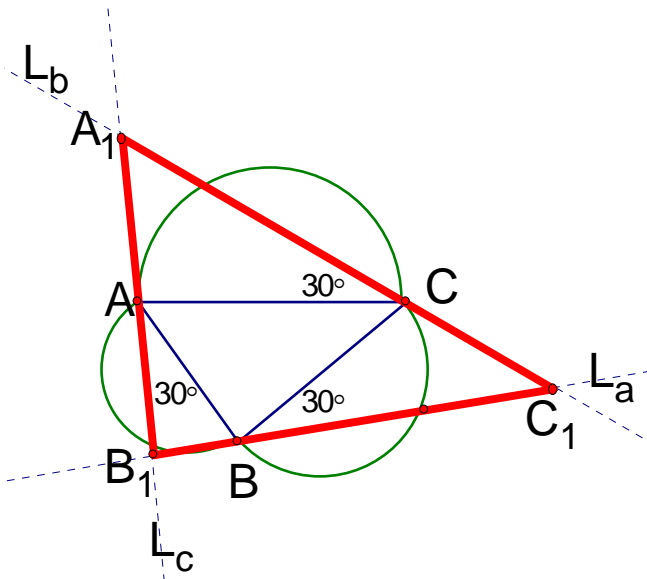


圖 (13)

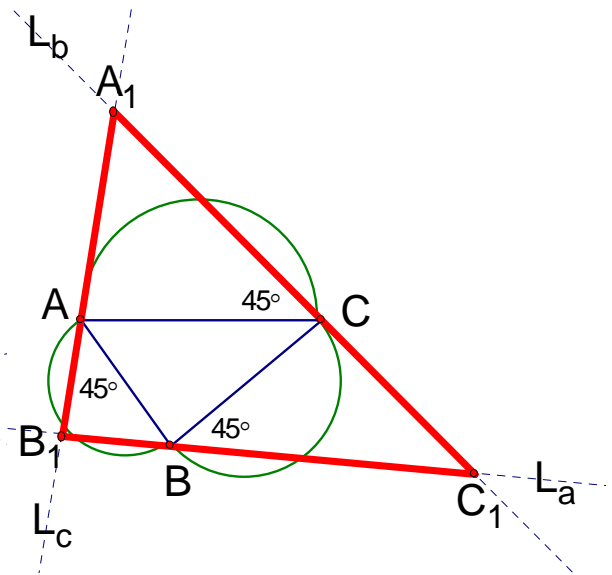


圖 (14)

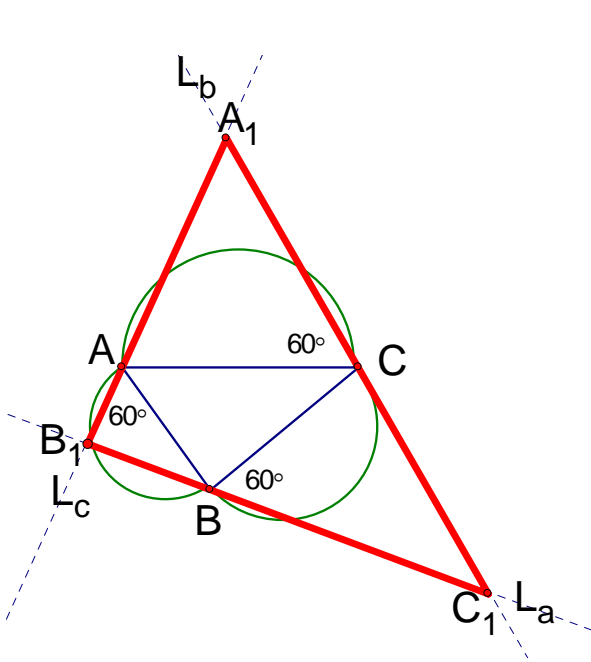


圖 (15)

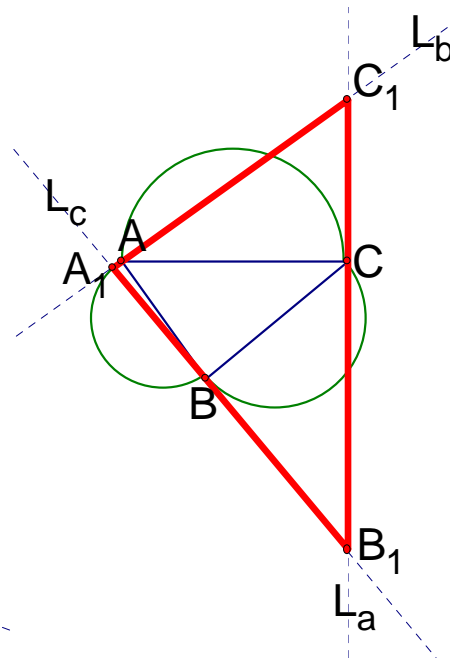


圖 (16)

以圖 (13) 為例，三割線  $L_a$ 、 $L_b$ 、 $L_c$  與對應三邊長的圓周角為  $30^\circ$ 。

$$\text{則 } \angle B_1AC = \angle AA_1C + \angle ACA_1$$

$$\text{即 } 30^\circ + \angle BAC = \angle AA_1C + 30^\circ$$

$$\angle BAC = \angle AA_1C$$

$$\text{同理 } \angle ABC = \angle BB_1A \quad \angle ACB = \angle CC_1B$$

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \quad (\text{AA 相似})$$

注意圖 (16) 中，當圓周角為  $90^\circ$  時，其實  $L_a$ 、 $L_b$ 、 $L_c$  已變為切線了，而圓周角其實已變為弦切角，此弦是半圓的直徑，這又引起我們更進一步的聯想，我們若將三切線的切點沿

著半圓弧移動並觀察圓心角為  $0^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $120^\circ$  時三切線交成的  $A_1B_1C_1$  (之後都簡稱為切線), 則它與原  $ABC$  是否相似呢? 如圖 (17) (18) (19) (20), 這就形成了研究動機中圖 (3) 的架構了。我們的研究重點將從此處展開!

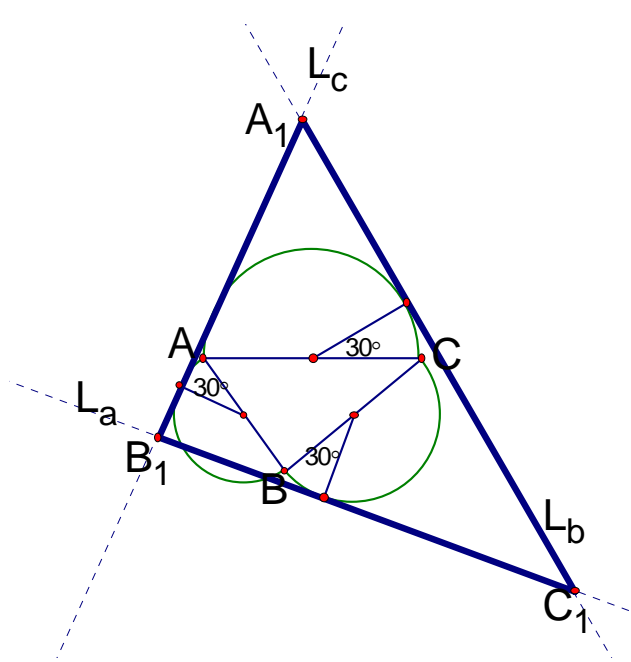


圖 (17)

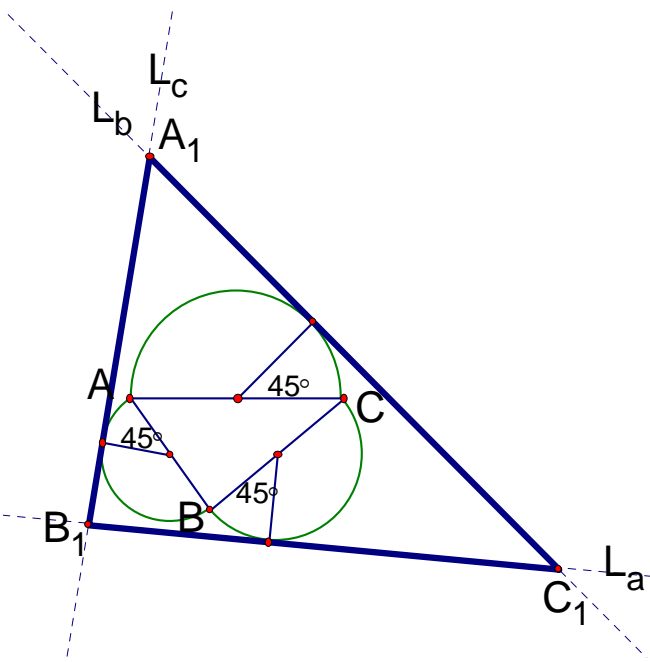


圖 (18)

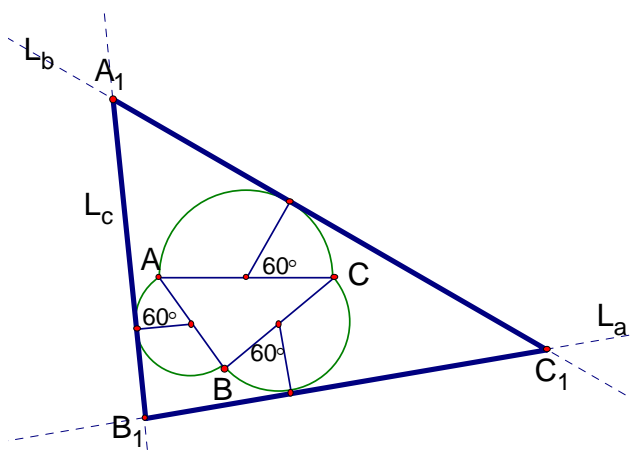


圖 (19)

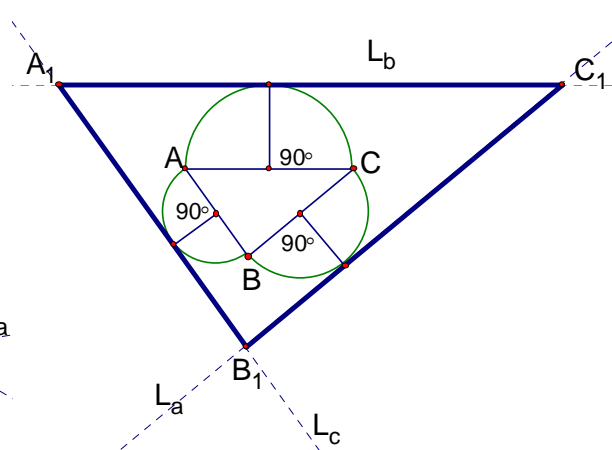
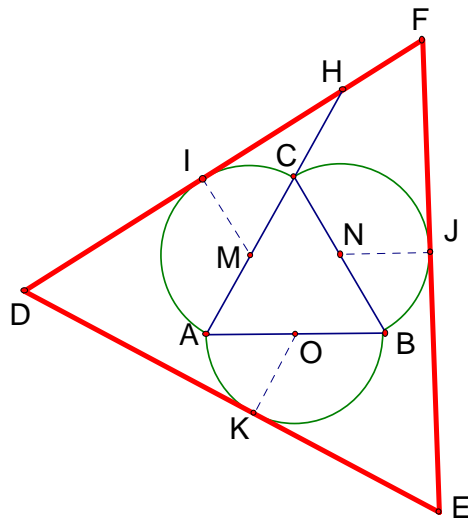


圖 (20)

為簡化此架構, 先從最簡單的正 開始著手。也就是說若在圖(3)中的  $ABC$  為正 時, 則同圓心角的切線三角形是否和原  $ABC$  相似呢? 又邊長比值要如何計算?



圖(21)

說明如下：

已知：如圖(21)，M、N、O 各為正  $ABC$  三邊上的中點， $\overline{MI}$ 、 $\overline{OK}$ 、 $\overline{NJ}$  皆為半徑且  $CMI = AOK = BNJ$ ，再分別過 I、J、K 做其切線相交於 D、E、F  
試證： $DEF \sim ABC$

證明：(1) 設三邊中點為 O、N、M，三切線依次為 K、J、I

(2) 設  $CMI = JNB = KOA = a^\circ$  (圓心角)

(3) 延長  $\overline{AC}$ ，交  $\overline{DF}$  於 H

(4) 在 HIM 中， $CHF = 90^\circ + a^\circ$  (外角性質)

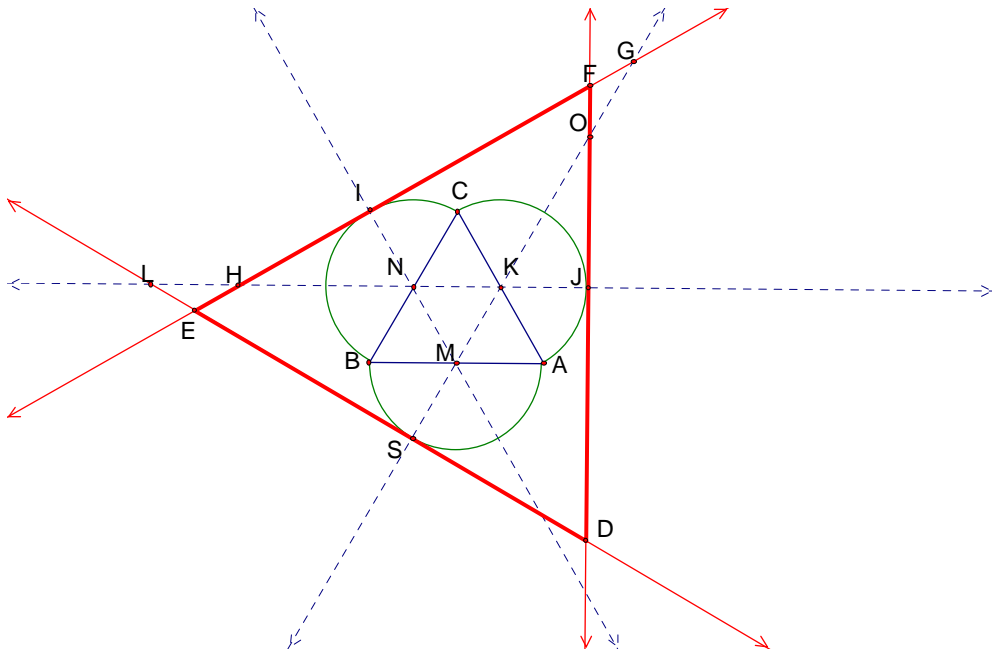
(5)  $HCN = 120^\circ$ ， $JNC = 180^\circ - a^\circ$ ， $NJF = 90^\circ$

(6) 在 CNJFH 中， $F = 540^\circ - CHF - HCN - JNC - NJF$   
 $= 540^\circ - (90^\circ + a^\circ) - 120^\circ - (180^\circ - a^\circ) - 90^\circ$   
 $= 540^\circ - 90^\circ - a^\circ - 120^\circ - 180^\circ + a^\circ - 90^\circ$   
 $= 60^\circ = \angle ACB$

(7) 同理  $\angle D = \angle CAB$

(8) 由 (6)、(7) 得  $ABC \sim DEF$  (AA 相似)

證明此作圖法做出的  $DEF$  會和原來的正  $ABC$  相似後，我們並進一步計算當圓心角為特殊角度的相似正  $DEF$  與原正  $ABC$  的邊長的比值，我們以圓心角為  $60^\circ$  的為例，如圖(22)。



圖(22)

計算如下：

(1) 設  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 2a$

(2) N、M、K 分別為正 ABC 的三中點， MKN 亦為正

(3) 延長  $\overline{NK}$  交  $\overline{EF}$ 、 $\overline{DE}$  於 H、L

(4) 延長  $\overline{MK}$  交  $\overline{FD}$ 、 $\overline{EF}$  於 O、G

(5)  $\angle INH = 60^\circ$ ，又  $\angle HIN = 90^\circ$ ， $\triangle HNI$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ， $\overline{IN} = a$ 、 $\overline{IH} = \sqrt{3}a$

(6)  $\angle IMG = 60^\circ$ ，又  $\angle GIM = 90^\circ$ ， $\triangle GMI$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ， $\overline{IM} = 2a$ 、 $\overline{IG} = 2\sqrt{3}a$

(7) 在  $\triangle LSK$  與  $\triangle GIM$  中， $\overline{KS} = \overline{MI} = 2a$ ， $\angle LKS = \angle GMI$ ， $\angle KSL = \angle MIG$

$$\triangle LSK \cong \triangle GIM (\text{ASA 全等}), \quad \overline{LK} = \overline{GM}$$

(8) 在  $\triangle INH$  與  $\triangle JKO$  中， $\overline{IN} = \overline{KJ} = a$ ， $\angle INH = \angle JKO$ ， $\angle NIH = \angle KJO$

$$\triangle INH \cong \triangle JKO (\text{ASA 全等}), \quad \overline{HN} = \overline{KO}$$

(9)  $\overline{LK} = \overline{GM}$ ，又  $\overline{HN} = \overline{KO}$ 、 $\overline{NK} = \overline{MK}$ ， $\overline{LK} - \overline{HN} - \overline{NK} = \overline{GM} - \overline{KO} - \overline{MK}$ ， $\overline{LH} = \overline{OG}$

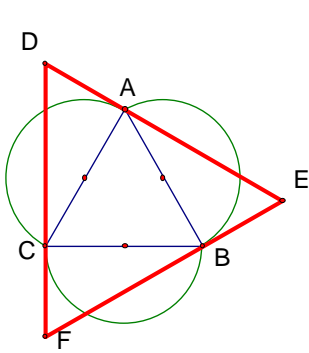
(10) 在  $\triangle LEH$  與  $\triangle GFO$  中， $\angle HLE = \angle OGF = 30^\circ$ ， $\angle LHE = \angle GOF = 30^\circ$ ， $\overline{LH} = \overline{OG}$

$$LEH \cong GFO(\text{ASA 全等}), \quad \overline{EH} = \overline{FG}$$

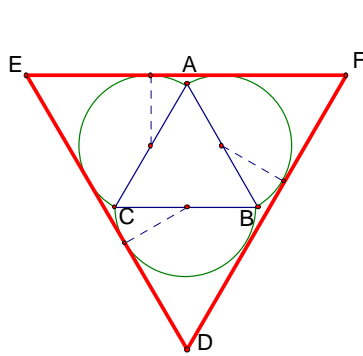
$$(11) \quad \overline{EH} = \overline{FG}, \quad \overline{EF} = \overline{EH} + \overline{HF} = \overline{FG} + \overline{HF} = \overline{IH} + \overline{IG} = \sqrt{3}a + 2\sqrt{3}a = 3\sqrt{3}a$$

$$\overline{EF} : \overline{BC} = 3\sqrt{3}a : 2a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

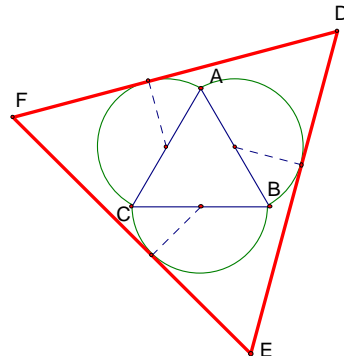
我們也畫出其他特殊角度的圓心角之圖形，並算出其比值列成下表(1)



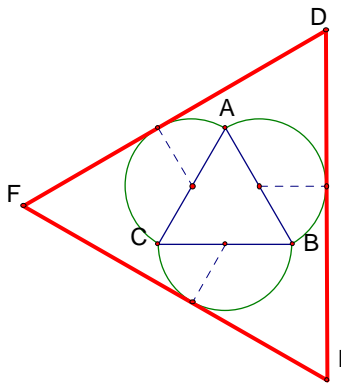
圓心角  $0^\circ$ ，圖(23)



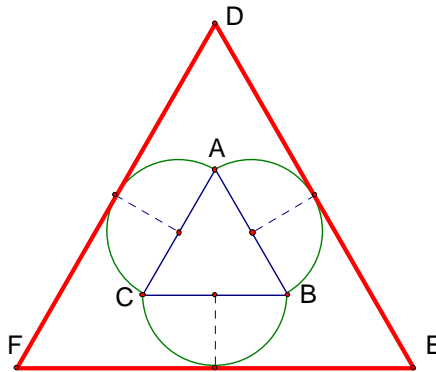
圓心角  $30^\circ$ ，圖(24)



圓心角  $45^\circ$ ，圖(25)



圓心角  $60^\circ$ ，圖(26)



圓心角  $90^\circ$ ，圖(27)

圓心角	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} + \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3} + 1$

表(1)

當將半圓往外的討論完以後，我們也想進一步嘗試將半圓往內作是否有可能得到類似的情形呢？我們的嘗試如下：

已知：如下圖(28)，M、N、P 各為正  $ABC$  三邊上的中點， $\overline{MN}$ 、 $\overline{NP}$ 、 $\overline{PM}$  皆為半徑，且  $\angle AMP = \angle BNM = \angle CPN = 60^\circ$ ，分別過 M、N、P 的三切線相交於 D、E、F  
試證：  $DEF \sim ABC$

證明：(1) 圓心角為  $60^\circ$ ，  $\angle APM = \angle BNM = \angle CPN = 60^\circ$ ，  $\overline{MN} = \overline{MB} = \overline{NB}$

(2)  $\triangle MNB$  為正，  $\angle MNB = 60^\circ$ ，設  $\overline{DE}$  交  $\overline{BC}$  於 G

(3)  $MGN=90^\circ$  , 又  $MNG=60^\circ$  ,  $GMN=30^\circ$

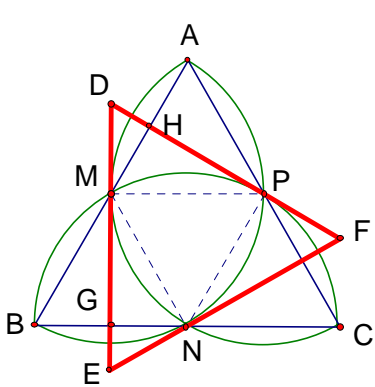
(4)  $GMN=30^\circ$  ,  $GMB=DMA=30^\circ$

(5) 設  $\overline{DF}$  交  $\overline{AB}$  於 H

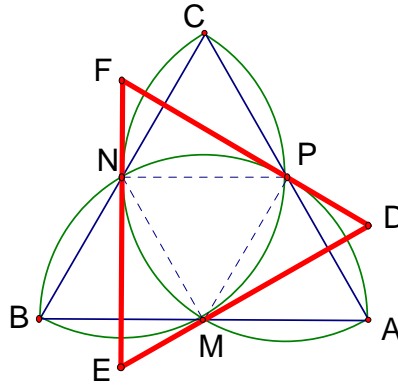
(6)  $DMA=30^\circ$  , 又  $DHM=90^\circ$  ,  $MDH=60^\circ = A$

(7) 同理  $DFE = C$

(8) 由 (6)、(7) 得  $ABC \sim DEF$  (AA 相似)



圖(28)



圖(29)

我們進一步算出圓心角為特殊角度的 DEF 和 ABC 的對應邊長的比值，我們以圓心角為  $60^\circ$  的為例，如圖(29)。計算如下：

(1) 設  $\overline{EM}$  為 a , 則  $\overline{MN}$  為  $\sqrt{3}a$  ,  $\overline{NE}$  為  $2a$

(2)  $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PM} = \sqrt{3}a$

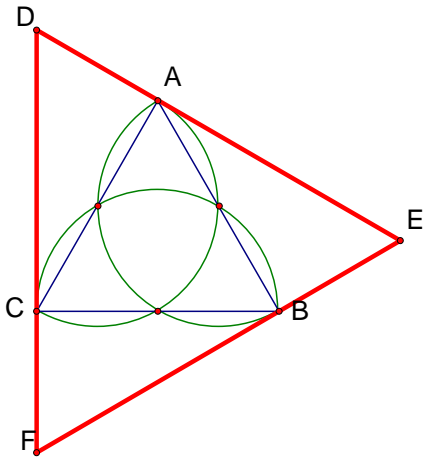
(3)  $\overline{NP} = \sqrt{3}a$  ,  $\overline{FN} = a$

(4)  $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{EN} + \overline{NF} = 2a + a = 3a$

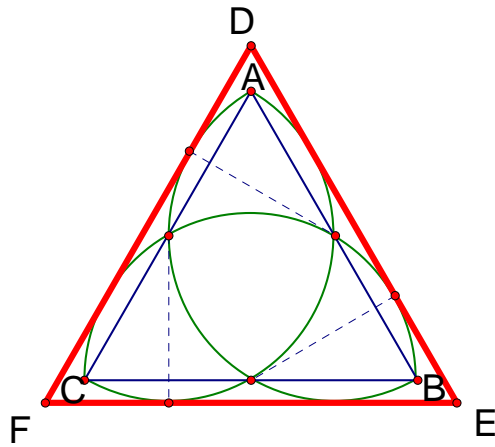
(5) 由  $\overline{MN} = \sqrt{3}a$  ,  $\overline{AB} = 2\sqrt{3}a$

(6) 得  $\overline{DE} : \overline{AB} = 3a : 2\sqrt{3}a = 3 : 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} : 6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

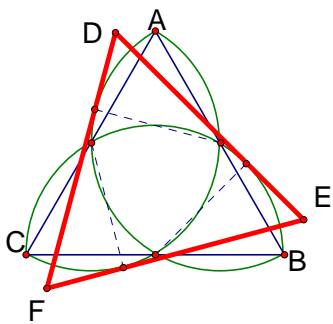
同樣地我們也畫出其他特殊角度的圓心角之圖形，並算出其比值列成下表(2)



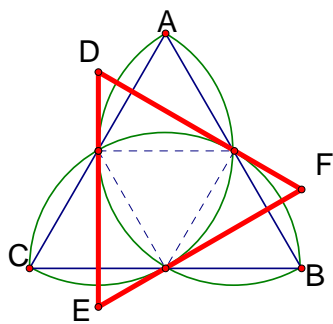
圓心角  $0^\circ$ ，圖(30)



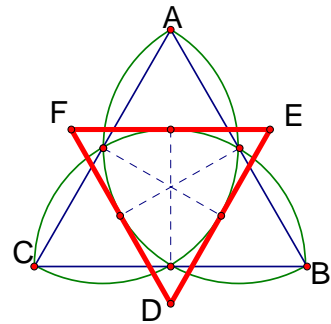
圓心角  $30^\circ$ ，圖(31)



圓心角  $45^\circ$ ，圖(32)



圓心角  $60^\circ$ ，圖(33)

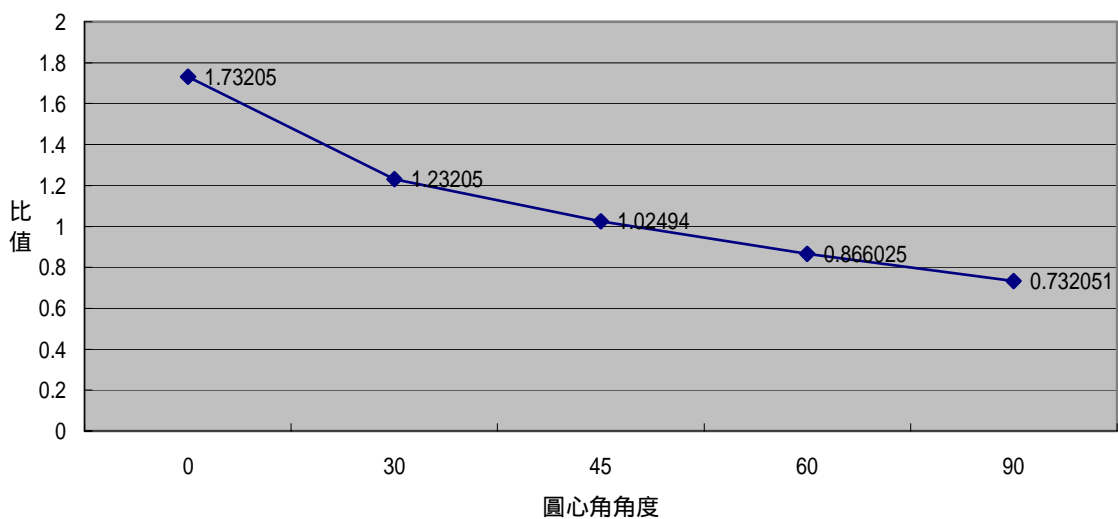


圓心角  $90^\circ$ ，圖(34)

圓心角	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} - \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3} - 1$

表(2)

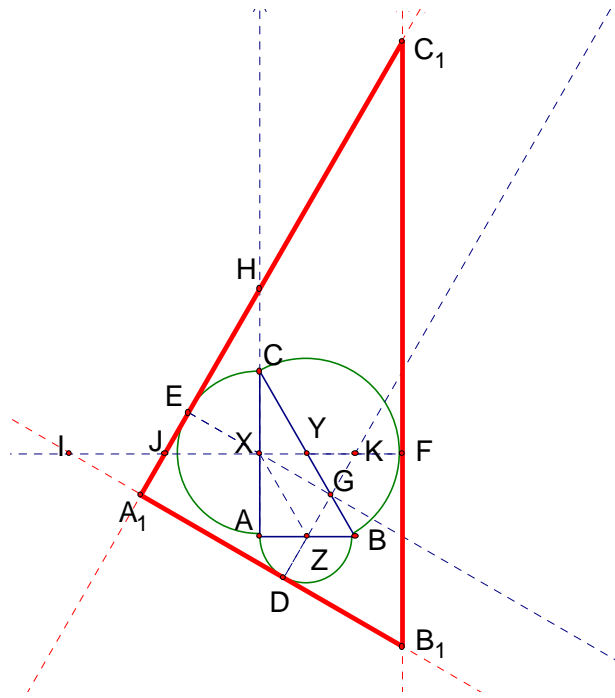
為觀察上表中邊長比值的變化，我們利用 EXCELL 軟體繪製出這曲線圖來，如下



接下來將正 改成較常見的  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  試試看，看看是否也有相同的結果？

已知：如圖(35)， $\triangle ABC$  為直角， $\angle A=90^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $\angle C=30^\circ$ ，半圓往外畫，三邊中點各為  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ ，取圓心角  $\angle CXE = \angle BYF = \angle AZD$ ，分別過  $D$ 、 $E$ 、 $F$  作三切線，相交於  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$

試證： $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$



圖(35)

證明：(1) 設  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$  的中點分別為  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$

(2) 設  $\angle EXC$  為  $a^\circ$  (即為圓心角角度)，則  $\angle FYB = \angle DZA$  為  $a^\circ$

(3) 延長  $\overline{EX}$ ，設交  $\overline{BC}$  於  $G$ ，延長  $\overline{AC}$ ，設交  $\overline{A_1C_1}$  於  $H$

(4)  $\angle ACB$  為  $30^\circ$ ， $\angle HCY$  為  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

(5)  $\angle HEX = 90^\circ$ ， $\angle C_1HC = 90^\circ + a^\circ$

(6)  $\angle FYB = a^\circ$ ， $\angle CYF = 180^\circ - a^\circ$

(7) 在  $\triangle C_1HCYF$  中， $\angle C_1 = 540^\circ - \angle C_1HC - \angle HCY - \angle CYF - \angle YFC_1$   
 $= 540^\circ - (90^\circ + a^\circ) - (150^\circ) - (180^\circ - a^\circ) - 90^\circ$   
 $= 540^\circ - 90^\circ - a^\circ - 150^\circ - 180^\circ + a^\circ - 90^\circ$   
 $= 30^\circ = \angle ACB$

(8) 同理  $\angle B_1 = \angle ABC$

(9) 由 (7)、(8) 得  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (AA 相似)

我們以圓心角  $60^\circ$  為例，圖(35)，計算出切線與原對應邊長的比值為  $\frac{11\sqrt{3}}{6}$ ，其它的圓心角作圖見圖(36)~(40)

已知：如圖(35)， $\triangle ABC$  為直角， $\angle A=90^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $\angle C=30^\circ$ ，半圓往外畫，三邊中點各為  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ ，取圓心角為  $60^\circ$ ，分別過  $D$ 、 $E$ 、 $F$  作三切線，相交於  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$

試求：切線與原對應邊長的比值

(1) 延長  $\overline{FY}$ 、 $\overline{DZ}$ ，交  $\overline{A_1C_1}$ 、 $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{XY}$  於 I、J、K

(2) 設  $\overline{AZ} = a$

(3)  $\triangle ABC$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ， $\overline{XY} = \overline{DZ} = a$ ， $\overline{FY} = \overline{XZ} = 2a$

(4)  $\triangle HJX$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ， $\overline{JX} = 2a$

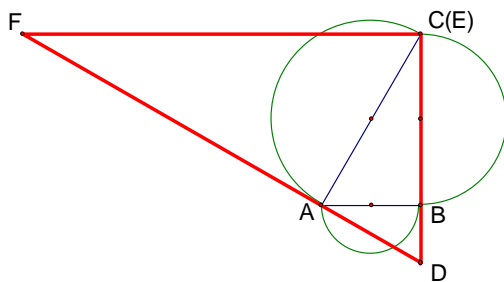
(5)  $\triangle C_1JF$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ， $\overline{C_1F} = 5\sqrt{3}a$

(6)  $\triangle KXZ$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ， $\overline{ZK} = \overline{XZ} 2a$

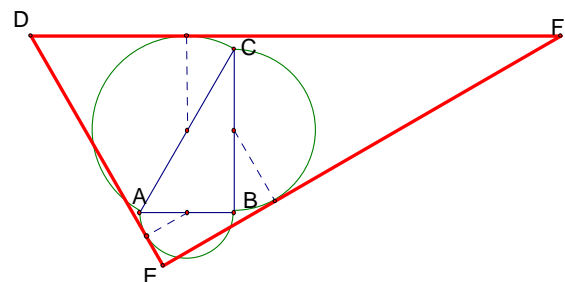
(7)  $\triangle JKD$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ， $\overline{IK} = 6a$

(8)  $\triangle IFB_1$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ， $\overline{FB_1} = \frac{7\sqrt{3}}{3}a$

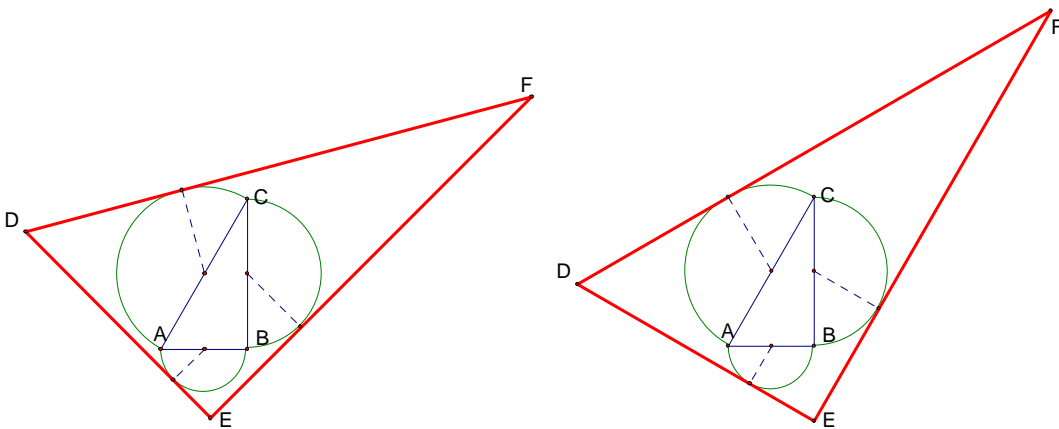
$$(9) \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{FC_1} + \overline{FB_1}}{\overline{BC}} = \frac{5\sqrt{3}a + \frac{7\sqrt{3}}{3}a}{4a} = \frac{15\sqrt{3} + 7\sqrt{3}}{4} = \frac{22\sqrt{3}}{12} = \frac{11\sqrt{3}}{6}$$



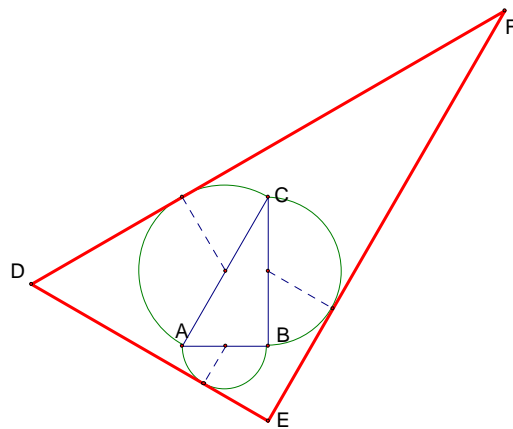
圓心角  $0^\circ$ ，圖(36)



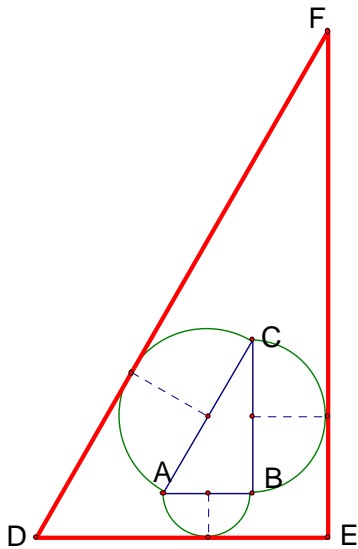
圓心角  $30^\circ$ ，圖(37)



圓心角  $45^\circ$ ，圖(38)



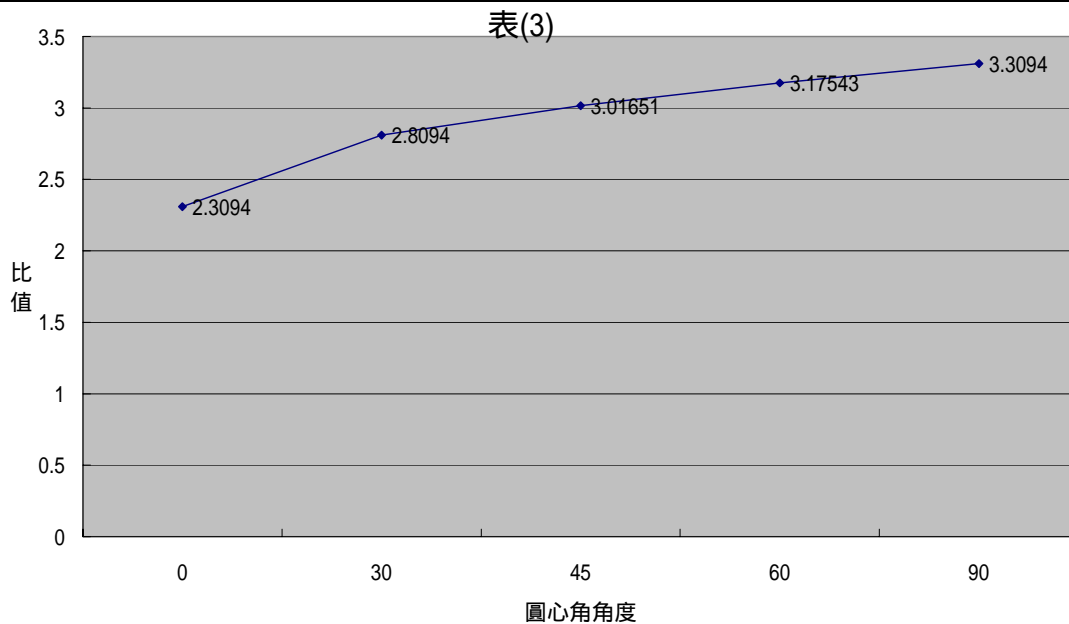
圓心角  $60^\circ$ ，圖(39)



圖心角  $90^\circ$ ，圖(40)

這種作圖法皆可得到相似，我們也將它的邊長比值列成下表(3)，並繪製成曲線圖。

圖心角	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{11\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} + 1$



接下來我們也將  $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$  的 往內作半圓，並計算其邊長的比值，過程如下：

已知：  $\triangle ABC$  為直角，利用上述作圖法作圖

試證：  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，如圖(41)

證明：(1) 設圖心角角度為  $x^\circ$ ，則  $\angle AOI = \angle CNK = \angle BMN = x^\circ$

(2)  $\angle AOI = \angle QOI = \angle CNK = x^\circ$ ，又  $\angle OTQ = \angle NTC$ ， $\angle NCT = \angle OQT = 90^\circ$

(3)  $\overline{FE}$  為切線， $\angle NKE = 90^\circ$ ，又  $\angle OQT = 90^\circ$ ， $\overline{FE} \parallel \overline{SP}$

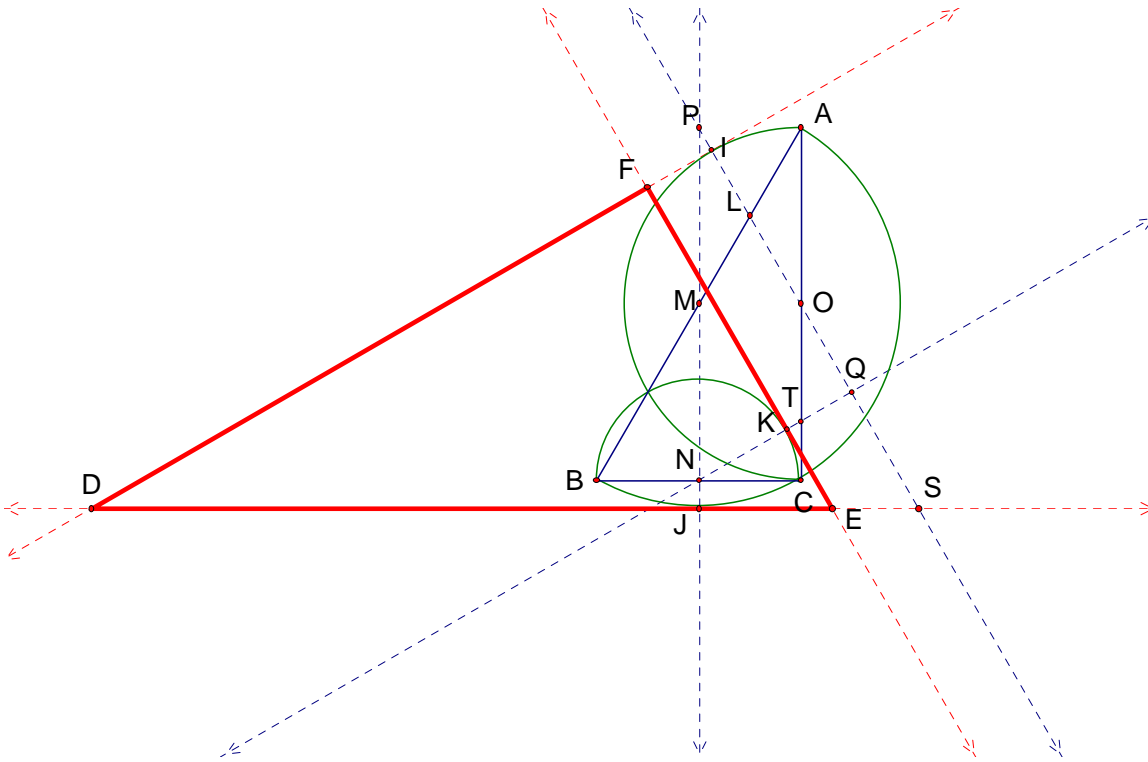
(4)  $\overline{FE} \parallel \overline{SP}$      $\angle SIF = \angle EFD = 90^\circ$

(5)  $\angle PML = \angle AOL = x^\circ$  , 又  $\angle PLM = \angle ALO$  ,     $\angle LPM = \angle LAO$

(6)  $\angle LPM = \angle LAO$  , 又  $\angle ACB = \angle PJS = 90^\circ$  ,     $\angle ABC = \angle PSJ$

(7)  $\overline{FE} \parallel \overline{SP}$  ,     $\angle PSJ = \angle FED$  , 又  $\angle ABC = \angle PSJ$  ,     $\angle ABC = \angle FED$

(8) 由 (5)、(6) 得  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  (AA 相似)



圖(41)

我們取圓心角為  $60^\circ$  的當作範例來計算相似  $\triangle DEF$  與原  $\triangle ABC$  邊長的比值，計算如下，如圖(42)

(1) 設 M、N、P 分別為  $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  的中點，且  $\overline{BN} = \overline{NA} = a$

(2)  $\overline{PN}$  為中點連線  $\overline{BC} \parallel \overline{NP}$      $\angle CBA = \angle QNA = 60^\circ$

(3)  $\triangle ABC$  為直角  $\triangle$ ，又 M 為  $\overline{BC}$  中點，M 為  $\triangle ABC$  的外心， $\overline{MB} = \overline{MA}$

(4)  $\overline{MB} = \overline{MA}$ ，又  $\angle QNA = 60^\circ$ ， $\angle QNA$  為正角， $\angle PQR = \angle AQS = 60^\circ$

(5)  $\angle QAS$  為切角  $= 90^\circ$ ，又  $\angle AQS = 60^\circ$ ， $\triangle QAS$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  三角型， $\overline{QS} = 2a$

(6)  $\angle EQS$  為切角  $= 90^\circ$ ，又  $\angle FED = 60^\circ$ ， $\triangle QSE$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  三角型， $\overline{QE} = \frac{\overline{QS}}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

(7)  $\angle QSE = \angle DEF = 30^\circ$ ， $\overline{DF} \parallel \overline{QS}$

(8)  $\overline{DF} \parallel \overline{QS}$  , 又  $\angle PRD=90^\circ$  ,  $\angle RPQ=90^\circ$

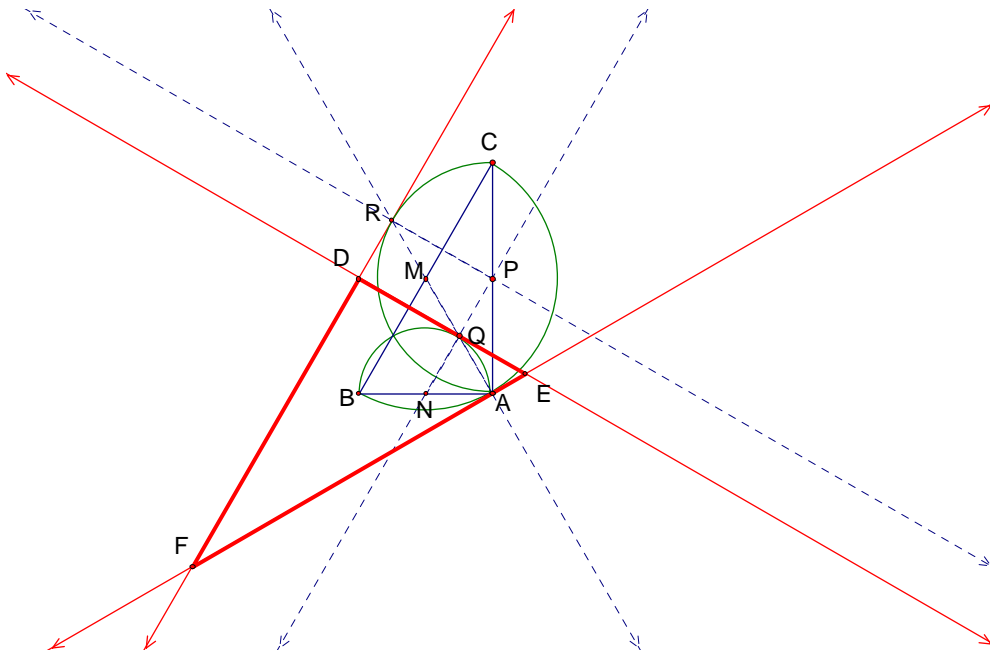
(9)  $\angle RPQ=90^\circ$  , 又  $\angle PQM=60^\circ$  ,  $\angle PQR$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$

(10)  $\overline{PN}$  為一中點連線 ,  $\overline{PN} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 4a = 2a$  , 又  $\overline{QN} = a$  ,  $\overline{PQ} = \overline{PN} - \overline{QN} = 2a - a = a$

(11)  $\angle RQP$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  ,  $\overline{PR} = \sqrt{3} a$

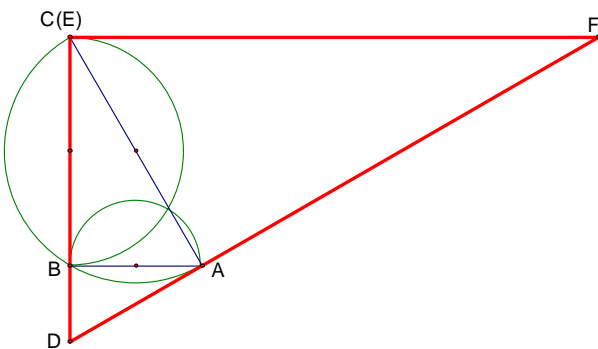
(12)  $\angle RPQ = \angle PQD = 90^\circ$  ,  $\overline{PR} \parallel \overline{PQ}$  , 又  $\overline{DF} \parallel \overline{QS}$  ,  $\overline{DQ} = \overline{RP} = \sqrt{3} a$

(13)  $\overline{DE} : \overline{AB} = \overline{DQ} + \overline{QE} : \overline{AB} = \sqrt{3} a + \frac{2\sqrt{3}}{3} a : 2a = \frac{5\sqrt{3}}{3} a : 2a = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

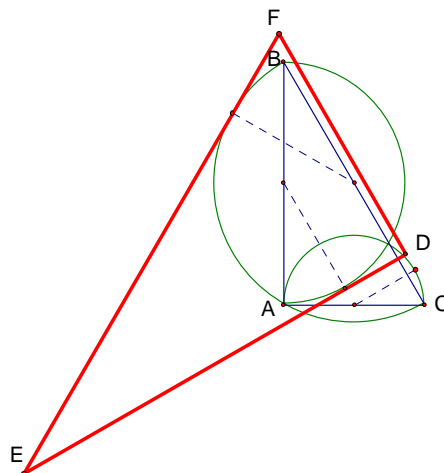


圖(42)

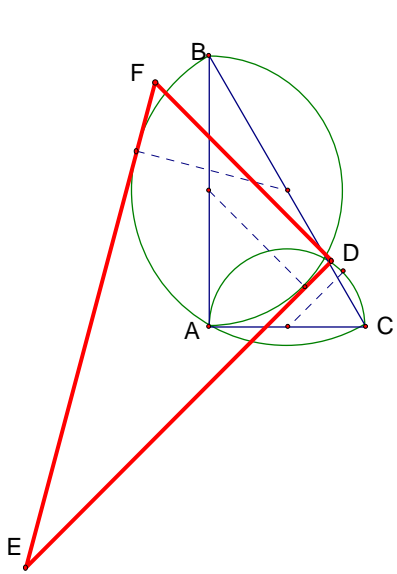
同樣做過圓心角  $60^\circ$  後，我們也變動圓心角試試，並列出邊長比值如下表(4)



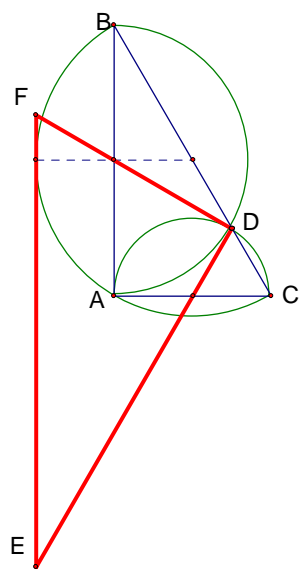
圓心角  $0^\circ$  , 圖(43)



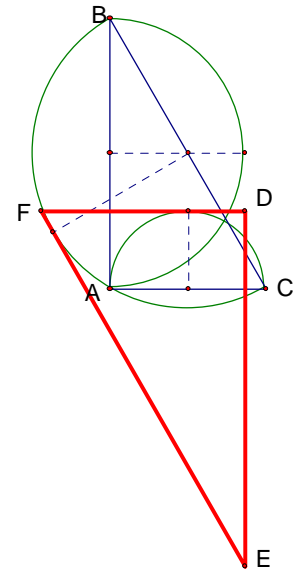
圓心角  $30^\circ$  , 圖(44)



圓心角 45°，圖(45)



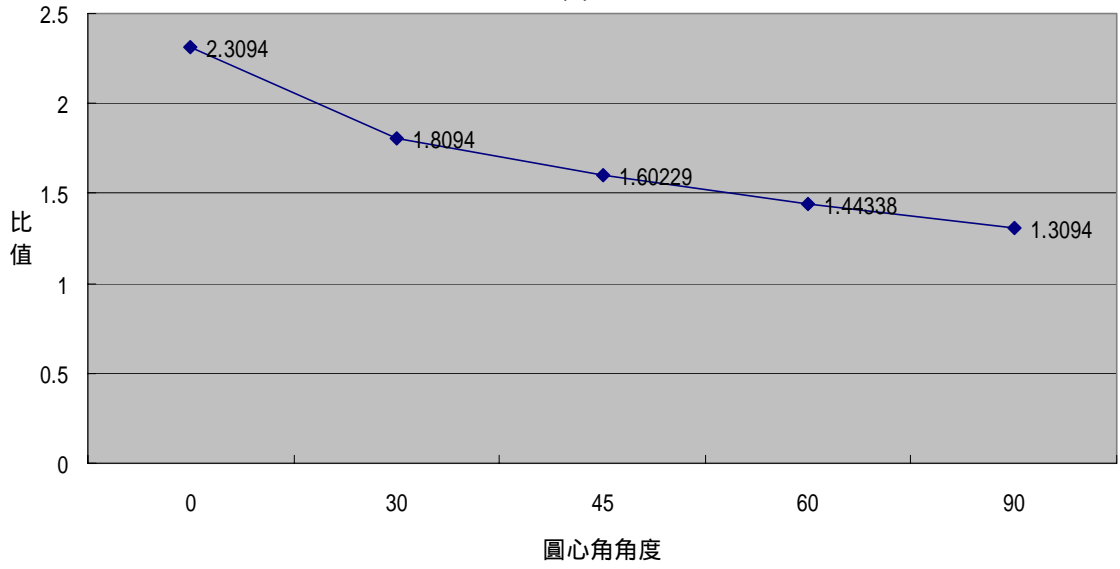
圓心角 60°，圖(46)



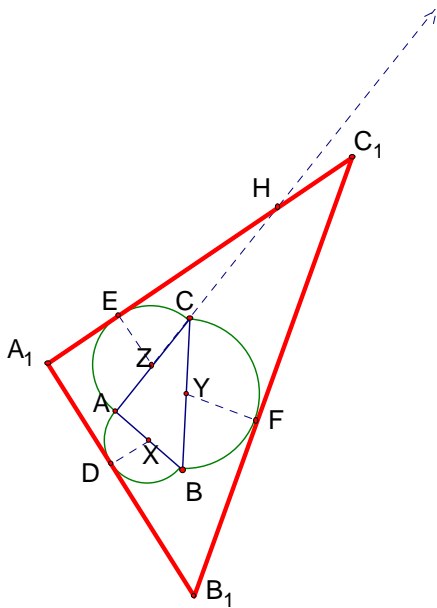
圓心角 90°，圖(47)

圓心角	0°	30°	45°	60°	90°
邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1$

表(4)



難道只有正 及直角 才有這種現象嗎？我們嘗試一般 也來操作看看，也許會有意外的發現，做法如下圖(48)：



圖(48)

已知：X、Y、Z 各為  $\triangle ABC$  的三中點，半徑  $\overline{DX}$ 、 $\overline{FY}$ 、 $\overline{EZ}$  分別作其切線  $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 、 $\overline{A_1C_1}$

交於  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$

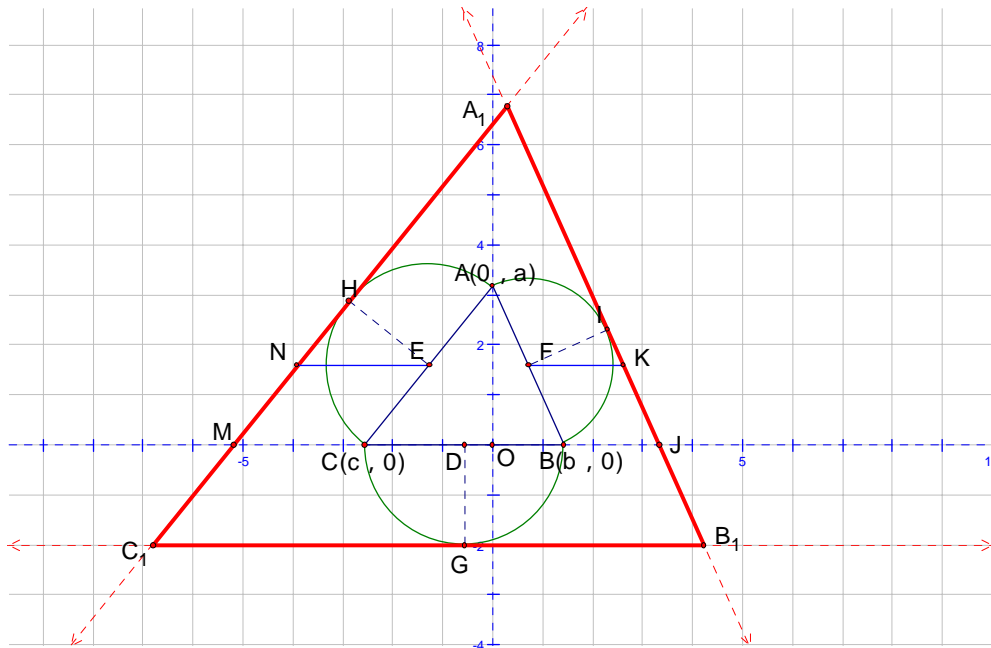
試證： $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$

證明：

- (1) 設  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$  的中點分別為 X、Y、Z
- (2) 設半徑分別交  $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 、 $\overline{A_1C_1}$  於 D、F、E
- (3) 設  $\angle EZC$  為  $a^\circ$  (即半徑的角度)，則  $\angle FYB = \angle DXA = a^\circ$
- (4) 設長  $\overline{EC}$ ，設交  $\overline{A_1C_1}$  於 H
- (5) 設  $\angle ACB$  為  $b^\circ$ ，則  $\angle HCY$  為  $180^\circ - b^\circ$
- (6)  $\angle HEZ = 90^\circ$ ， $\angle H C C_1 = 90^\circ + a^\circ$
- (7) 由  $\angle FYB$  為  $a^\circ$ ，推得  $\angle CYF = 180^\circ - a^\circ$
- (8)  $\triangle CYFC_1H$  為一個五邊形，內角和為  $540^\circ$
- (9)  $\angle C_1 = 540^\circ - \angle H C C_1 - \angle H C Y - \angle C Y F - \angle Y E C_1$   
 $= 540^\circ - (90^\circ + a^\circ) - (180^\circ - b^\circ) - (180^\circ - a^\circ) - 90^\circ$   
 $= 540^\circ - 90^\circ - a^\circ - 180^\circ + b^\circ - 180^\circ + a^\circ - 90^\circ$   
 $= b^\circ = \angle C$
- (10) 同理  $\angle B_1 = \angle B$
- (11) 由 (9)、(10) 得  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (AA 相似)

我們有了這種相似圖形的新畫法後，不能每次都用特殊角才能算出邊長比值(例如：正或直角)因此，我們用上了國中學到的座標求直線方程式的方法，將任一  $\triangle ABC$  放在座標平面上，用一般式算出切線  $\overline{A_1B_1}$  的頂點座標，並進而算出對應邊長比值，以  $90^\circ$  圓心角為例，敘述如

下：



圖(49)

已知：在平面座標上  $ABC$ ， $A(0, a)$ 、 $B(b, 0)$ 、 $C(c, 0)$ ，往外各做一個半圓， $D$ 、 $E$ 、 $F$  分別為其圓心， $G$ 、 $H$ 、 $I$  的三切線兩兩相交於  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ ，此時  $A_1B_1C_1 \sim ABC$ ，我們想要以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  表示兩相似 的對應邊長往內的切線 比例，即  $\overline{B_1C_1} : \overline{BC}$  的比值，如圖(49)。

作法大綱：(1) 求出  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  直線方程式

(2) 分別作  $\overline{FK} \parallel \overline{BJ}$ ， $\overline{EN} \parallel \overline{CM}$ ，各交切線 於  $K$ 、 $N$

(3)  $\overline{A_1C_1}$ 、 $\overline{A_1B_1}$  可視為分別由  $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$  平移而來的直線，平移的長度分別為  $\overline{FK}$  和  $\overline{EN}$  長

(4) 將  $\overline{AC}$  向左平移  $\overline{EN}$  單位長後即可得  $\overline{A_1C_1}$

(5) 將  $\overline{AB}$  向右平移  $\overline{EN}$  單位長後即可得  $\overline{A_1B_1}$

(6) 分別求出  $\overline{A_1B_1}$  和  $\overline{B_1C_1}$  的交點  $B_1$  及  $\overline{A_1C_1}$  和  $\overline{B_1C_1}$  的交點  $C_1$

(7) 計算  $\overline{B_1C_1} : \overline{BC}$  的比值即得

計算施行如下：

$$D\left(\frac{b+c}{2}, 0\right)、G\left(\frac{b+c}{2}, -\frac{b-c}{2}\right)、\overline{B_1C_1} : y = -\frac{b-c}{2} = \frac{c-b}{2}, F\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

$$\overline{FI} = \overline{FB} = \sqrt{\left(b - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

由  $\triangle AOB \sim \triangle FIK$  知  $\overline{FK} : \overline{FI} = \overline{AB} : \overline{AO}$  ,  $\overline{FK} : \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \sqrt{a^2 + b^2} : a$

$$a \times \overline{FK} = \frac{a^2 + b^2}{2} , \quad \overline{FK} = \frac{a^2 + b^2}{2a} , \quad \text{又 } \overline{AB} \text{ 方程式為 } \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 , \quad ax + by = ab$$

將  $\overline{AB}$  向右平移  $\overline{FK}$  單位長, 得  $\overline{A_1B_1}$  為  $a\left(x - \frac{a^2 + b^2}{2a}\right) + by = ab$  ,  $ax - \frac{a^2 + b^2}{2} + by = ab$

$$ax + by = ab + \frac{a^2 + b^2}{2} , \quad ax + by = \frac{(a + b)^2}{2}$$

現在可以求  $\overline{A_1B_1}$  與  $\overline{B_1C_1}$  的交點  $B_1$  的座標了 :

$$ax + by = \frac{(a + b)^2}{2} , \quad \text{且 } y = \frac{c - b}{2} , \quad \text{將 帶入 得 } ax + \frac{bc - b^2}{2} = \frac{(a + b)^2}{2}$$

$$ax = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - bc + b^2}{2} , \quad x = \frac{a^2 + 2ab + 2b^2 - bc}{2a} , \quad \text{故 } B_1\left(\frac{a^2 + 2ab + 2b^2 - bc}{2a} , \frac{c - b}{2}\right)$$

同理我們可以計算  $C_1$  座標如下 :  $E\left(\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right)$  ,  $\overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + a^2}$

由  $\triangle EHN \sim \triangle AOC$  知  $\overline{EH} : \overline{EN} = \overline{AO} : \overline{AC}$  ,  $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + a^2} : \overline{EN} = a : \sqrt{c^2 + a^2}$

$$a\overline{EN} = \frac{a^2 + c^2}{2} , \quad \overline{EN} = \frac{a^2 + c^2}{2a} , \quad \text{又 } \overline{AC} \text{ 方程式為 } \frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1 \quad \text{即 } ax + cy = ac$$

將  $\overline{AC}$  向左平移  $\overline{EN}$  單位長即為直線  $\overline{A_1C_1}$  , 因此  $\overline{A_1C_1}$  方程式為  $a\left(x + \frac{a^2 + c^2}{2a}\right) + cy = ac$

$$ax + \frac{a^2 + c^2}{2} + cy = ac , \quad ax + cy = ac - \frac{a^2 + c^2}{2} = -\frac{(a - c)^2}{2}$$

現在可以求  $\overline{A_1C_1}$  與  $\overline{B_1C_1}$  的交點  $C_1$  的坐標

$$ax + cy = -\frac{(a - c)^2}{2} , \quad \text{且 } y = \frac{c - b}{2} , \quad \text{由 帶入 } ax + \frac{c^2 - bc}{2} = -\frac{(a - c)^2}{2}$$

$$ax = \frac{-a + 2ac - c^2 - c^2 + bc}{2} , \quad x = \frac{-a^2 + 2ac - 2c^2 + bc}{2a} , \quad \text{故 } C_1\left(\frac{-a^2 + 2ac - 2c^2 + bc}{2a} , \frac{c - b}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{到此我們可以計算 } \overline{B_1C_1} &= \frac{a^2 + 2ab + 2b^2 - bc}{2a} - \frac{-a^2 + 2ac - 2c^2 + bc}{2a} \\ &= \frac{a^2 + 2ab + 2b^2 - bc + a^2 - 2ac + 2c^2 - bc}{2a} \\ &= \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab - 2ac - 2bc}{2a} \\ &= \frac{(a + b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2}{2a} \end{aligned}$$

因此  $\overline{B_1C_1} : \overline{BC}$  的比值為  $\frac{(a+b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2}{2a} : (b-c) = \frac{(a+b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2}{2a(b-c)}$

驗證 P8 表(1)中的  $\frac{\Delta DEF}{\Delta ABC} = \sqrt{3} + 1$

原 ABC 為正，設邊長為 4

取 A(0, 2√3)、B(2, 0)、C(-2, 0)，按上述公式 a=2√3, b=2, c=-2

代入上文  $\overline{B_1C_1} : \overline{BC}$  的比值 =  $\frac{(2\sqrt{3}+2)^2 + 4^2 + (2\sqrt{3}+2)^2}{4\sqrt{3} \times 4}$   
 $= \frac{12 + 8\sqrt{3} + 4 + 16 + 12 + 8\sqrt{3} + 4}{16\sqrt{3}}$   
 $= \frac{48 + 16\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$  真的正確！

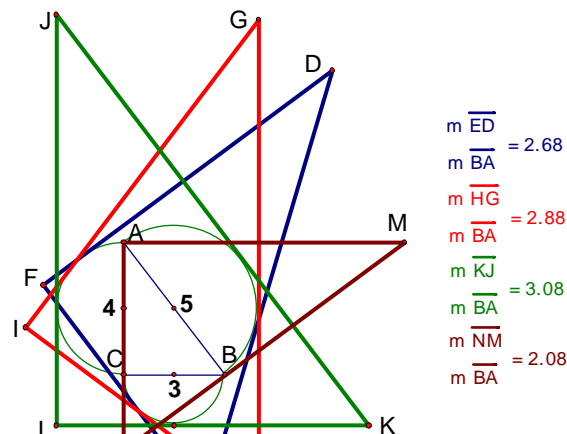
我們除了用特殊角度當圓心角做切線，還試著用三邊長為整數倍的直角，分別以圓心角為 A、B、C、0°往外作出切線，我們發現他們的比值有一些特殊的關係，因為母三邊皆為整數，所以算出的比值不會帶有根號，而且比值分別為 0°比值 +  $\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$

3 : 4 : 5 為例，如圖(50)，我們將比值列成下表，其他的邊長為整數倍的直角 見附件一

圓心角(往外)	0°	A	B	C
$\frac{\text{切線}\Delta\text{邊長}}{\text{原}\Delta\text{邊長}}$ 比值	$\frac{25}{12}$	$\frac{161}{60} = \frac{25}{12} + \frac{3}{5}$	$\frac{173}{60} = \frac{25}{12} + \frac{4}{5}$	$\frac{37}{12} = \frac{25}{12} + \frac{5}{5}$

表(5)

表(5)中，這些比值的特色是若將圓心角為 A、B、C 所算出的比值分別減掉 0°的比值後，可以化簡為與原三邊長相同的比值，例如，3 : 4 : 5。這表示這些比值與 0°時的比值有相當大的關係。



藍色△DEF是以∠A為圓心角的相似△  
 紅色△GHI是以∠B為圓心角的相似△  
 綠色△JKL是以∠C為圓心角的相似△  
 棕色△MAN是以0°為圓心角的相似△

圖(50)

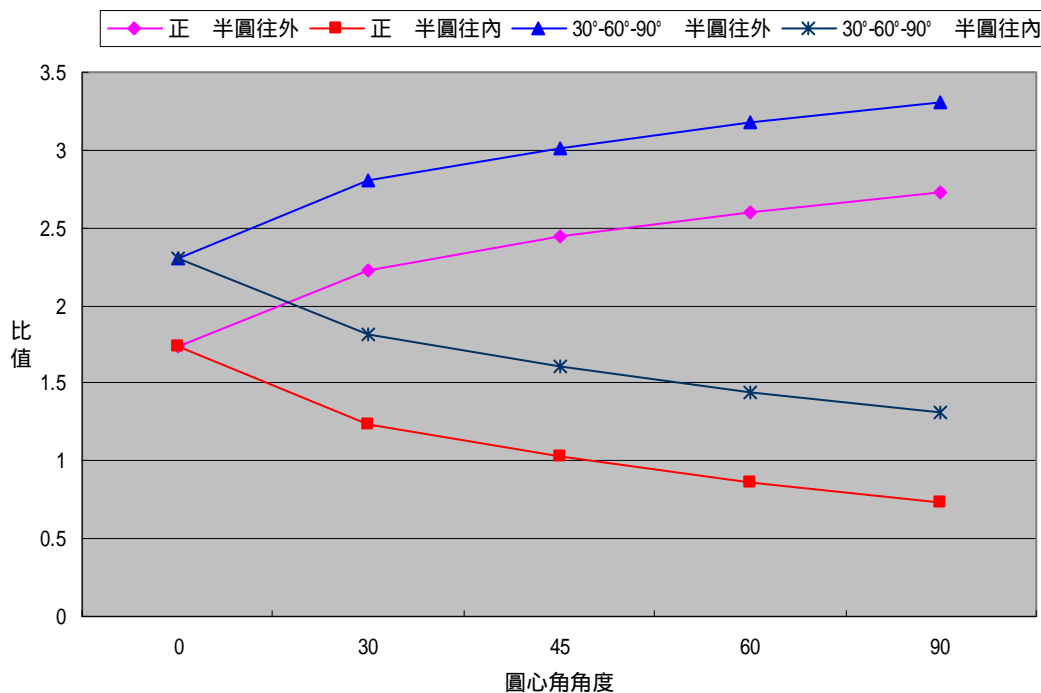
更進一步的我們將先前做的正 與  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  的邊長比值表與它的折線圖放在一起綜合比較，發現有一個足以媲美拿破崙內外 的面積差永遠等於原 的面積著名性質的特殊的性質，就是任意 在同圓心角的條件下，向外與向內切線 的對應邊長和，恆為圓心角是  $0^\circ$  時的邊長的兩倍，從表(6)、(7)及其折線圖中就能明顯地看出來。

圓心角(母 為正 )	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
半圓往外畫相似 與 原 的邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} + \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3} + 1$
半圓往內畫相似 與 原 的邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} - \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3} - 1$

表(6)

圓心角(母 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ )	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
半圓往外畫相似 與 原 的邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{11\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} + 1$
半圓往內畫相似 與 原 的邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1$

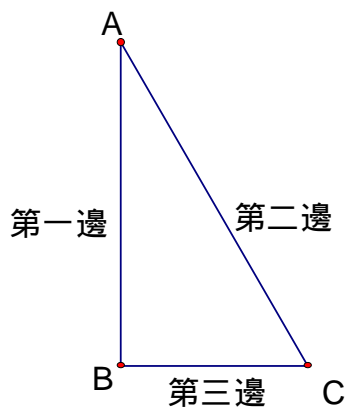
表(7)



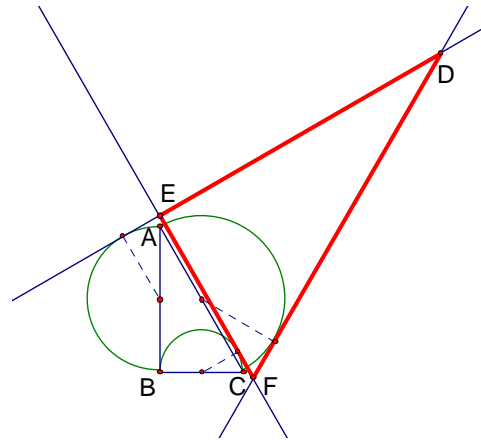
如上折線圖，我們可發現在相同的圓心角下，往外畫相似，與往內畫相似的比值有對稱的關係，是線對稱圖形，也印證了上述性質。我們進一步取  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ，圓心角為  $60^\circ$  的作為例子來證明這個性質，證明如下：



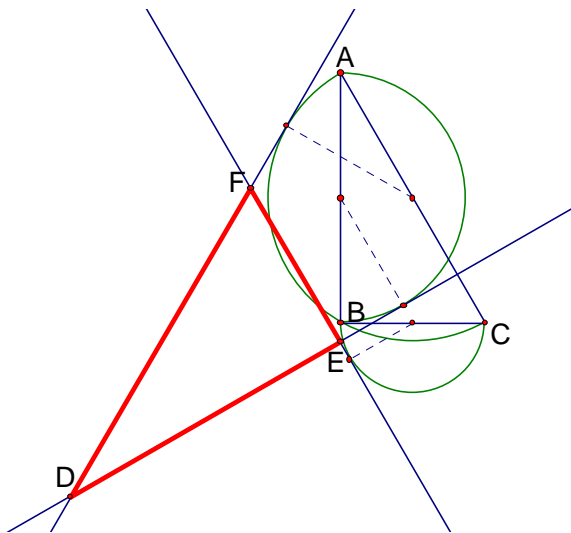
我們先將往外畫切線 和往內畫切線 混合應用，這樣共搭配出 6 種組合，如圖(53)~圖(58)分別是 (外,外,內)、(內,內,外)、(內,外,外)、(外,內,內)、(外,內,外) (內,外,內)，其中內外排列對應的邊長次序見圖(52)。範例：



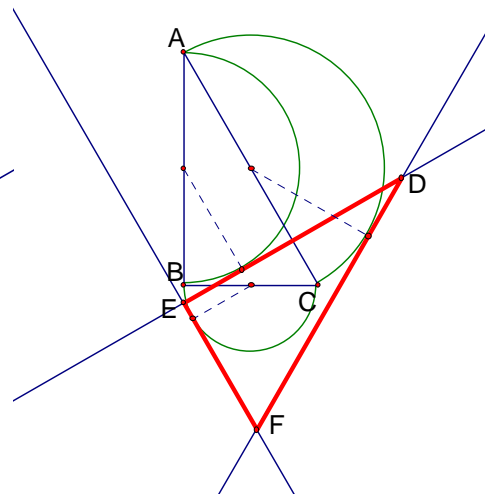
(一, 二, 三), 圖(52)



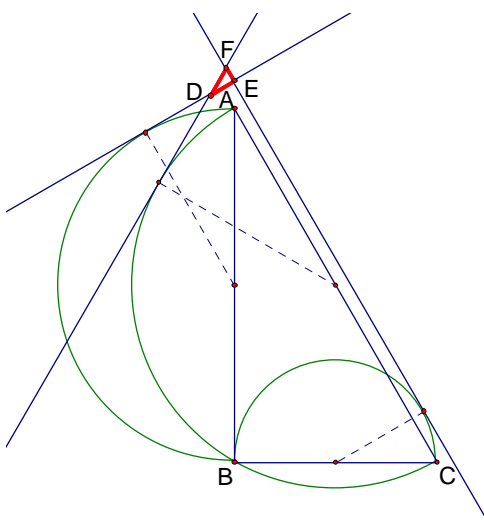
圖(53), (外, 外, 內)



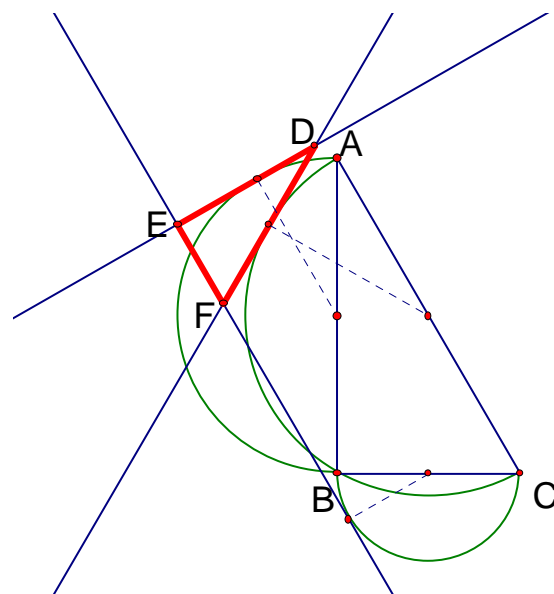
圖(54), (內, 內, 外)



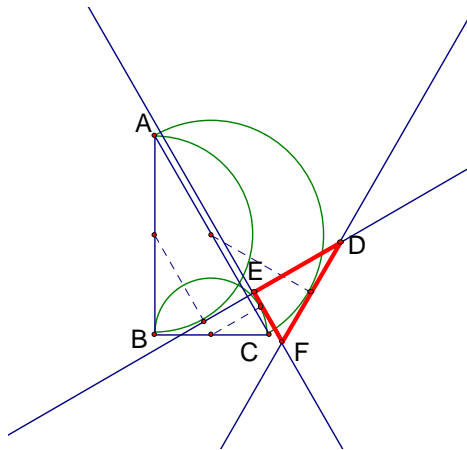
圖(55), (內, 外, 外)



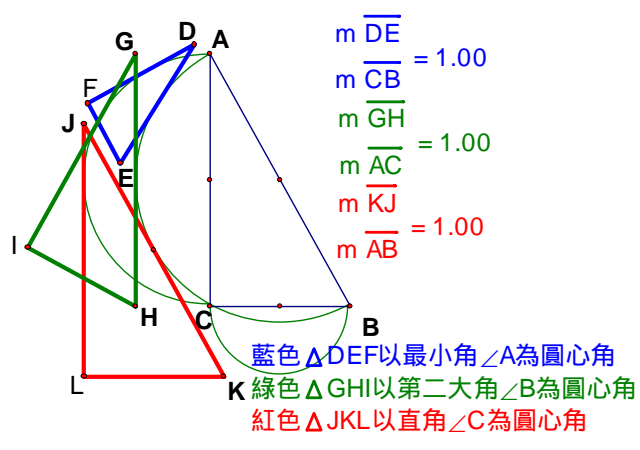
圖(56), (外, 內, 內)



圖(57), (外, 內, 外)



圖(58), (內, 外, 內)



圖(59), (外, 內, 外)作圖法

上述六種組合作圖法我們發現三個特色。

**特色一：**當任意直角 的半圓用(外, 內, 外)的順序來做圖時，如圖(59)，若當圓心角取原 中的最小角 A 來做切線 時，則切線 DEF 的斜邊  $\overline{DE}$  長度等於原直角 的勾  $\overline{CB}$  長，當圓心角取原 中的第二大角 B，則切線 GHI 的斜邊  $\overline{GH}$  長度等於原直角 的股  $\overline{AC}$  長，同樣的當圓心角取原 中的直角 C，則切線 JKL 的斜邊  $\overline{JK}$  長度等於原直角 的弦  $\overline{AB}$  長。

**特色二：**這六種組合再配上圓心角  $0^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$  還可畫出 30 個切線 ，分別將比值列於表(8)、表(9)，詳細作圖參考附件二、附件三。

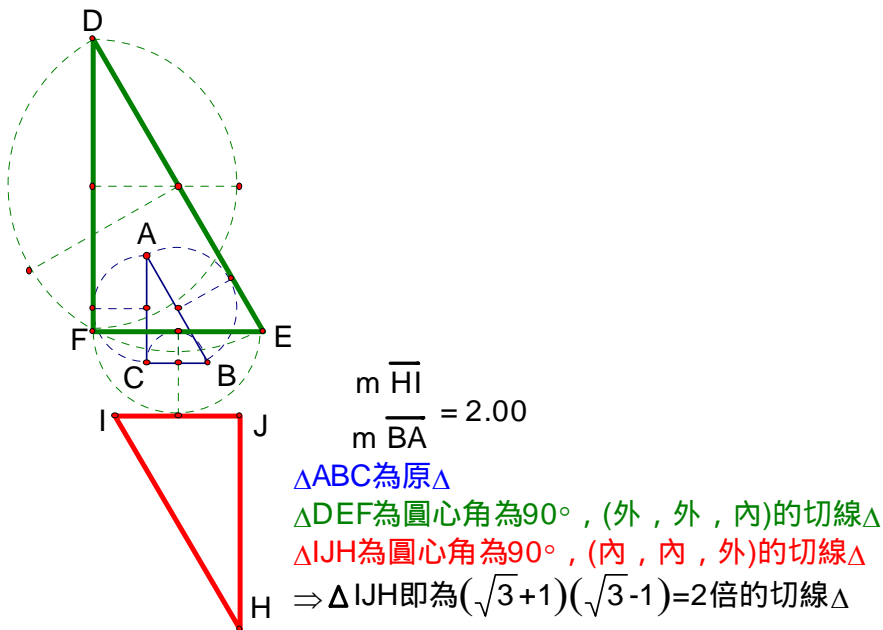
正	外外內	內內外	內外外	外內內	外內外	內外內
$0^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

表(8)

30°-60°-90°	外外內	內內外	內外外	外內內	外內外	內外內
0°	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0(交於一點)	0(交於一點)
30°	$\sqrt{3} + \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} - \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90°	$\sqrt{3} + 1$	$\sqrt{3} - 1$	$\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	1

則其中具有**一件整數倍**的特色，敘述如下：<sup>表(9)</sup>將表中的比值配為整數倍來畫，例如取表(9)

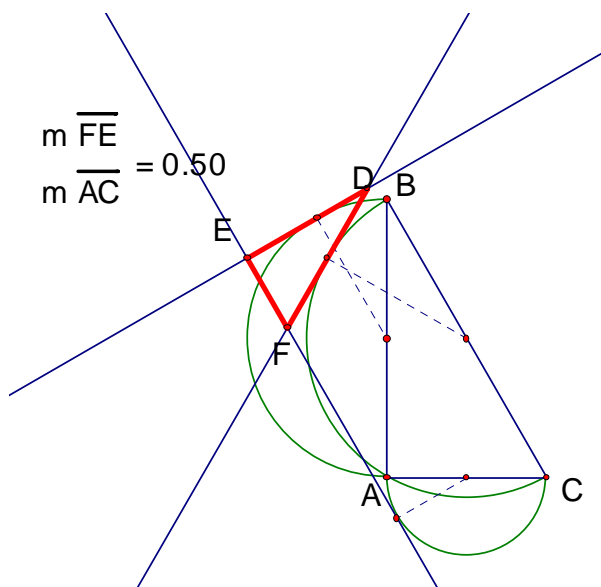
中，圓心角為 90°(外，外，內)和(內，內，外)，其比值相乘 $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 3 - 1 = 2$ ，即為整數倍，故我們只要先作(外，外，內)再作(內，內，外)即可得到原 的 2 倍放大圖，如圖(60)。



圖(60)，2 倍作圖法

**特色三：**從表(9)中，我們發現 30°-60°-90° 或其它直角，作(外，內，外)或(內，外，內)，取圓心角 30°，就能正作出  $\frac{1}{2}$  倍的切線，再利用逆推作圖法就能反作出 2 倍的切線。

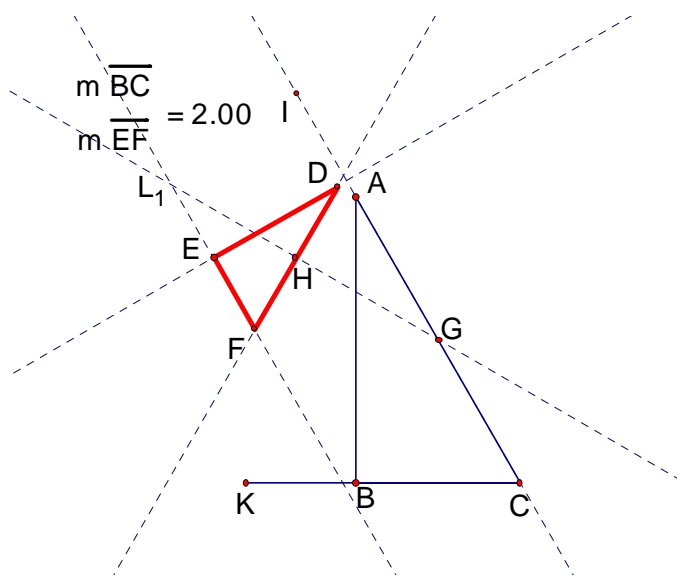
**$\frac{1}{2}$  倍作圖法：**已知 ABC 為直角， $A = 90^\circ$ ，兩股線段  $\overline{AB}$ ，線段  $\overline{AC}$  往外作半圓，斜邊往內作半圓，取圓心角為 30°，作三切線，得 DEF，如圖(61)。



圖(61),  $\frac{1}{2}$  倍作圖法

求證：DEF 與 ABC 對應邊長的比值為  $\frac{1}{2}$ ，證明：略。

逆推作圖法：我們利用正作的性質，能從切線 DEF 反推回原 ABC，即 2 倍，如圖(62)。



圖(62), 逆推作圖法

作法如下：

- (1) 作斜邊上的中點 H (由正作性質可推出 H 為中點)
- (2) 過 H，作  $L_1 \perp \overline{DF}$
- (3) 以 H 為圓心，斜邊  $\overline{DF}$  為半徑，向外畫弧，設交  $L_1$  於 G
- (4) 作  $\angle IGH = 30^\circ$  (因為正作時圓心角取  $30^\circ$ )，並延長  $\overline{IG}$
- (5) 以 G 為圓心，斜邊  $\overline{DF}$  為半徑，畫圓，設交  $\overline{IG}$  於 A、C

(6)作  $\angle KCA = 60^\circ$ ，並在  $\overline{KC}$  上作  $\overline{BC} = \overline{DF}$

(7)連  $\overline{AB}$ ，則  $\triangle ABC$  即為 2 倍的切線。

我們將**特色二**(比值相乘法)或**特色三**(逆推作圖法)連續重複使用，就能做出我們指定作的 2<sup>n</sup> 倍的相似，若將其它比值作適當的搭配，必能找出更多的整數倍切線。

### 陸、結論

一、我們創造出一個相似的新畫法，敘述如下：

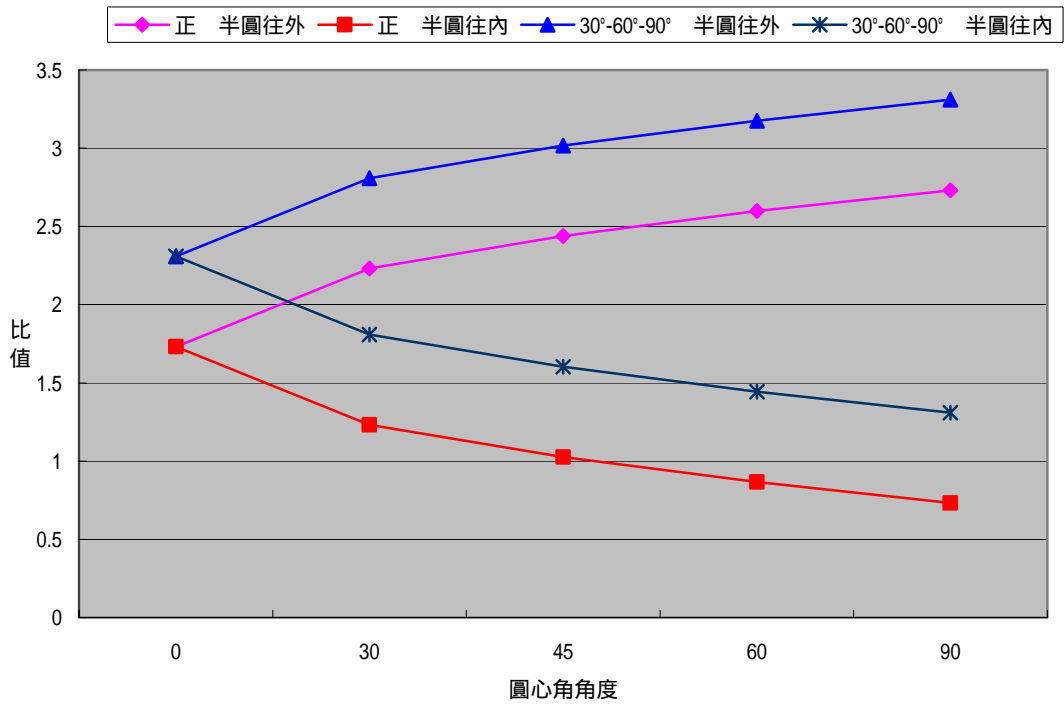
在  $\triangle ABC$  的三邊上以各邊長為直徑，往外作半圓，並在三個半圓上，依順時針或逆時針取相同的圓心角，而在圓心角的半徑上作切線，此時三切線的交點所形成的三角形必與原三角形相似，往內作半圓也有相同的現象，又即使內外混合也能相似。

二、當原  $\triangle ABC$  三邊為整數倍的直角，圓心角分別取  $0^\circ$ 、 $A$ 、 $B$  和  $C$ ，半圓皆往外畫，所得的切線與原  $\triangle ABC$  的邊長比值恆為  $0^\circ$  的比值加上  $\frac{\text{對邊長}}{\text{斜邊長}}$ 。如下表所示：

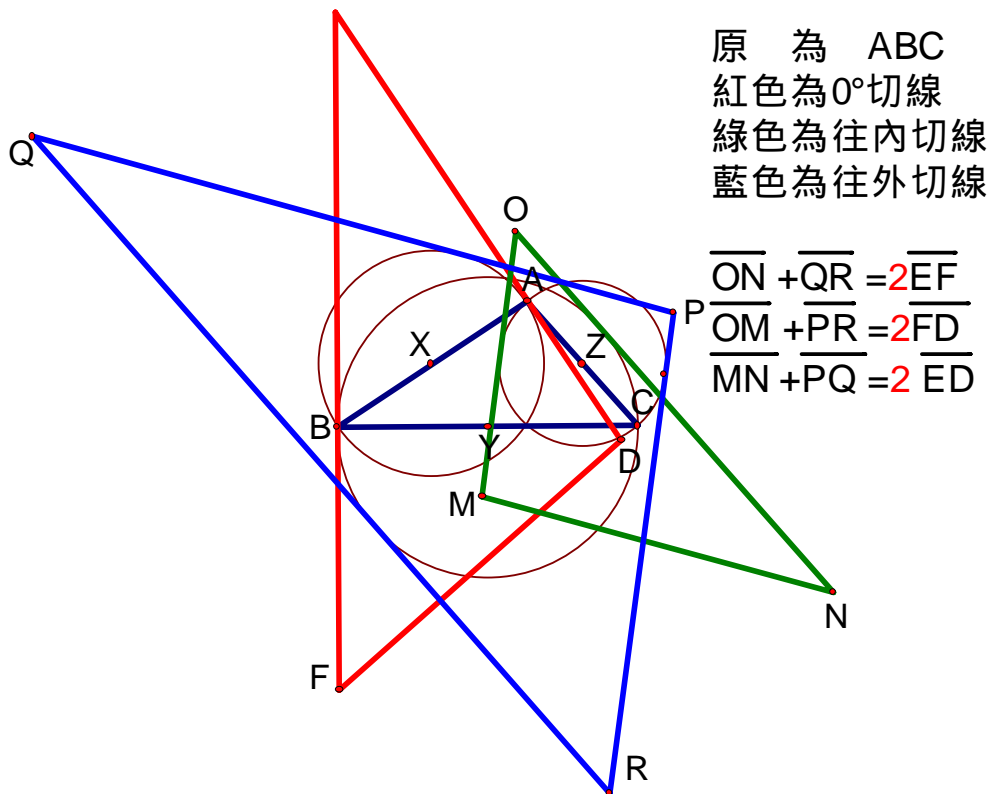
外外外	$0^\circ$	A(最小角)	B	C(直角)
3-4-5	$\frac{25}{12}$	$\frac{161}{60} = \frac{25}{12} + \frac{3}{5}$	$\frac{173}{60} = \frac{25}{12} + \frac{4}{5}$	$\frac{37}{12} = \frac{25}{12} + \frac{5}{5}$
5-12-13	$\frac{169}{60}$	$\frac{2497}{780} = \frac{169}{60} + \frac{5}{13}$	$\frac{2917}{780} = \frac{169}{60} + \frac{12}{13}$	$\frac{229}{60} = \frac{169}{60} + \frac{13}{13}$
8-15-17	$\frac{289}{120}$	$\frac{5873}{2040} = \frac{289}{120} + \frac{8}{17}$	$\frac{6713}{2040} = \frac{289}{120} + \frac{15}{17}$	$\frac{409}{120} = \frac{289}{120} + \frac{17}{17}$
7-24-25	$\frac{625}{168}$	$\frac{16801}{4200} = \frac{625}{168} + \frac{7}{25}$	$\frac{19657}{4200} = \frac{625}{168} + \frac{24}{25}$	$\frac{793}{168} = \frac{625}{168} + \frac{25}{25}$

三、當圓心角為  $0^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ ，半圓往內或往外畫，所得的切線與原  $\triangle ABC$  的邊長比值恆有對稱性，在折線圖上，它們是以  $0^\circ$  比值為對稱軸的線對稱圖形。

正	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
半圓往外畫相似與原的邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} + \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3} + 1$
半圓往內畫相似與原的邊長比值	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} - \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3} - 1$
30°-60°-90°	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
半圓往外畫相似與原的邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{11\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} + 1$
半圓往內畫相似與原的邊長比值	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1$



四、我們獲得一個可媲美拿破崙內外 的面積差永遠等於原 的面積的性質，即「任意 在同圓心角的條件下，向外與向內切線 的對應邊長和，恆為圓心角是 0°時的邊長的兩倍。」如下圖(63)



圖(63)

五、**特色一**：當任意直角 的半圓用(外，內，外)的順序來做圖時，如圖(59)，若當圓心角取原 中的最小角  $A$  來做切線 時，則切線  $DEF$  的斜邊  $\overline{DE}$  長度等於原直角 的勾  $\overline{CB}$  長，當圓心角取原 中的第二大角  $B$ ，則切線  $GHI$  的斜邊  $\overline{GH}$  長度等於原直角 的股  $\overline{AC}$  長，同樣的當圓心角取原 中的直角  $C$ ，則切線  $JKL$  的斜邊  $\overline{JK}$  長度等於原直角 的弦  $\overline{AB}$  長，如圖(59)。

六、**特色二**：將表(8)、表(9)中的比值配為整數倍來畫，例如圖(60)為 2 倍作圖。**特色三**：從表(9)中，我們發現  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  或其它直角 ，作(外，內，外)或(內，外，內)，取圓心角  $30^\circ$ ，就能正作出  $\frac{1}{2}$  倍的切線 ，再利用逆推作圖法就能反作出 2 倍的切線 ，如圖(61)、圖(62)。

七、我們將**特色二**(比值相乘法)或**特色三**(逆推作圖法)連續重複使用，就能做出我們指定作的  $2^n$  倍的相似 ，可參考附件四。若將上表其它比值作適當的搭配，必能找出更多的整數倍切線 。

#### 柒、參考資料：

- 一、黃家禮 幾何明珠 一版 台北市信義路 3 段 147 巷 15 弄 5-1 號 7 樓 九章出版社 P175~181  
2001 年 10 月
- 二、考克塞特、格雷策 初版 新竹市建新路 22 號 幾何學的新探索 凡異出版社 P66~72  
2002 年 8 月
- 三、出光正則 畢達哥拉斯的禮物 初版 台北市萬安街 21 巷 11 號 3 樓 益智工房 P21~28  
2002 年 5 月
- 四、GSP(The Geometer ' s Sketchpad)軟體說明書

030423

1.

2.

3.