神奇的傑克

摘要

如果將正方形的頂點比擬成它的「手」，兩對角線的交點當成它的「心」，則兩個正方形頂點間、中心點間、或頂點與中心點間的線段相連（或重合），就如同「手」或「心」彼此相連。

我們將四個正方形的某種特殊組合，稱爲「傑克結構」(Jack Structure)，它是本研究的圖形主體架構。本文主要探討當傑克「四心相連」,「心手相連」，和「手手相連」，不同連接情況下所連出的四線段，向外作正方形時，連接這些正方形之中心點而成的四邊形，甚至再以此四邊形的四個邊爲邊分別向外作正方形，並將四個心相連，這樣一層一層的的不斷擴展下去，推導所連成的每一層四邊形與基準正方形（Reference Square）之間的面積關係，並試圖發現不同連接情況下，同一層四邊形間的面積關係。

神奇的傑克

壹、研究動機：

有一次上資優班充實課程的時候，老師提出數學競賽試題中一道有關正方形的問題與同學討論解法，甚至老師還改變問題條件，讓同學嘗試算出答案。由於這次的解題與命題經驗，讓我們得到研究靈感，並確立這個研究主題。

貳、研究目的：

正方形的頂點就好比是它的「手」，兩對角線的交點（即旋轉中心）又似它的「心」，而兩個正方形頂點間或旋轉中心間的線段相連（或重合），也如同「手」或「心」彼此相連。我們將如下圖(一)四個斜線正方形的特殊組合，稱為「傑克結構」(Jack Structure)，它是我們研究圖形的主要架構，而正方形 $STUV$（T 、V 分別是兩正方形的中心點），我們稱之為基準正方形（Reference Square）。

本文主要探討當傑克「四心相連」,「心手相連」，和「手手相連」，不同連接情況下所連出的四線段，向外作正方形時，連接這些正方形之中心點而成的四邊形，甚至再以此四邊形的四個邊為邊分別向外作正方形，並將四個心相連，這樣一層一層的的不斷擴展下去，推導所連成的每一層四邊形與基準正方形（Reference Square）之間的面積關係，並試圖發現不同連接情況下，同一層四邊形間的面積關係。

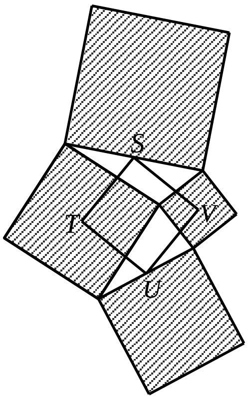


圖 (一)

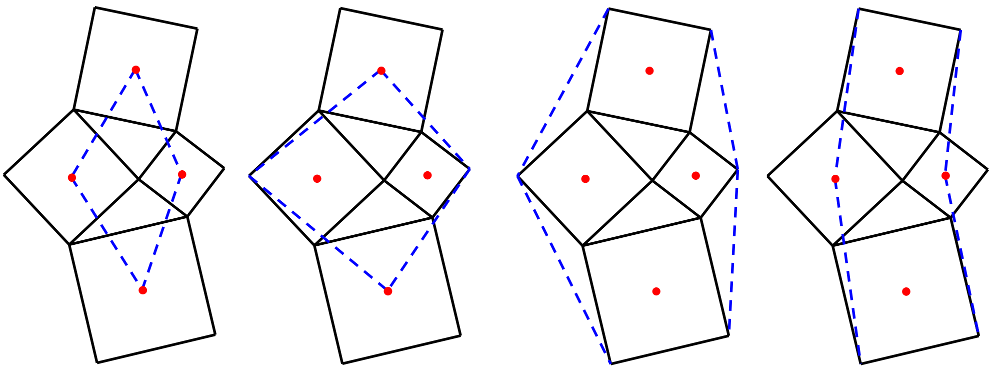
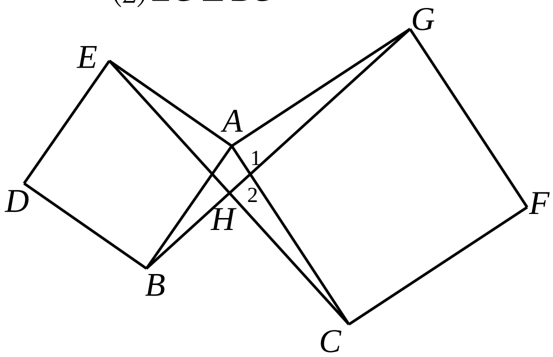
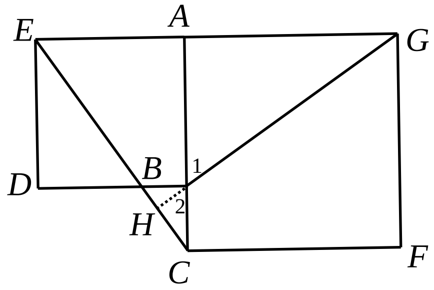


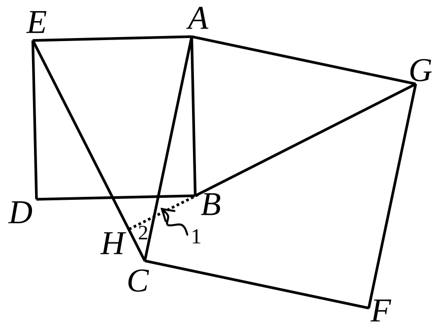
圖 (二)

參、預備知識：

【知識 A】如以下三個圖形，四邊形 $ABDE$ 和 $ACFG$ 皆為正方形，試證： (1) $\overline{EC}=\overline{BG}$ ；(2) $\overleftrightarrow{EC}\perp\overleftrightarrow{BG}$ 。







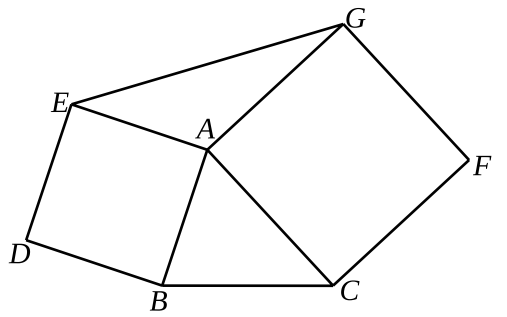
【證明】

(1)$\because \overline{AE}=\overline{AB}$，$\overline{AC}=\overline{AG}$，$\angle EAC=\angle BAG$ $\therefore \Delta EAC\cong\Delta BAG$ 故得證：$\overline{EC}=\overline{BG}$。

(2)由$\Delta EAC\cong\Delta BAG$ $\Rightarrow \angle AGB=\angle ACE$

又$\angle 1=\angle 2$ $\therefore \angle GHC=\angle GAC=90°$

故得證：$\overleftrightarrow{EC}\perp\overleftrightarrow{BG}$。



【知識 B】如右圖，以ΔABC的兩邊$\overline{AB}$、$\overline{AC}$爲一邊各向外作正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$。試證：ΔAEG面積$=\Delta ABC$面積。

【證明】

(1)令$\overline{AE}=x$，$\overline{AC}=y$，$\angle BAC=\alpha$（$\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$），則$\angle EAG=\pi-\alpha$。

(2) ΔABC面積$=\dfrac{1}{2}xy\sin\alpha=\dfrac{1}{2}xy\sin(\pi-\alpha)=\Delta AEG$面積

故得證：ΔAEG面積$=\Delta ABC$面積。

【另證】如下圖

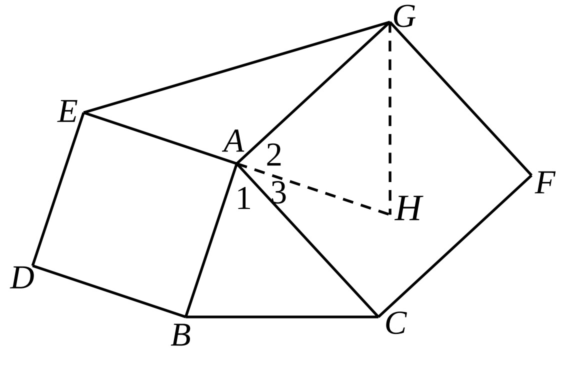
(1)在$\overline{AE}$的延長線上取點H，使得$\overline{AH}=\overline{AE}$，連$\overline{HG}$。

(2)$\because \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3=90°$ $\therefore \angle 1=\angle 2$。

(3)由$\angle 1=\angle 2$，$\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{AH}$，$\overline{AC}=\overline{AG}$

$\Rightarrow \Delta ABC\cong\Delta AHG$

（以上如同以A爲中心，將ΔABC逆轉$90°$成ΔAHG。）



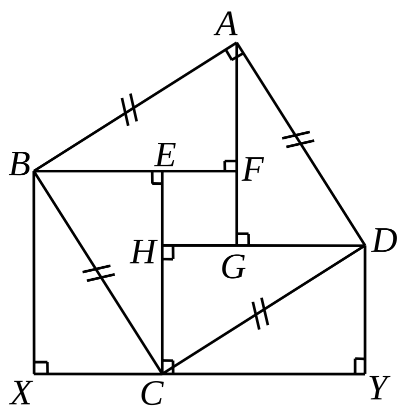
(4)$\because \overline{GA}$爲ΔGEH在$\overline{EH}$邊上的中線

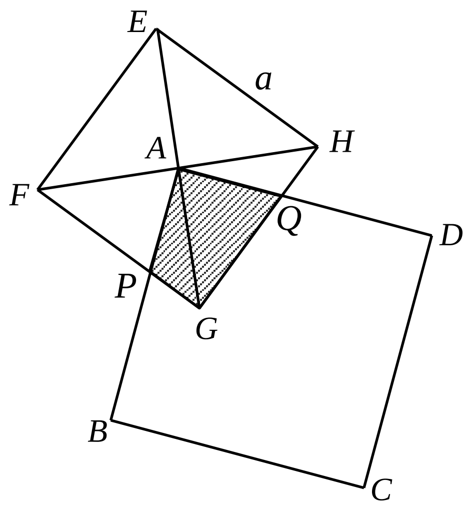
$\therefore \Delta AEG$面積$=\Delta AHG$面積

故得證：ΔAEG面積$=\Delta ABC$面積。

【知識 C】如下頁左圖，$ABCD$爲一正方形，而且$\overline{BX}\perp\overline{XY}$，$\overline{DY}\perp\overline{XY}$，若$\overline{BF}\,//\,\overline{DH}\,//\,\overline{XY}$，$\overline{AG}\,//\,\overline{EC}\,//\,\overline{BX}$，則 $\Delta ABF\cong\Delta DAG\cong\Delta CDH\cong\Delta BCE\cong\Delta CBX\cong\Delta DCY$。

【知識 D】如下頁右圖，將一個正方形$ABCD$的頂點A置於另一個正方形$EFGH$的兩對角線的交點上，若正方形$EFGH$的邊長爲a， 則兩正方形斜線重疊處的面積爲$\dfrac{1}{4}a^2$。

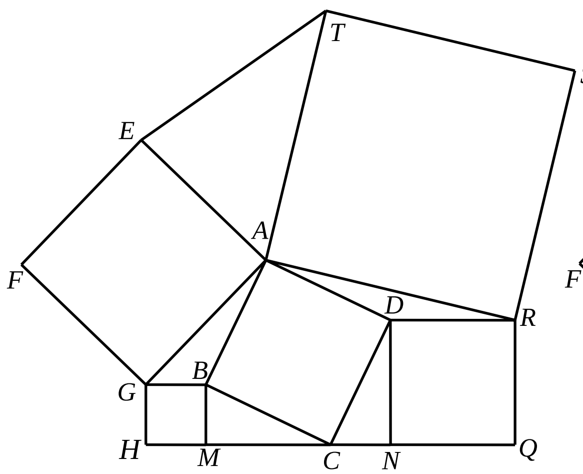


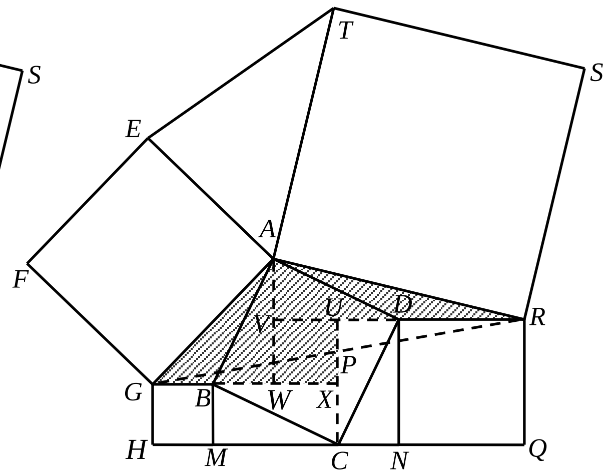


肆、研究過程：

(一)、從學習經驗尋找靈感，再發展新命題：

【問題 1】如下左圖，四邊形 $ABCD$、$AEFG$、$BGHM$、$DNQR$、$ARST$ 均為正方形，且 H、M、C、N、Q 五點共線，$\overline{HM} < \overline{NQ}$，若 $\overline{AB} = 3$，求：(1) ΔAET 的面積；(2)正方形 $AEFG$ 與 $ARST$ 的面積和。(3)正方形 $ABCD$、$AEFG$、$BGHM$、$DNQR$、$ARST$ 的面積和。（改寫自數學競賽試題）





【解答】如上右圖

(1)分別延長 $\overleftrightarrow{GB}$、$\overleftrightarrow{RD}$，使 $\overline{BX} = \overline{CM}$，$\overline{DV} = \overline{DR}$。

作 $\overleftrightarrow{AV} \perp \overline{BX}$，$\overleftrightarrow{CX} \perp \overline{DV}$，垂足分別為 W，U，連 $\overline{GR}$ 交 $\overline{CU}$ 於點 P。

$\because \Delta BMC \cong \Delta CND \quad \therefore \overline{BM} = \overline{CN}$，$\overline{CM} = \overline{DN}$。

$\because \overline{UR} // \overline{GX}$，$\overline{UR} = \overline{GX} \quad \therefore \Delta RUP \cong \Delta GXP$

$\Rightarrow \Delta AGR$ 的面積＝多邊形 $AGXUR$ 的面積（如上圖中的斜線區域）

又 ΔAGB 面積＝ΔBMC 面積＝ΔBXC 面積，ΔADR 面積＝ΔDNC 面積＝ΔCUD 面積

故 ΔAET 面積＝ΔAGR 面積＝正方形$ABCD$面積 $= 3^2 = 9$。

(2)令 $\overline{BM} = a$，$\overline{CM} = b$

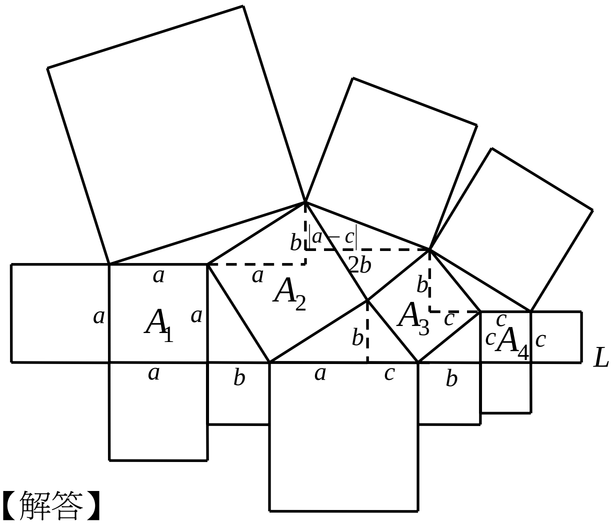
$\therefore \overline{AG}^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2$，$\overline{AR}^2 = (2b)^2 + a^2 = 4b^2 + a^2$

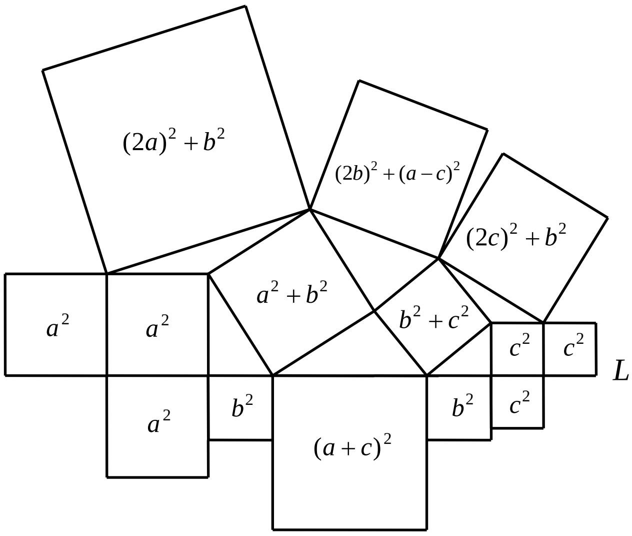
$\Rightarrow$ 正方形 $AEFG$ 與 $ARST$ 的面積和 $= 5a^2 + 5b^2 = 5 \times (a^2 + b^2)$

$=$ 正方形$ABCD$面積的 5 倍 $= 3^2 \times 5 = 45$

(3)五個正方形 $ABCD$ 、 $AEFG$ 、 $BGHM$ 、 $DNQR$ 、 $ARST$ 的面積和為 $45+9+9=63$ 。

【問題 2】如下圖，A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 皆為正方形（也當成其面積），其中 A_1 與 A_4 各有一邊重疊在直線 L 上，A_2 與 A_3 各有一個頂點落在直線 L 上。圖中除正方形 A_1 ，A_2 ，A_3 ，A_4 以外，還有另十個正方形，假設這十個正方形面積和為 S ，正方形 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 面積和為 S_0 ，試求 S 與 S_0 的關係式。





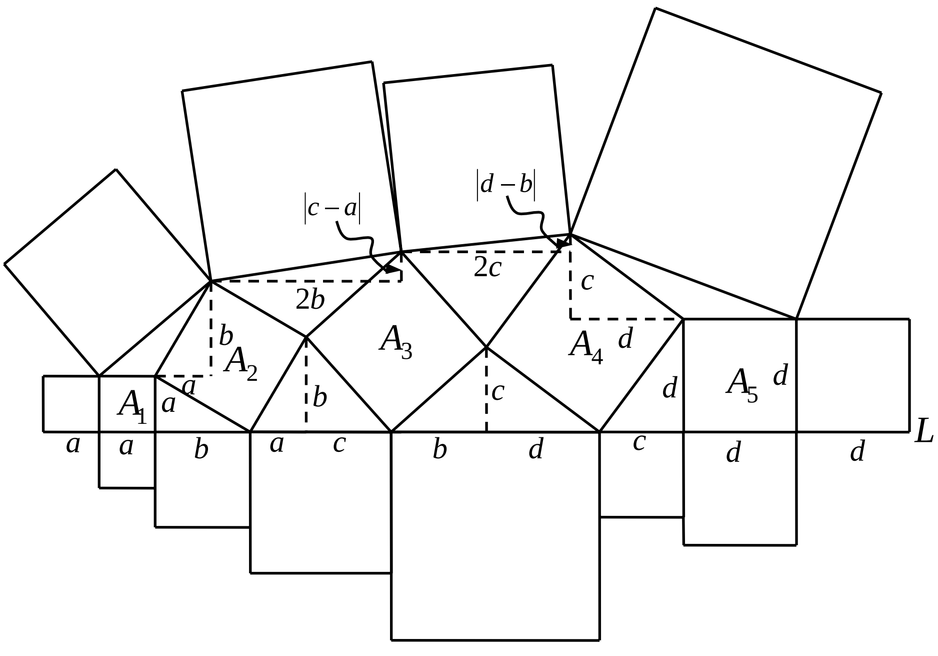
【解答】

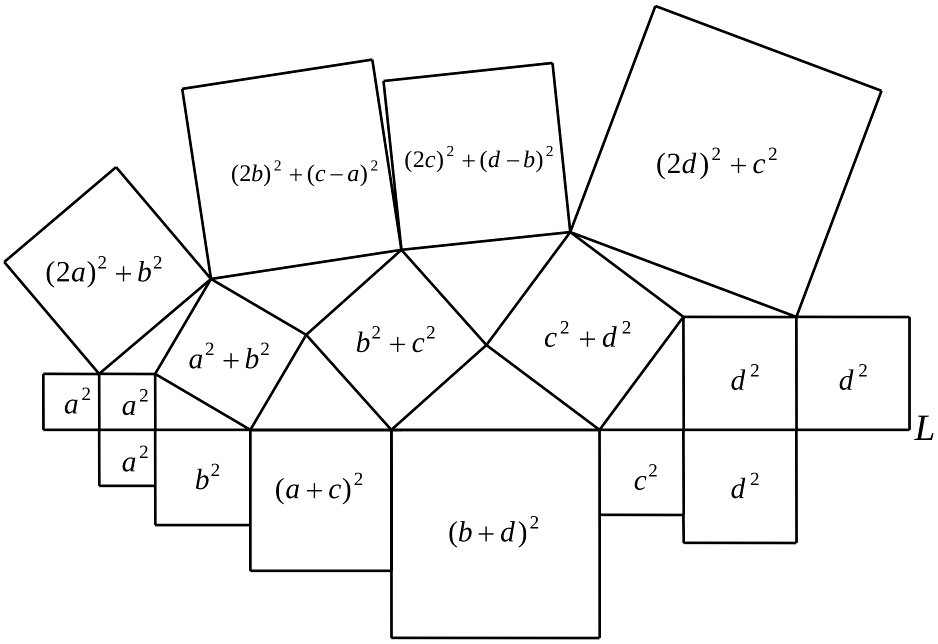
我們先作一些與直線 L 互相平行或垂直的線段（如上左圖的虛線部分），並將有一邊重疊於直線 L 上的正方形邊長以代數表示（如圖中的 a 、 b 、 c ），可依序推知一些直角三角形的兩股長，並表示出所有正方形的面積（如上右圖）。

$\therefore S=(4a^2+b^2)+(4b^2+a^2-2ac+c^2)+(4c^2+b^2)+c^2+c^2+b^2+$
$(a^2+c^2+2ac)+b^2+a^2+a^2=8a^2+8b^2+8c^2$

而 $S_0=a^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+c^2=2a^2+2b^2+2c^2$ 　故推得：$S=4S_0$ 。

【推論】較前一問題的圖再多一個正方形（指的是「恰有一頂點落在直線 L 上的正方形」，如下圖）。





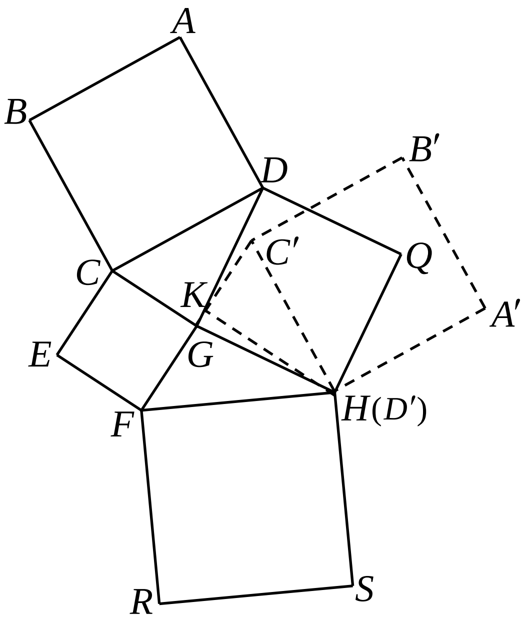
$\therefore S=(4a^2+b^2)+(4b^2+c^2-2ac+a^2)+(4c^2+d^2-2bd+b^2)+(4d^2+c^2)+d^2$

$+d^2+c^2+(b^2+d^2+2bd)+(a^2+c^2+2ac)+b^2+a^2+a^2=8a^2+8b^2+8c^2+8d^2$

而 $S_0=a^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+d^2)+d^2=2a^2+2b^2+2c^2+2d^2$　　故推得：$S=4S_0$。

【引理 1】$ABCD$、$FRSH$、$CEFG$、$DGHQ$ 皆爲正方形，試證：正方形 $ABCD$ 與 $FRSH$ 的面積和＝正方形 $CEFG$ 與 $DGHQ$ 面積和的 2 倍。

【證明】



(1)顯然當 $\overline{CD}=\overline{FH}$ 時，本引理成立。

以下假設 $\overline{CD}<\overline{FH}$，則不失一般性。

(2)以 G 爲旋轉中心，將 ΔGCD 與正方形 $ABCD$

順轉 $90°$ 成 $\Delta GC'D'$ 正方形 $A'B'C'D'$。

(3)$\because$ $\overline{GF}=\overline{GC'}$，$\overline{GD}=\overline{GD'}=\overline{GH}$，

$\angle FGH+\angle C'GH=180°$

$\therefore \overline{HG}$ 爲 $\Delta HFC'$ 的一中線。

(4)作 $\overline{HK}\perp\overline{FC'}$，垂足爲 K

$\overline{CD}^2=\overline{C'H}^2=(\overline{GC'}-\overline{GK})^2+\overline{KH}^2$

$=\overline{GC'}^2-2\overline{GC'}\times\overline{GK}+\overline{GH}^2$ ……①

$\overline{FH}^2=(\overline{FG}+\overline{GK})^2+\overline{KH}^2=\overline{FG}^2+2\overline{GF}\times\overline{GK}+\overline{GK}^2+\overline{KH}^2$

$=\overline{FG}^2+2\overline{GC'}\times\overline{GK}+\overline{GH}^2$ ……②

(5)由①+②$\Rightarrow \overline{CD}^2+\overline{FH}^2=2\overline{FG}^2+2\overline{GH}^2$

故得證：正方形 $ABCD$ 與 $FRSH$ 的面積和＝正方形 $CEFG$ 與 $DGHQ$ 的面積和 2 倍。

【另證】

(1)令 $\overline{CG}=x$ ，$\overline{GD}=y$ ，$\angle CGD=\alpha$ （ $\alpha \le \frac{\pi}{2}$ ），則 $\angle FGH=\pi-\alpha$ 。

(2)由餘弦定理⇒ $\overline{CD}^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$ ，$\overline{FH}^2=x^2+y^2-2xy\cos(\pi-\alpha)$

$\therefore \overline{CD}^2+\overline{FH}^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha+x^2+y^2-2xy\cos(\pi-\alpha)$

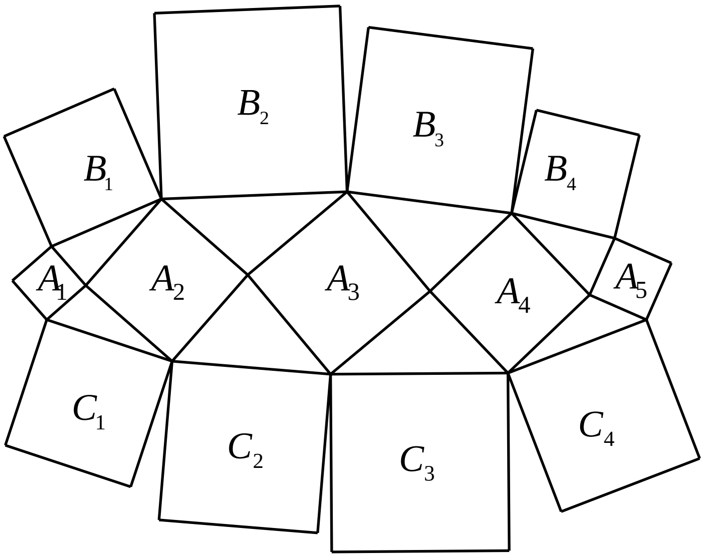
$=x^2+y^2-2xy\cos\alpha+x^2+y^2+2xy\cos\alpha=2(x^2+y^2)$

故得證：正方形 $ABCD$ 與 $FRSH$ 的面積和＝正方形 $CEFG$ 與 $DGHQ$ 的面積和 2 倍。

依據以上的引理，可推得下圖中的正方形面積有以下的關係：

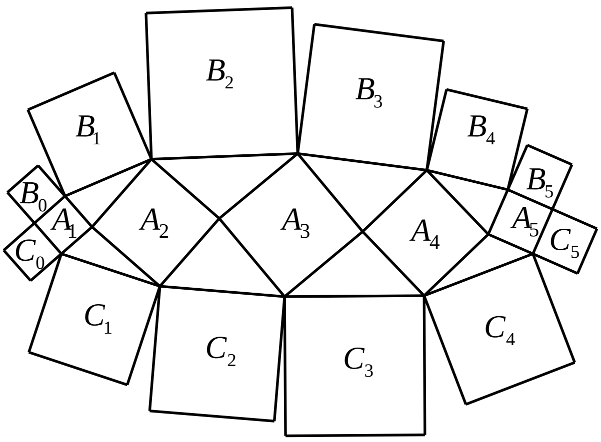
$B_1+C_1=(A_1+A_2)\times 2$ ，$B_2+C_2=(A_2+A_3)\times 2$ ，$B_3+C_3=(A_3+A_4)\times 2$ ，

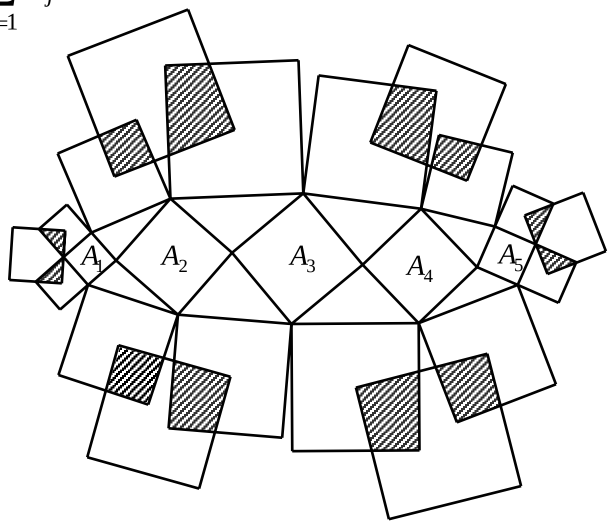
$B_4+C_4=(A_4+A_5)\times 2 \;\Rightarrow \sum_{i=1}^{4}(B_i+C_i)=2A_1+4A_2+4A_3+4A_4+2A_5$



$\therefore$ 若在 A_1 與 A_5 兩個正方形的邊再各添加兩個正方形（如下圖之 B_0 、C_0 、B_5 、C_5 ），則可推得各正方形間的面積有以下關係：

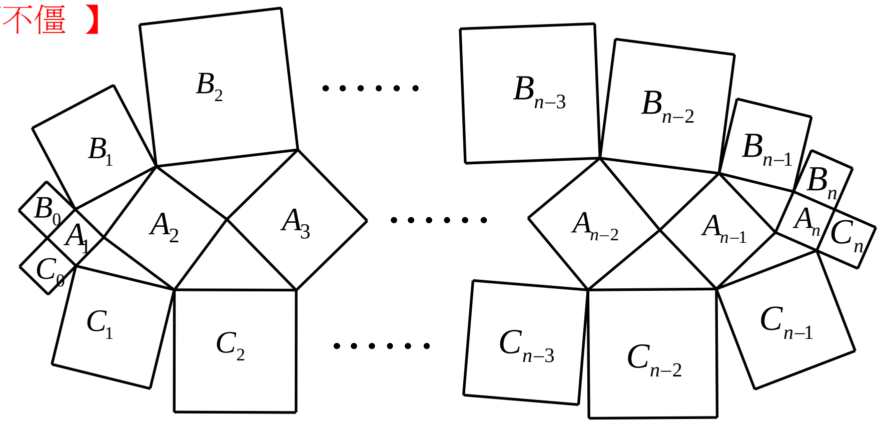
$$\sum_{i=1}^{6}(B_{i-1}+C_{i-1})=4\times\sum_{j=1}^{5}A_j$$





我們依序作出B_0、C_0；B_5、C_5；B_1、B_2；B_3、B_4；C_1、C_2；C_3、C_4兩個相鄰正方形的中心點連線段，並以這六條線段爲邊向外作六個正方形，這些新作正方形與前述正方形的重疊面積和（如上頁圖示）會等於A_1、A_2、A_3、A_4、A_5的面積和。

【 百足之蟲，死而不僵 】



若A_1、A_2、…、A_n；B_0、B_1、B_2、…、B_n；C_0、C_1、C_2、…、B_n皆表正方形（面積）$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1}(B_{i-1}+C_{i-1}) = 4\times\sum_{j=1}^{n}A_j$

(二)、確立主體架構，向外探求生機：

【引理 2】P、R分別爲正方形$ABCD$、$DEFG$的中心點，Q爲$\overline{CE}$的中點，試證：ΔPQR爲等腰直角三角形。

【證明】

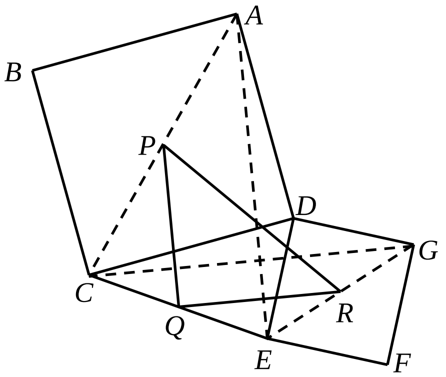
(1)連$\overline{AE}$、$\overline{CG}$、$\overline{AC}$、$\overline{EG}$。

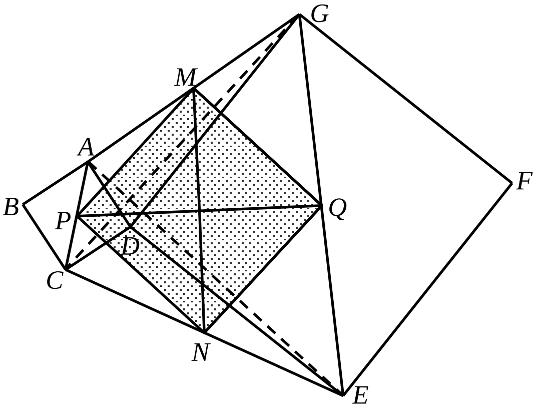
(2)Θ $ABCD$、$DEFG$爲正方形　$\therefore$ $\overline{AE}$與$\overline{CG}$互相垂直，$\overline{AE}=\overline{CG}$。

(3)Θ P，Q分別爲$\overline{AC}$與$\overline{CE}$中點 $\therefore \overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AE}$，$\overline{PQ}\,//\,\overline{AE}$。

同理可證：$\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{CG}$，$\overline{RQ}\,//\,\overline{CG}$。

(4)由(2)和(3)$\Rightarrow$ $\overline{PQ}\perp\overline{QR}$，$\overline{PQ}=\overline{QR}$，故得證：$\Delta PQR$爲等腰直角三角形。





【引理 3】P、Q分別爲正方形$ABCD$、$DEFG$的中心點，M、N分別爲$\overline{AG}$、$\overline{CE}$的中點，

試證： $MPNQ$ 為正方形。

【證明】由引理 2 可推知 ΔPNQ 與 ΔPMQ 皆為等腰直角三角形，故得證： $MPNQ$ 為正方形。

【定理 1】 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形，T 、 R 、 V 、 H 分別是各個正方形的中心點，S 、 U 分別是 $\overline{AG}$ 、 $\overline{CE}$ 的中點，試證：(Ⅰ) $\overline{HD}=\overline{DR}$；(II) $\overline{HR}$ 與 $\overline{TV}$ 互相垂直；(III) 四邊形 $HTRV$ 的面積=(正方形 $STUV$ 面積)$\times 2$。(如下圖，我們將四個斜線正方形的特殊組合，稱為「傑克結構」(Jack Structure)，此圖是下段研究圖形的主架構，而正方形 $STUV$ 稱為「基準正方形」(Reference Square)。)

【證明】如下圖

(Ⅰ)

(1)連 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AN}$ 、 $\overline{GE}$ 。

(2)以 D 點為旋轉中心，將 ΔADG 、正方形 $AGNM$ 、 $\overline{AN}$ 與 $\overline{DH}$ 分別順轉 $90°$ 而成 $\Delta A'DE$ 、正方形 $A'EN'M'$ 、 $\overline{A'N'}$ 與 $\overline{DH'}$ $\Rightarrow \overline{DA'}=\overline{DA}=\overline{DC}$ ， $\angle CDA+\angle ADA'=180°$ 。

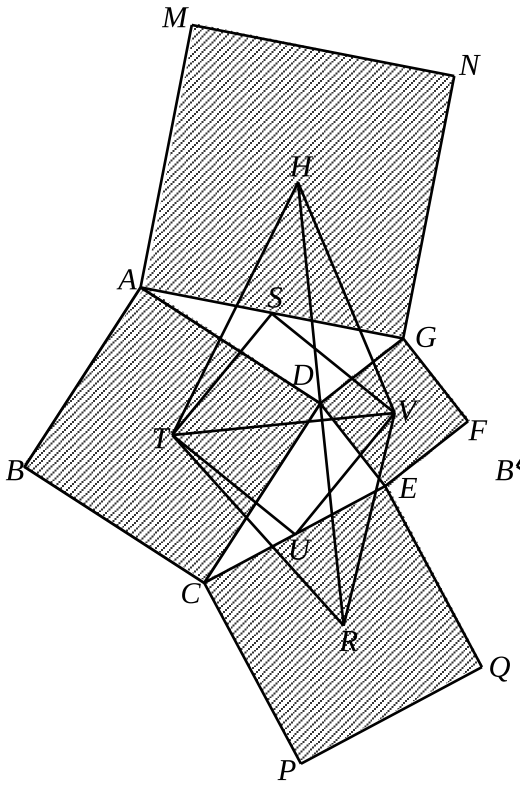
(3)由引理 2 $\Rightarrow \overline{DR}=\overline{DH'}$ ， $\overline{DR}\perp\overline{DH'}$

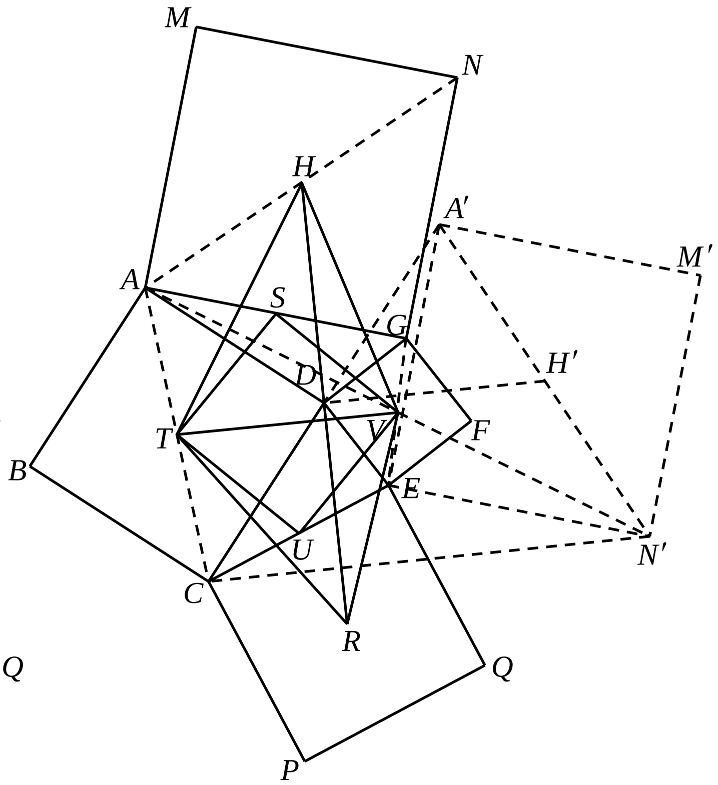
又 $\overline{DH}=\overline{DH'}\Rightarrow \angle HDH'+\angle H'DR=90°+90°=180°$

(4)故得證： $\overline{HD}=\overline{DR}$ ， H 、 D 、 R 三點共線。

(II)

(1)連 $\overline{AV}$ 、 $\overline{VN'}$ 、 $\overline{CN'}$ 。





(2)在 ΔAVG 與 $N'VE$ 中 Θ $\overline{AG}//\overline{EN'}$ $\therefore \angle AGV=\angle N'EV$ 又 $\overline{AG}=\overline{EN'}$ ， $\overline{GV}=\overline{EV}$

$\therefore \Delta AVG\cong\Delta N'VE \Rightarrow \overline{AV}=\overline{VN'}$ ，且 A 、 V 、 N' 三點共線。

(3)$\Theta\ \overline{AV}=\overline{VN'}$，$\overline{AT}=\overline{TC}$　$\therefore \overline{TV}\,//\,\overline{CN'}$，$\overline{TV}=\frac{1}{2}\overline{CN'}$

$\Theta\ \overline{A'D}=\overline{DC}$，$\overline{A'H'}=\overline{H'N'}$　$\therefore \overline{DH'}\,//\,\overline{CN'}$，$\overline{DH'}=\frac{1}{2}\overline{CN'}$

$\Rightarrow \overline{TV}\,//\,\overline{DH'}$，$\overline{TV}=\overline{DH'}=\overline{DH}$

(4)$\Theta\ \overline{HR}\perp\overline{DH'}$　故得證：$\overline{HR}$與$\overline{TV}$互相垂直。

(III)

(1) $HTRV$ 的面積$=\frac{1}{2}\times\overline{HR}\times\overline{TV}=\frac{1}{2}\times 2\overline{DH}\times\overline{TV}=\overline{DH}\times\overline{TV}$

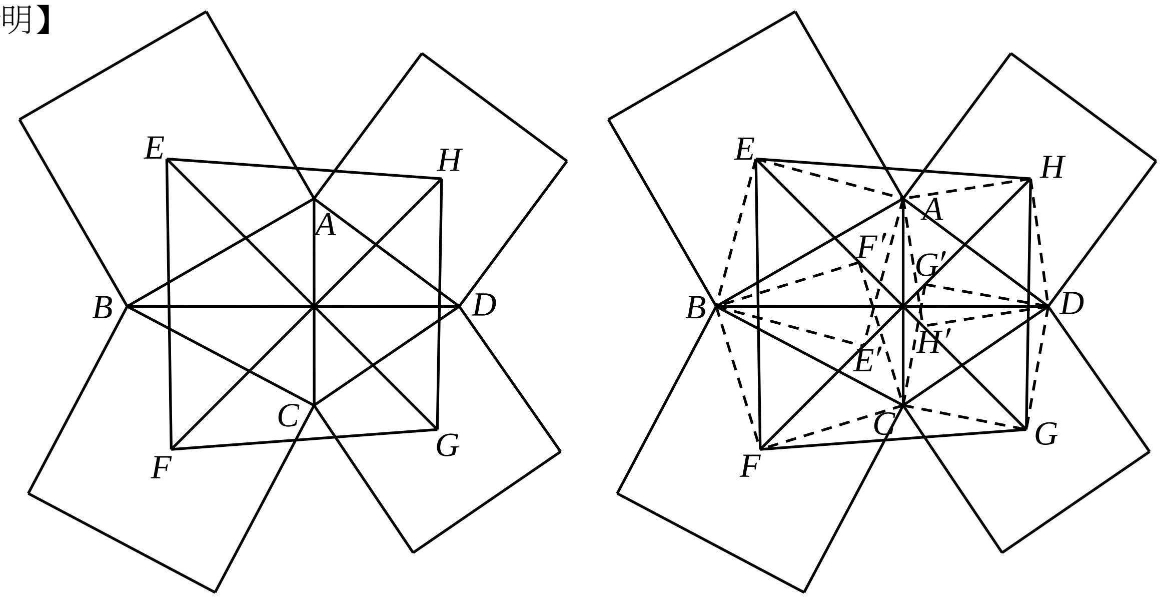
(2)$\Theta\ \overline{DH}=\overline{TV}$　$\therefore$ $HTRV$ 的面積$=\overline{TV}^2=2\times\overline{ST}^2$

故得證：四邊形$HTRV$的面積$=$(正方形$STUV$面積)$\times 2$。

(三)、掌握根本、用「心」追求，終於發現「無盡」之美：

【引理 4】四邊形$ABCD$中，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AC}=a$，$\overline{BD}=b$，若分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$爲邊，向外作四個正方形，且$E$、$F$、$G$、$H$分別爲四個正方形的中心點，試證：(Ⅰ)$\overline{EG}\perp\overline{FH}$，$\overline{EG}=\overline{FH}$　(II) $EFGH$ 的面積$=ABCD$面積的$\frac{(a+b)^2}{2ab}$倍。

【證明】



(Ⅰ)

(1)分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$爲一條對角線，作正方形$AEBE'$、$BFCF'$、$CGDG'$、$DHAH'$。

(2)$\Theta\ AEBE'$、$AHDH'$爲正方形　$\therefore\ \overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AD}:\overline{AH'}=\sqrt{2}:1$

且$\angle BAD=\angle BAH'+\angle DAH'=\angle BAH'+45^\circ=\angle BAH'+\angle EAB=\angle EAH'$

$\Rightarrow \Delta ADB\sim\Delta AH'E \Rightarrow \overline{BD}=\overline{EH'}\times\sqrt{2}$，$\angle AH'E=\angle ADB$

同理可證：$\Delta DAC\sim\Delta DH'G$，$\overline{AC}=\overline{H'G}\times\sqrt{2}$，$\angle DH'G=\angle DAC$

$\Rightarrow \angle AH'E+\angle DH'G+\angle AH'D=\angle ADB+\angle DAC+90^\circ=180^\circ$

$\therefore \overline{EG}=\overline{EH'}+\overline{GH'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{BD}+\overline{AC}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$

(3)同理可證：$\overline{FH}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$

(4)Θ $AEBE'$ 、 $AHDH'$ 爲正方形 $\therefore \overleftrightarrow{E'H}\perp\overleftrightarrow{EH'}\Rightarrow\overline{EG}\perp\overline{FH}$

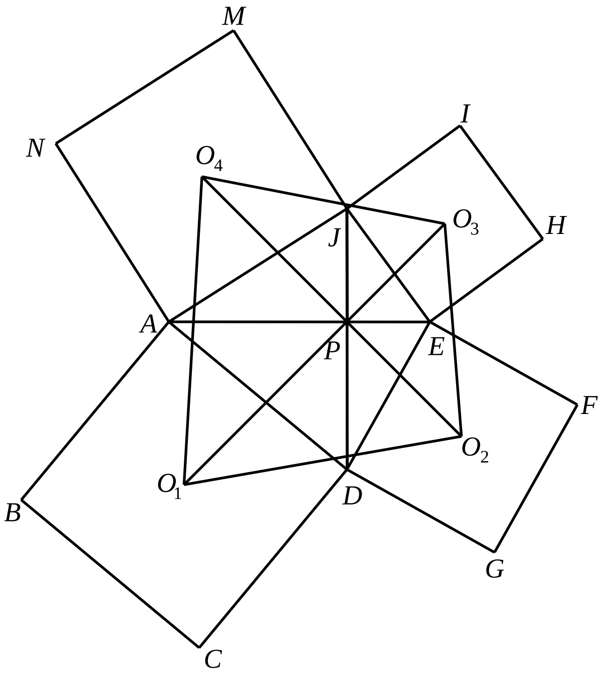
故得證：$\overline{EG}\perp\overline{FH}$ ，$\overline{EG}=\overline{FH}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$。

(II)

由 $EFGH$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a+b)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a+b)=\dfrac{1}{4}(a+b)^2$ ，又 $ABCD$ 面積$=\dfrac{1}{2}ab$

故可推得：$EFGH$ 的面積$=ABCD$ 面積的 $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}$ 倍。

【引理 5】四邊形 $ADEJ$ 中，$\overline{AE}=\overline{DJ}$ ，$\overline{AE}\perp\overline{DJ}$ （垂足爲 P ），且 $ABCD$ 、 $DEFG$ 、 $EHIJ$ 、 $AJMN$ 皆爲正方形，O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是每個正方形的中心點，試證：$\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$ ，$\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}$ ，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積$=$(四邊形 $ADEJ$ 面積)$\times 2$ 。



【證明】

令 $\overline{AE}=\overline{DJ}=a$

由引理 4 知：$\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$ ，$\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}$ ，

$O_1O_2O_3O_4$ 的面積$=ADEJ$ 面積的 $\dfrac{(a+a)^2}{2a^2}$ 倍。

故得證：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積$=$(四邊形 $ADEJ$ 面積)$\times 2$ 。

【定理 2】如下頁圖，四邊形 $ABCD$ 、$CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆爲正方形，T 、 R 、V 、 H 四點分別是每一個正方形的中心點，S 、U 分別是 $\overline{AG}$ 、$\overline{CE}$ 的中點；四邊形 $THIJ$ 、 $TRLK$ 、 $VRWX$ 、 $HVYZ$ 皆爲正方形，O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是每個正方形的中心點，試證：$\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$ ，$\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}$ ，且四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積$=$(正方形 $STUV$ 面積)$\times\dfrac{9}{2}$ 。

【證明】

(1)由定理 1 可知：四邊形 $HTRV$ 面積$=$正方形 $STUV$ 面積的 2 倍。

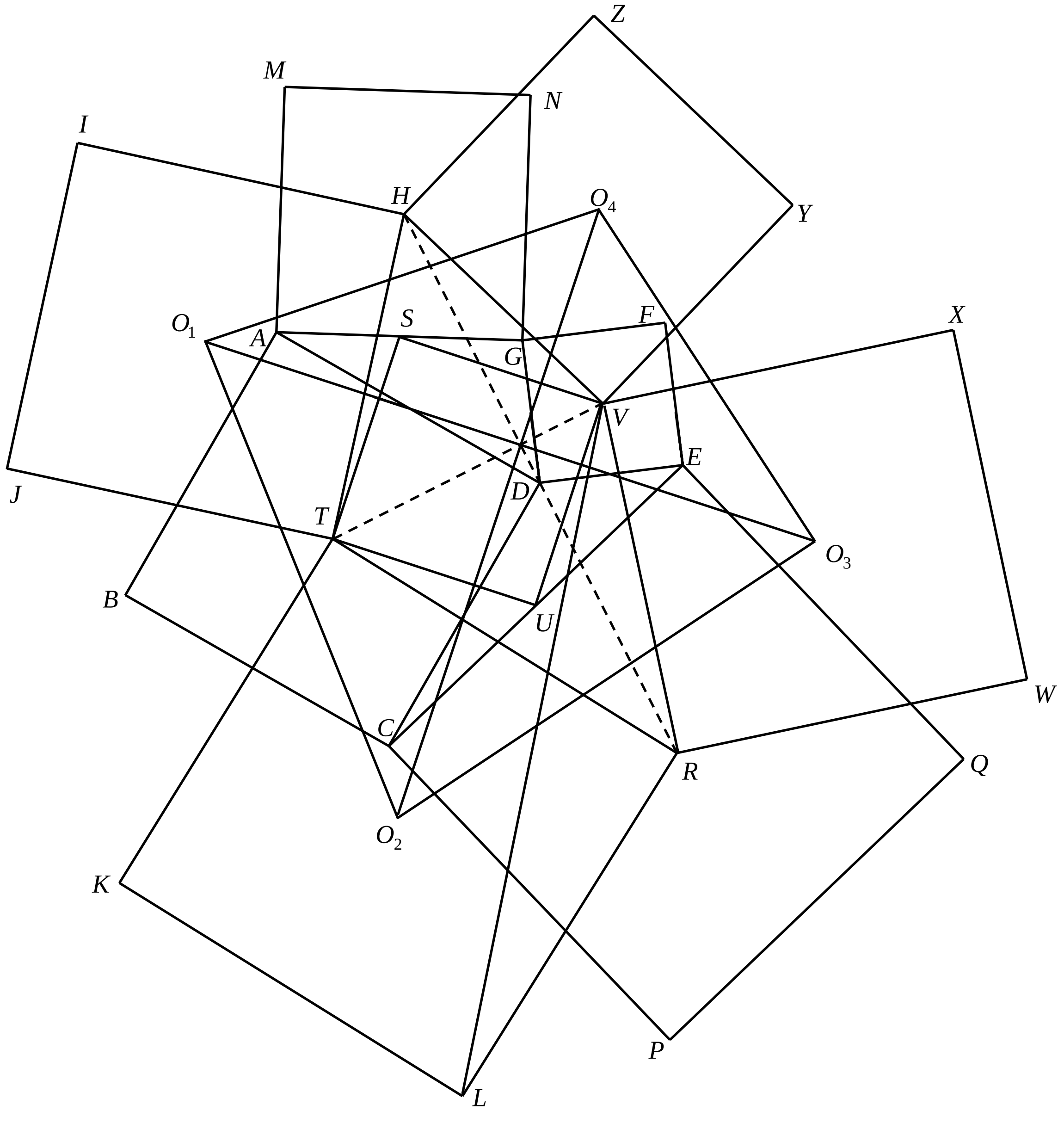
(2)連 $\overline{HR}$ 、$\overline{TV}$ ，則 $\overline{HR}=2\overline{TV}$ （令 $\overline{TV}=r$ ，$\overline{HR}=2r$ ），$\overline{HR}\perp\overline{TV}$ 。

(3)由引理 4 知：$\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$ ，$\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}$ ，四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 面積$=HTRV$ 面積的

$\dfrac{(2r+r)^2}{2\cdot 2r\cdot r}$ 倍 $\Rightarrow O_1O_2O_3O_4$ 面積 $=HTRV$ 面積的 $\dfrac{9}{4}$ 倍

$\therefore$ 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 $=$ 正方形 $STUV$ 面積的 $\dfrac{9}{4}\times 2$ 倍

故得證：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $=$ (正方形 $STUV$ 面積) $\times\dfrac{9}{2}$ 。



【引理 6】$ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆為正方形，T 、 R 、V 、 H 分別是各個正方形的中心點，S 、U 分別是 $\overline{AG}$ 、$\overline{CE}$ 的中點，試證：(Ⅰ) $\overline{HR}=\overline{BF}$ ，$\overline{HR}$ 與 $\overline{BF}$ 互相垂直；(II) 四邊形 $HBRF$ 的面積 $=$ (正方形 $STUV$ 面積) $\times 4$ 。

【證明】

(Ⅰ)

(1)作正方形 $AHGK$ ，由定理 1 可知： $\overline{HD}=\overline{DR}$ ， $\overline{HR}=2\overline{TV}$ 。

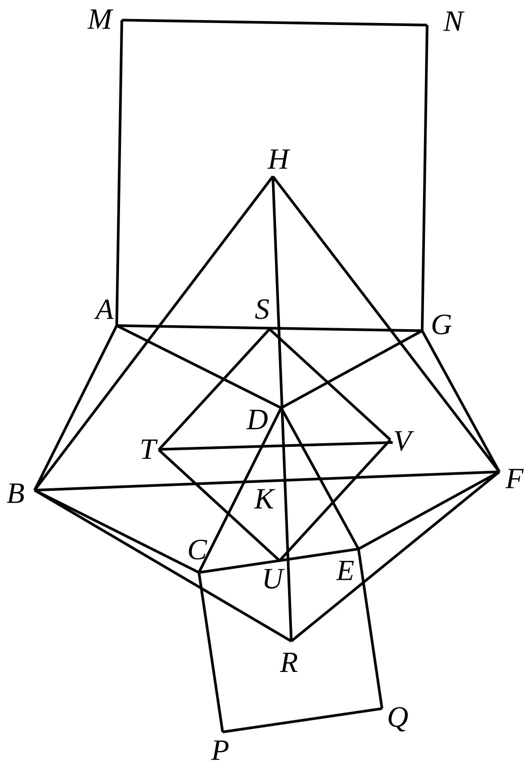
(2)由正方形 $AHGK$ 與正方形 $ABCD$ 共頂點於 $A\Rightarrow\overline{BK}=\overline{HD}$ ， $\overleftrightarrow{BK}\perp\overleftrightarrow{HD}$ ；

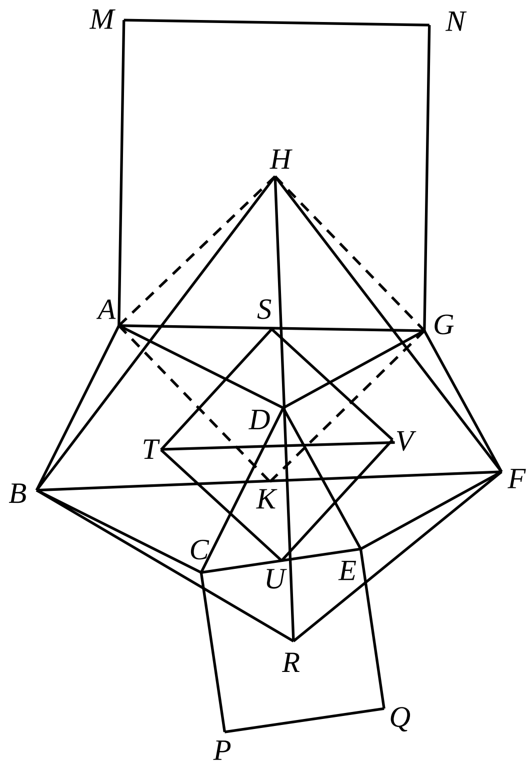
由正方形 $AHGK$ 與正方形 $DEFG$ 共頂點於 G $\Rightarrow \overline{FK}=\overline{HD}$，$\overleftrightarrow{FK}\perp\overleftrightarrow{HD}$

$\therefore$ B 、 K 、 F 三點共線 $\Rightarrow \overline{BF}=2\overline{HD}=\overline{HR}$，$\overline{HR}$ 與 $\overline{BF}$ 互相垂直。

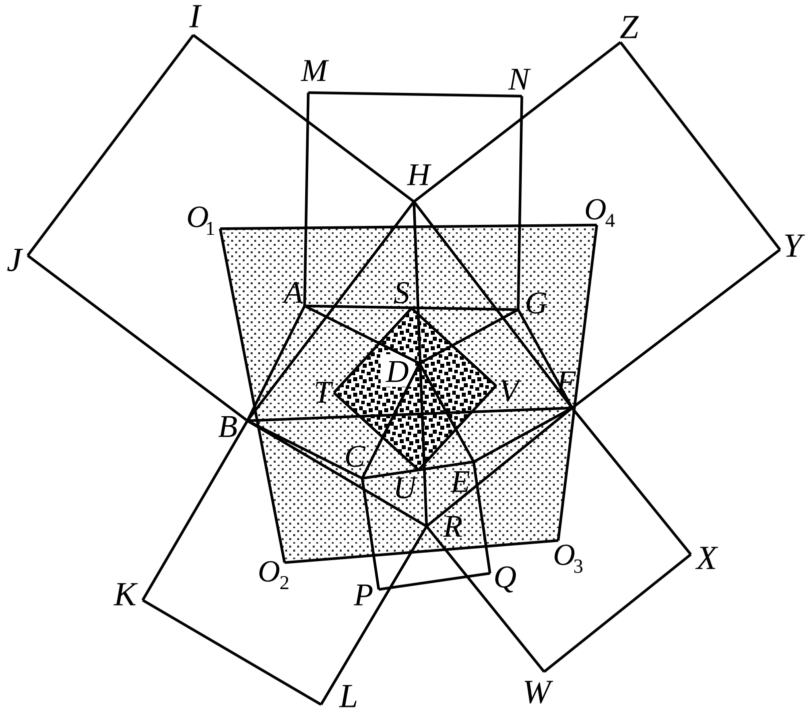
(II)

四邊形 $HBRF$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{HR}=\frac{1}{2}\times 2\overline{TV}\times 2\overline{TV}=2\overline{TV}^{2}$ $=$(正方形 $STUV$ 面積)$\times 4$。





【定理 3】四邊形 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$ 皆爲正方形，T 、 R 、 V 、 H 分別是每個正方形的中心點，S 、 U 分別是 $\overline{AG}$ 、 $\overline{CE}$ 的中點；四邊形 $BHIJ$ 、 $BRLK$ 、 $FRWX$ 、 $HFYZ$ 皆爲正方形，O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 分別是每個正方形的中心點，試證：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $=$(正方形 $STUV$ 面積)$\times 8$。



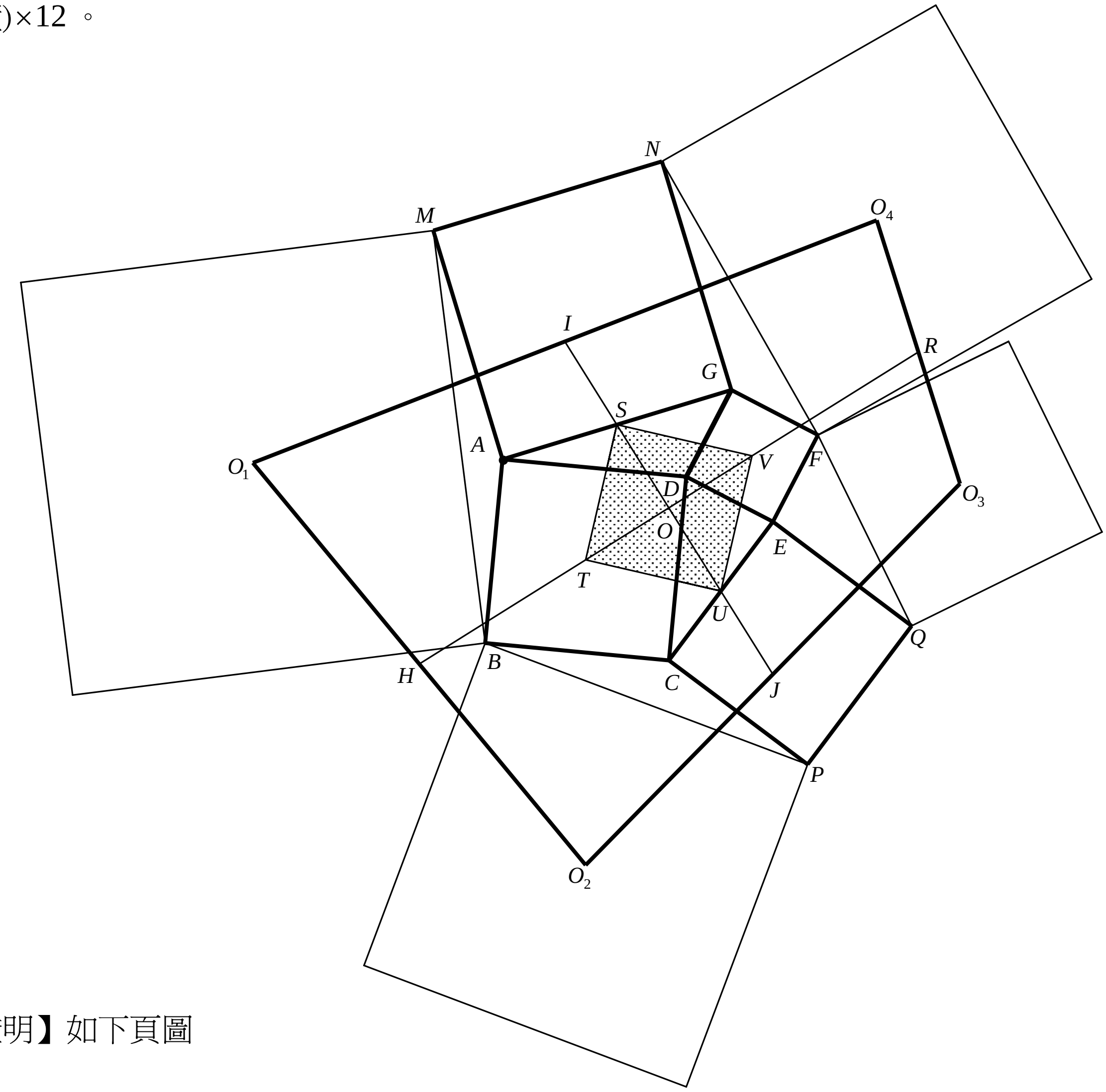
【證明】

(1)由引理 6 可知：四邊形 $HBRF$ 面積 $=$ 正方形 $STUV$ 面積的 4 倍。

(2)由引理 5 可知：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 $=$ $HBRF$ 面積的 2 倍

$\therefore$ 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $=$(正方形 $STUV$ 面積)$\times 8$。

【引理 7】如下圖，四邊形 $ABCD$、$CEQP$、$DEFG$、$AGNM$ 皆爲正方形，T、V 分別是 $ABCD$ 與 $DEFG$ 的中心點，S、U 分別是 $\overline{AG}$、$\overline{CE}$ 的中點。若分別以 $\overline{BM}$、$\overline{BP}$、$\overline{FQ}$、$\overline{FN}$ 爲邊向外作四個正方形，O_1、O_2、O_3、O_4 分別是這四個正方形的中心點，且 $\overleftrightarrow{TV}$ 分別交 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_3O_4}$ 於 H、R；$\overleftrightarrow{SU}$ 分別交 $\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$ 於 I、J，試證：(Ⅰ) $\overline{HR}=3\overline{TV}$，$\overline{IJ}=2\overline{SU}$，$H$、$R$、$I$、$J$ 分別是 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$ 的中點；(II)四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積＝(正方形 $STUV$ 面積)×12。



【證明】如下頁圖

(Ⅰ)

(1)連 $\overline{VO_1}$、$\overline{VO_2}$、$\overline{TO_3}$、$\overline{TO_4}$、$\overline{AC}$、$\overline{EG}$，由定理 1 $\Rightarrow \overline{VA}=\overline{AO_1}$，$\overline{VC}=\overline{CO_2}$，$\overline{TE}=\overline{EO_3}$，$\overline{TG}=\overline{GO_4} \Rightarrow \overline{AC} // \overline{O_1O_2}$，$\overline{EG} // \overline{O_3O_4}$。

$\Rightarrow \overline{VT}=\overline{TH}$，$\overline{TV}=\overline{VR} \Rightarrow \overline{HR}=\overline{TH}+\overline{TV}+\overline{VR}=3\overline{TV}$　又 $\overline{AT}=\overline{TC}$　$\therefore \overline{O_1H}=\overline{HO_2}$

同理可證：$\overline{O_3R}=\overline{RO_4}$。

(2)分別取 $\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$ 的中點 X 與 Y，連 $\overline{AX}$、$\overline{GX}$、$\overline{OA}$、$\overline{OG}$、$\overline{TO_1}$。

(3) $\because \overline{VA}=\overline{AO_1}$，$\overline{VO}=\overline{OT}$　$\therefore \overline{OA} // \overline{O_1T}$，$\overline{OA}=\dfrac{1}{2}\overline{O_1T}$

又 $\overline{O_4G}=\overline{GT}$，$\overline{O_4X}=\overline{XO_1}$　$\therefore \overline{GX} // \overline{O_1T}$，$\overline{GX}=\dfrac{1}{2}\overline{O_1T}$

$\Rightarrow \overline{OA} // \overline{GX}$，$\overline{OA}=\overline{GX} \Rightarrow$ 四邊形 $GXAO$ 爲平行四邊形 $\Rightarrow \overline{OX}$ 通過 $\overline{AG}$ 的中點 S

又 $\overleftrightarrow{OS}$ 交 $\overline{O_1O_4}$ 於 I $\therefore$ 點 X 與 I 重合 $\Rightarrow$ I 爲 $\overline{O_1O_4}$ 的中點。

同理可證：點 Y 與 J 重合 $\Rightarrow$ J 爲 $\overline{O_2O_3}$ 的中點。

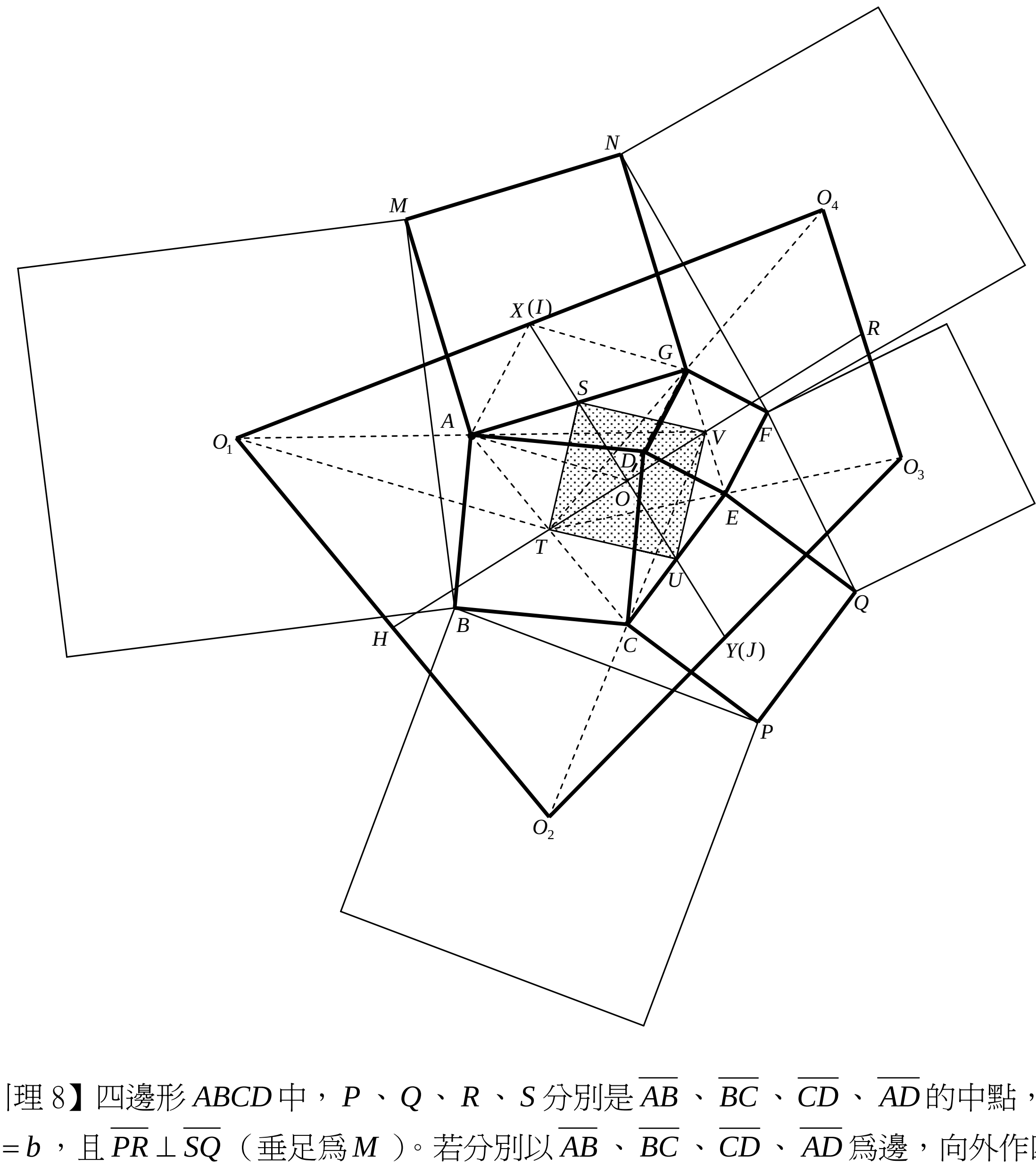
(4)Θ $GXAO$ 爲平行四邊形 $\therefore \overline{IS}=\overline{SO} \Rightarrow \overline{IO}=\overline{SU}$

同理可證： $\overline{JU}=\overline{UO} \Rightarrow \overline{JO}=\overline{SU}$ $\therefore \overline{IJ}=\overline{IO}+\overline{JO}=2\overline{SU}$

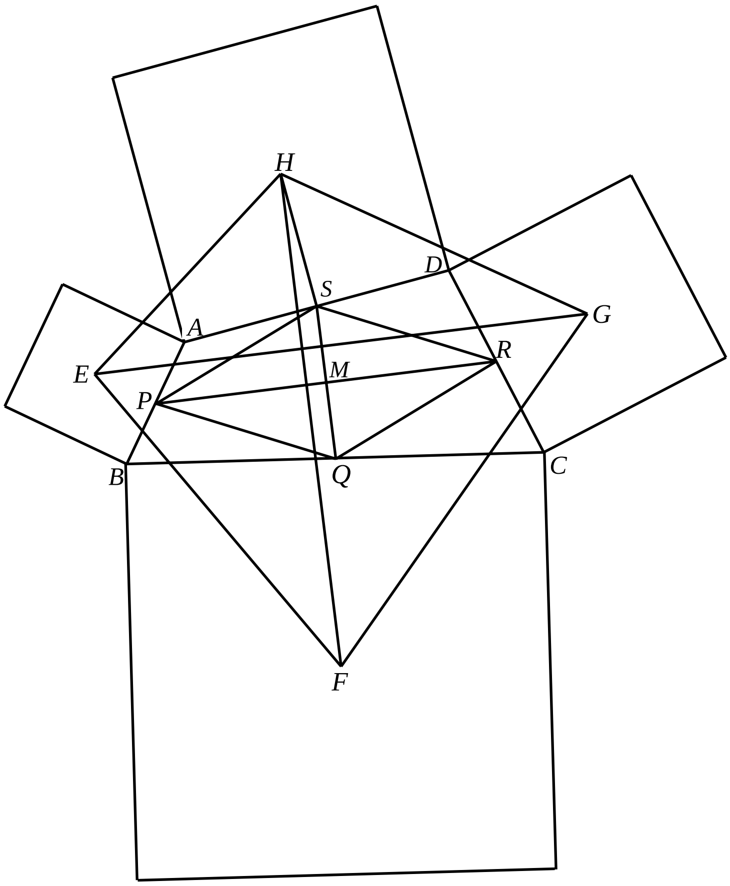
(5)由以上(1)~(4)得證：$\overline{HR}=3\overline{TV}$ ，$\overline{IJ}=2\overline{SU}$ ， H 、R 、I 、J 分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、$\overline{O_3O_4}$ 、$\overline{O_1O_4}$ 、$\overline{O_2O_3}$ 的中點。

(II)Θ H 、 R 、I 、 J 分別是 $\overline{O_1O_2}$ 、$\overline{O_3O_4}$ 、$\overline{O_1O_4}$ 、$\overline{O_2O_3}$ 的中點，$\overline{IJ} \perp \overline{HR}$

$\therefore$ 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $=\overline{IJ}\times\overline{HR}=2\overline{SU}\times 3\overline{TV}=6\overline{TV}^2=$ (正方形 $STUV$ 面積) $\times 12$ 。



【引理 8】四邊形 $ABCD$ 中，P 、Q 、R 、S 分別是 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{AD}$ 的中點，$\overline{PR}=a$ ，$\overline{SQ}=b$ ，且 $\overline{PR}\perp\overline{SQ}$（垂足爲 M ）。若分別以 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{AD}$ 爲邊，向外作四個正方形，且 E 、F 、G 、H 分別爲四個正方形的中心點，試證：(Ⅰ) $\overline{EG}=\overline{FH}$ ，$\overline{EG}\perp\overline{FH}$ ； (II) 四邊形 $EFGH$ 的面積 $=$ 四邊形 $ABCD$ 面積的 $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}$ 倍。



【證明】

(I)

(1)分別以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 爲一條對角線，作正方形 $AEBE'$、$BFCF'$、$CGDG'$、$DHAH'$。

(2)連 $\overline{EH'}$、$\overline{HE'}$。

(3)Θ P、Q、R、S 分別是 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 的中點

$\therefore SPQR$ 爲平行四邊形 $\Rightarrow \overline{SM}=\overline{MQ}$，$\overline{PM}=\overline{RM}$

又 $\overline{PR}\perp\overline{SQ}$　$\therefore SPQR$ 爲菱形 $\Rightarrow \overline{SP}=\overline{SR}=\overline{RQ}=\overline{PQ}$。

(4)Θ $AEBE'$、$AHDH'$ 爲正方形　$\therefore \Delta AEH'\cong\Delta AE'H \Rightarrow \overline{EH'}=\overline{E'H}$

Θ $\overline{AE}:\overline{AP}=\overline{AH'}:\overline{AS}=\sqrt{2}:1$，且

$\angle EAH'=\angle EAP+\angle PAH'=45^\circ+\angle PAH'=\angle H'AS+\angle PAH'=\angle PAS$

$\Rightarrow \Delta AEH'\sim\Delta APS \quad \Rightarrow \overline{EH'}=\overline{PS}\times\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{EH'}=\overline{E'H}=\overline{PS}\times\sqrt{2}$

同理可證：$\overline{HG'}=\overline{GH'}=\overline{SR}\times\sqrt{2}$，$\overline{GF'}=\overline{FG'}=\overline{RQ}\times\sqrt{2}$，$\overline{FE'}=\overline{EF'}=\overline{PQ}\times\sqrt{2}$

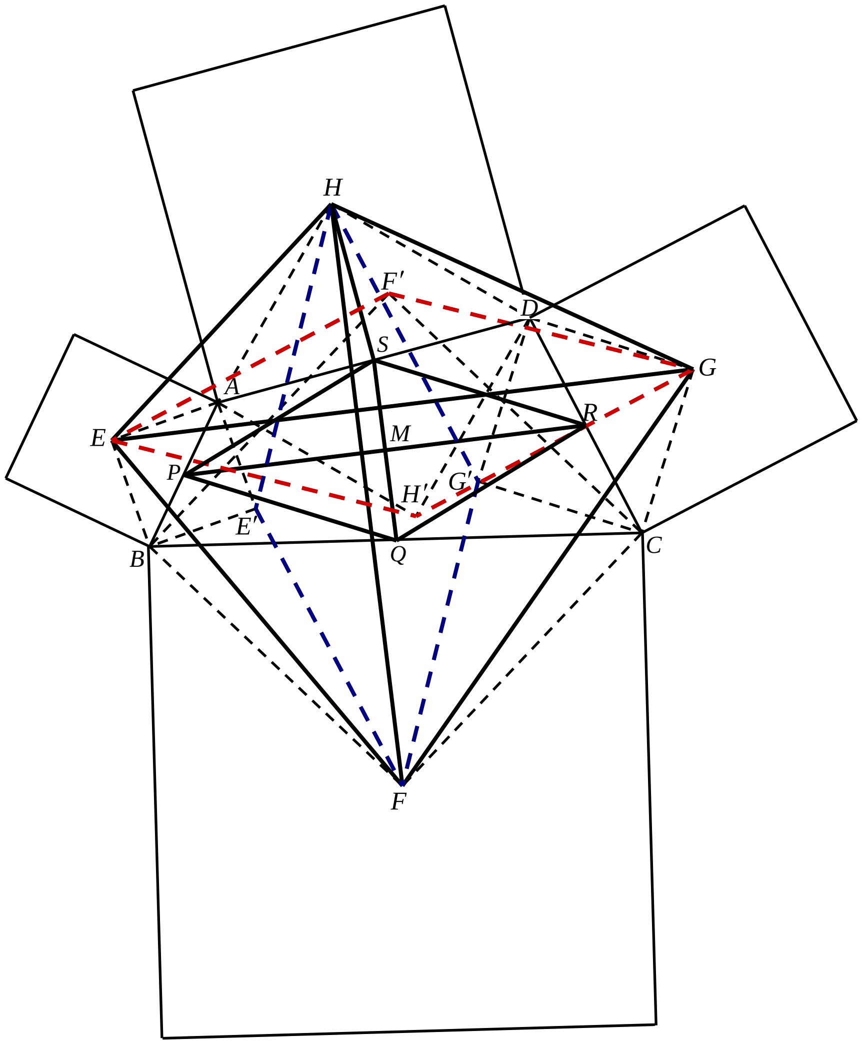
$\Rightarrow \overline{EH'}=\overline{E'H}=\overline{HG'}=\overline{GH'}=\overline{GF'}=\overline{FG'}=\overline{FE'}=\overline{EF'}$

即四邊形 $HE'FG'$ 與 $EH'GF'$ 皆爲菱形。

(5)Θ $\overleftrightarrow{EF'}\perp\overleftrightarrow{E'F}$，$\overleftrightarrow{E'F}\,//\,\overleftrightarrow{HG'}$　$\therefore \overleftrightarrow{EF'}\perp\overleftrightarrow{HG'}$　　又 $\overleftrightarrow{HE'}\perp\overleftrightarrow{EH'}$　$\Rightarrow \angle F'EH'=\angle E'HG'$

$\Rightarrow HE'FG'$ 與 $EH'GF'$ 爲全等形 $\Rightarrow \overline{EG}=\overline{HF}$

Θ $\overleftrightarrow{HE'}\perp\overleftrightarrow{EH'}$ 又 $\angle GEH'=\angle FHE'$　$\therefore \overline{EG}\perp\overline{FH}$



(II)

(1)$\because \Delta AEH' \sim \Delta APS \quad \therefore \angle AH'E = \angle ASP$

又 $\Delta DH'G \sim \Delta DSR \quad \therefore \angle DH'G = \angle DSR$

$\Rightarrow \angle EH'G + \angle PSR = (\angle AH'E + \angle AH'D + \angle DH'G) + \angle PSR$

$= \angle ASP + 90° + \angle DSR + \angle PSR = 90° + (\angle ASP + \angle DSR + \angle PSR) = 90° + 180° = 270°$

$\therefore \angle F'EH' + \angle SPQ = 90°$

(2)令 $\angle SPM = \theta$ ，$\overline{SP} = c$ ，則 $\angle F'EG = \dfrac{\pi}{4} - \theta$ ，$\overline{EF'} = \sqrt{2} \cdot \overline{SP} = \sqrt{2}c$

$$\Rightarrow \overline{EG} = \overline{EF'} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \theta) \cdot 2 = 2\sqrt{2}c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta) = 2c\left(\frac{a}{2c} + \frac{b}{2c}\right) = a + b$$

(3)$\therefore$ $EFGH$ 的面積$= \dfrac{1}{2}(a+b)^2$ ，$ABCD$ 面積$= ab$

四邊形 $EFGH$ 的面積＝四邊形 $ABCD$ 面積的$\dfrac{(a+b)^2}{2ab}$倍。

【定理 4】四邊形 $ABCD$、$CEQP$、$DEFG$、$AGNM$ 皆為正方形， T、V 分別是 $ABCD$ 與 $DEFG$ 的中心點，S 、U 分別是 $\overline{AG}$ 、$\overline{CE}$ 的中點。若分別以 $\overline{BM}$ 、$\overline{BP}$ 、$\overline{FQ}$ 、$\overline{FN}$ 為邊向外作四個正方形， O_1、O_2、O_3、O_4 分別是這四個正方形的中心點，若分別以 $\overline{O_1O_2}$ 、$\overline{O_2O_3}$ 、$\overline{O_3O_4}$ 、$\overline{O_4O_1}$ 為邊向外作四個正方形，O_5 、O_6 、O_7 、O_8 分別是這些正方形的中心點，而 H 、 J 、

R 、 I 分別為$\overline{O_1O_2}$ 、$\overline{O_2O_3}$ 、$\overline{O_3O_4}$ 、$\overline{O_4O_1}$的中點，試證：四邊形$O_5O_6O_7O_8$的面積=(正方形$STUV$ 面積)$\times 25$ 。

【證明】

(1)由引理 7 可知：四邊形$O_1O_2O_3O_4$面積＝正方形$STUV$ 面積的 12 倍。

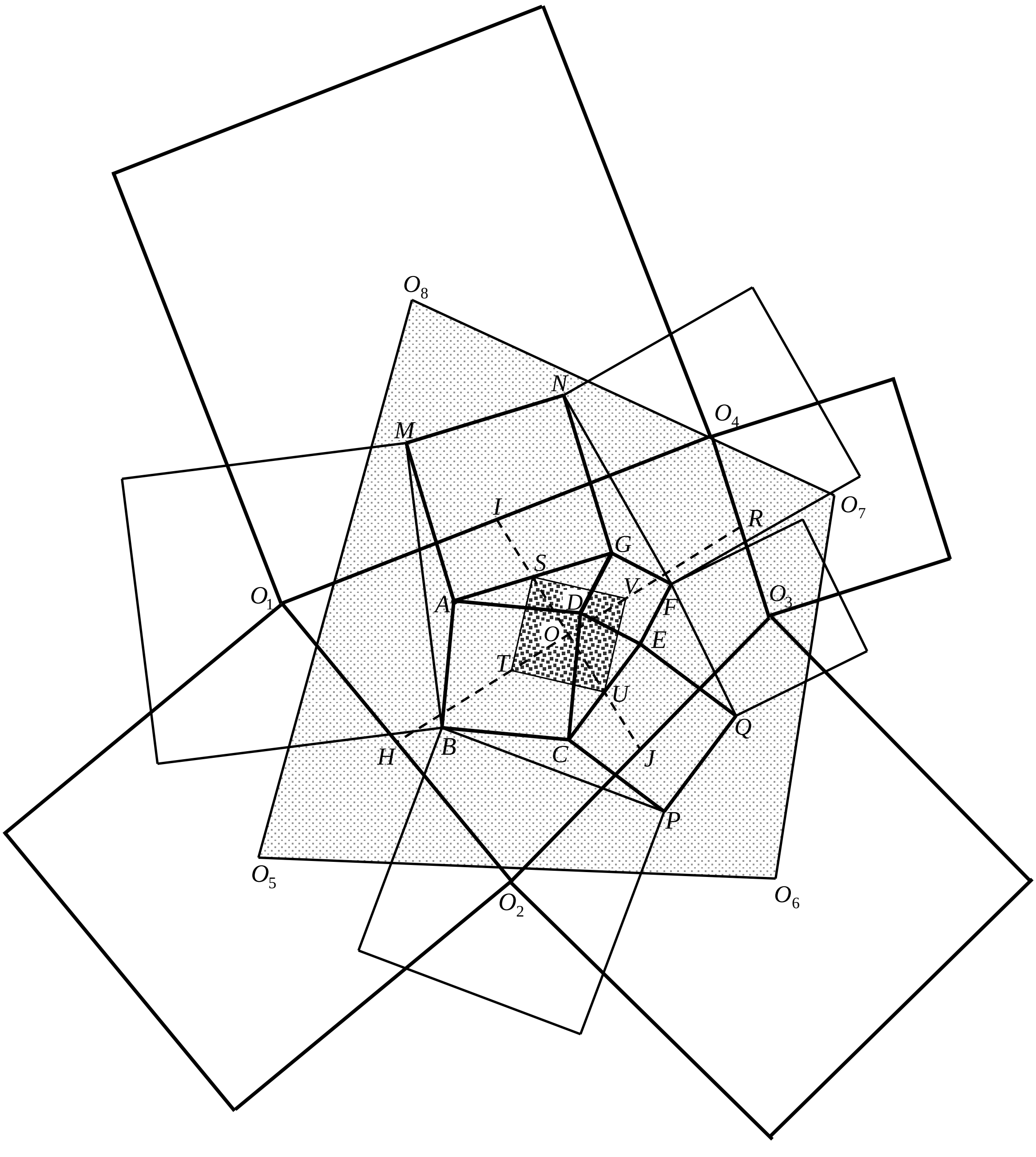
(2)連$\overline{IJ}$ 、 $\overline{HR}$ ，則$\overline{HR}=3\overline{TV}$ ，$\overline{IJ}=2\overline{TV}$ （令$\overline{TV}=r$ ，$\overline{HR}=3r$ ，$\overline{IJ}=2r$ ），$\overline{HR}\perp\overline{TV}$ 。

(3)由引理 8 可知：$O_5O_6O_7O_8$面積＝$O_1O_2O_3O_4$面積的$\dfrac{(3r+2r)^2}{2\cdot 3r\cdot 2r}$倍

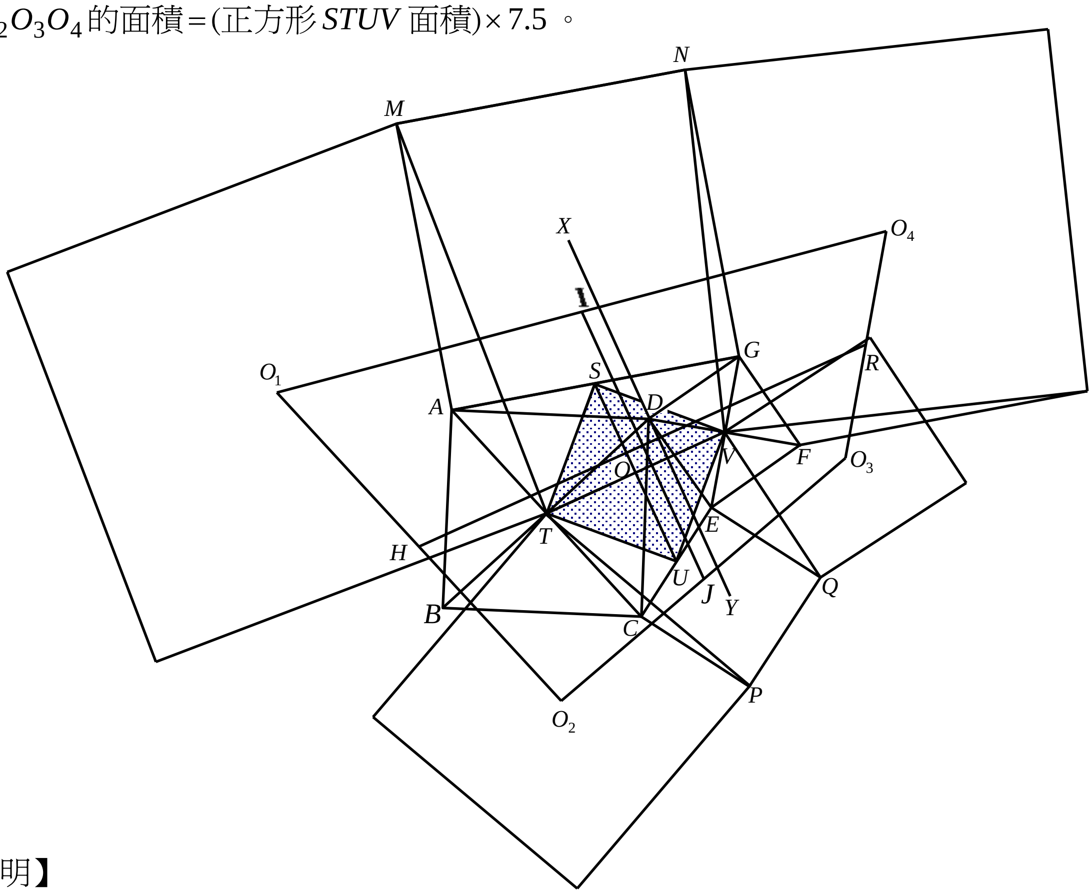
$\Rightarrow$ $O_5O_6O_7O_8$面積＝$O_1O_2O_3O_4$面積的$\dfrac{25}{12}$倍

$\therefore$四邊形$O_5O_6O_7O_8$面積＝正方形$STUV$ 面積的$\dfrac{25}{12}\times 12$倍

故得證：四邊形$O_5O_6O_7O_8$的面積=(正方形$STUV$ 面積)$\times 25$ 。



【引理 9】如下圖，四邊形 $ABCD$、$CEQP$、$DEFG$、$AGNM$ 皆為正方形，T、V 分別是 $ABCD$ 與 $DEFG$ 的中心點，S、U 分別是 $\overline{AG}$、$\overline{CE}$ 的中點。若分別以 $\overline{MT}$、$\overline{TP}$、$\overline{QV}$、$\overline{VN}$ 為邊向外作四個正方形，O_1、O_2、O_3、O_4 分別是這四個正方形的中心點，H、R、I、J 分別是 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_3O_4}$、$\overline{O_1O_4}$、$\overline{O_2O_3}$ 的中點，試證：(I) $\overline{IJ}=1.5\times\overline{SU}$，$\overline{HR}=2.5\times\overline{TV}$；(II)四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積=(正方形 $STUV$ 面積)$\times 7.5$。



【證明】

(I)

(1) 分別取 $\overline{NG}$、$\overline{GF}$、$\overline{DG}$ 的中點 M_1、M_2、M_3，並連 $\overline{M_1O_4}$、$\overline{NM_3}$、$\overline{AM_2}$、$\overline{M_2W}$、$\overline{XM_1}$。

(2) 作正方形 $O_1MO_1'T$，連 $\overline{NO_1'}$、$\overline{O_1'D}$、$\overline{DT}$、$\overline{SM_2}$、$\overline{VM_2}$、$\overline{VM_3}$。

(3) $\Theta\ \Delta NGM_3 \cong \Delta AGM_2 \Rightarrow \overline{AM_2}=\overline{NM_3}$，$\overleftrightarrow{AM_2}\perp\overleftrightarrow{NM_3}$；

$\Theta\ \Delta NVM_3 \cong \Delta WVM_2 \Rightarrow \overline{M_2W}=\overline{NM_3}$，$\overleftrightarrow{M_2W}\perp\overleftrightarrow{NM_3}$

$\Rightarrow \overline{AM_2}=\overline{M_2W}$，又 $\overline{AS}=\overline{SG}$　$\therefore \overline{SM_2}\,//\,\overline{GW}$，$\overline{SM_2}=\frac{1}{2}\times\overline{GW}$。

(4) $\Theta\ \overline{M_1O_4}\,//\,\overline{GW}$，$\overline{M_1O_4}=\frac{1}{2}\times\overline{GW}$　$\therefore \overline{SM_2}\,//\,\overline{M_1O_4}$，$\overline{SM_2}=\overline{M_1O_4}$。

(5) $\Delta M_1GM_3 \cong \Delta SGM_2 \Rightarrow \overline{M_1M_3}=\overline{SM_2}$，$\overleftrightarrow{M_1M_3}\perp\overleftrightarrow{SM_2}$。

(6) 由(4)與(5)$\Rightarrow \overline{M_1O_4}=\overline{M_1M_3}$，$\overleftrightarrow{M_1O_4}\perp\overleftrightarrow{M_1M_3}$。

(7) $\Theta\ \Delta MO_1A \cong \Delta MO_1'N \Rightarrow \overline{O_1A}=\overline{O_1'N}$，$\overleftrightarrow{O_1A}\perp\overleftrightarrow{O_1'N}$

$\Theta\ \Delta O_1TA \cong \Delta O_1'TD \Rightarrow \overline{O_1A}=\overline{O_1'D}$，$\overleftrightarrow{O_1A}\perp\overleftrightarrow{O_1'D}$

$\therefore \overline{NO_1'}=\overline{O_1'D}$，且 N、O_1'、D 三點共線。

(8) 又 M_1、M_3 分別為 $\overline{NG}$、$\overline{DG}$ 的中點　$\therefore \overline{M_1M_3}\,//\,\overline{NO_1'}$，$\overline{M_1M_3}=\overline{NO_1'}$。

(9) 由(6)、(7)與(8)$\Rightarrow \overleftrightarrow{M_1O_4} \perp \overleftrightarrow{NO_1'}$ ，$\overline{M_1O_4} = \overline{NO_1'}$ $\Rightarrow \overline{M_1O_4} = \overline{O_1A}$ ，$\overline{M_1O_4} \,//\, \overline{O_1A}$ 。

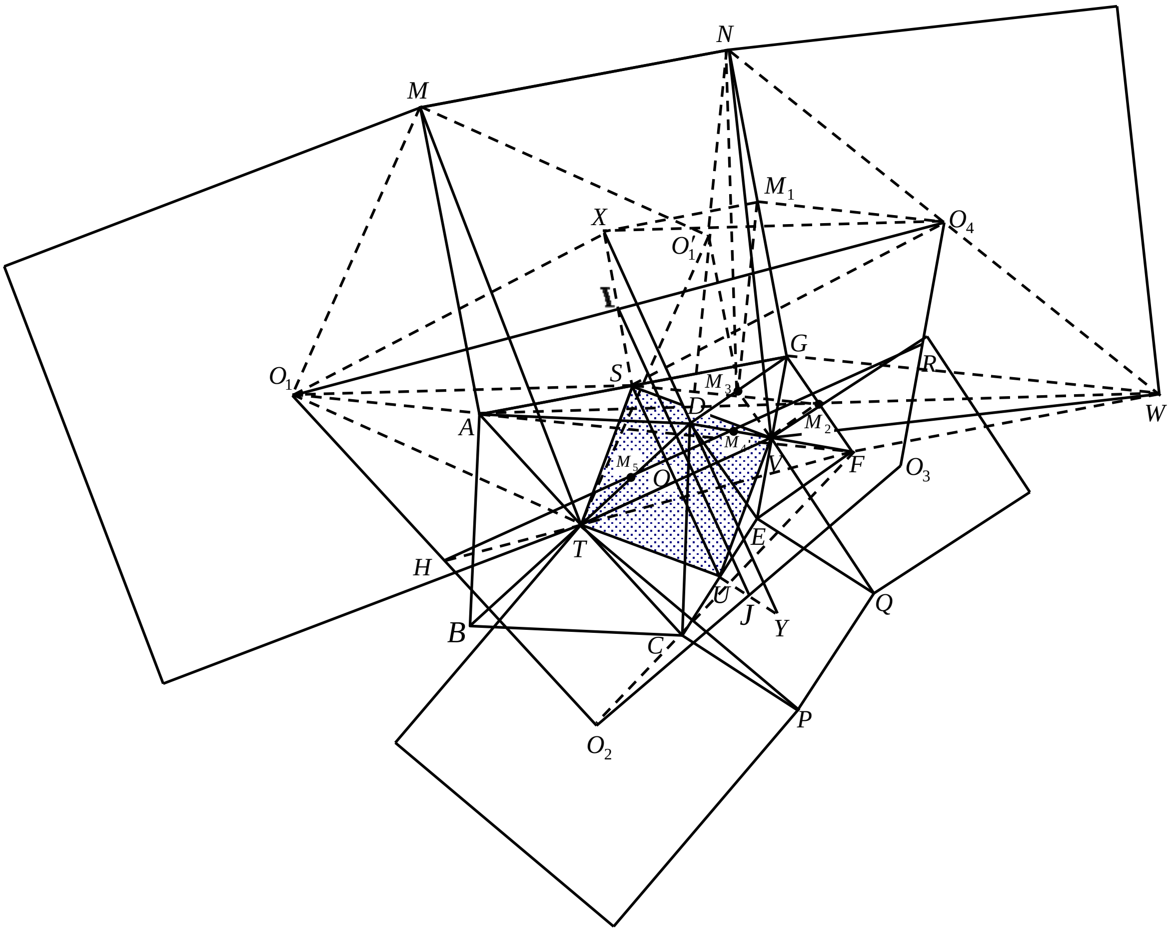
(10) $\because \overline{XM_1} = \overline{AS}$ ，$\overline{XM_1} \,//\, \overline{AS}$ ；$\overline{M_1O_4} = \overline{O_1A}$ ，$\overline{M_1O_4} \,//\, \overline{O_1A}$

$\therefore \Delta O_1AS \cong \Delta O_4M_1X \Rightarrow \overline{XO_4} = \overline{O_1S}$ ，$\overline{XO_4} \,//\, \overline{O_1S}$ 。

(11) 連$\overline{O_1X}$ 、$\overline{O_4S}$ $\therefore XO_1SO_4$爲平行四邊形 $\Rightarrow \overline{XS}$ 通過 I 點。

(12) 同理可證得：$\overline{UY}$ 通過 J 點。

(13) $\because \overline{SU} \,//\, \overline{XY}$ $\therefore \overline{IJ} = \dfrac{1}{2}(\overline{SU} + \overline{XY}) = \dfrac{1}{2}(\overline{SU} + 2\overline{SU}) = 1.5 \times \overline{SU}$ 。



(14) $\because \overline{GM_2} = \overline{M_2F}$ 、$\overline{AM_2} = \overline{M_2W}$ $\therefore AGWF$ 爲平行四邊形$\Rightarrow \overline{GW} = \overline{AF}$ 。

(15) $\because \overline{GW} = 2\overline{M_1O_4} = 2\overline{O_1A}$，$\overline{GW} \,//\, \overline{O_1A}$ $\therefore O_1$ 、A 、F 三點共線，且$\overline{FA} = 2\overline{O_1A}$ 。

(16) 連$\overline{FC}$ 、$\overline{CO_2}$ ，則同理可證得：$\overline{FC} = 2\overline{CO_2}$ 。

(17) 由(15)與(16) $\Rightarrow \overline{FA} : \overline{AO_1} = \overline{FC} : \overline{CO_2} = 2:1 \Rightarrow \overline{AC} \,//\, \overline{O_1O_2}$

$\Rightarrow \overline{FT} : \overline{TH} = 2:1$ 又 $\overline{AT} = \overline{TC}$ $\therefore \overleftrightarrow{FT}$ 通過$\overline{O_1O_2}$ 的中點 H

(18) 分別取$\overline{VD}$ 、$\overline{TD}$ 的中點 M_4 、$M_5 \Rightarrow \overline{FV} : \overline{VM_4} = 2:1 = \overline{FT} : \overline{TH}$

$\therefore \overline{M_4H} = \dfrac{3}{2} \times \overline{TV}$ ，$\overline{M_4H} \,//\, \overline{TV}$ 同理：$\overline{M_5R} = \dfrac{3}{2} \times \overline{TV}$ ，$\overline{M_5R} \,//\, \overline{TV}$

(19) $\because \overline{M_4M_5} = \dfrac{1}{2} \times \overline{TV}$ ，$\overline{M_4M_5} \,//\, \overline{TV}$

$\therefore \overline{HR} // \overline{TV}$ ，且 $\overline{HR} = \overline{M_4H} + \overline{M_5R} - \overline{M_4M_5} = \dfrac{3}{2}\overline{TV} + \dfrac{3}{2}\overline{TV} - \dfrac{1}{2}\overline{TV} = 2.5 \times \overline{TV}$ 。

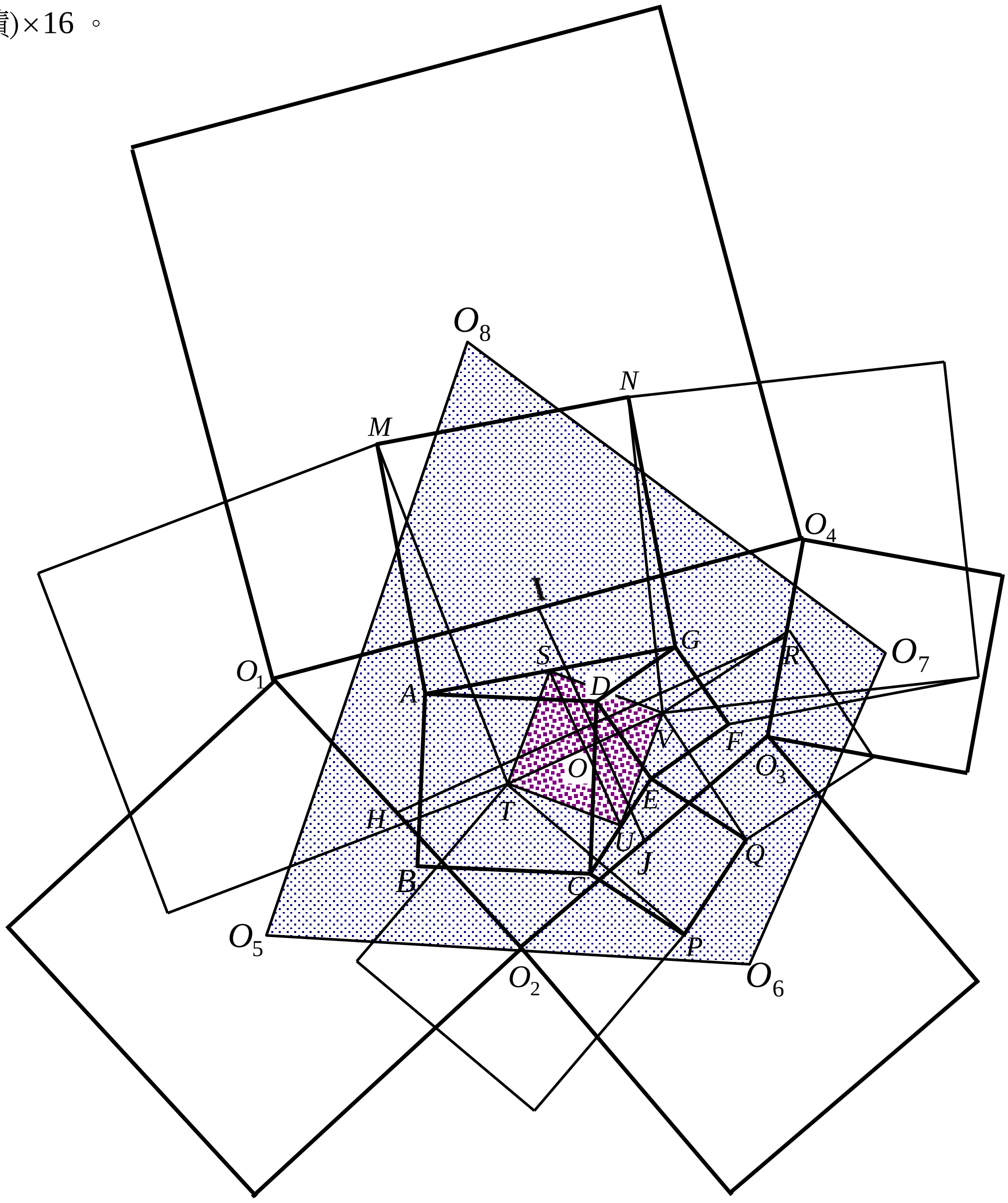
(II)

$\Theta\ \overline{HR} // \overline{TV} \quad \therefore \overline{HR} \perp \overline{IJ}$

$\Rightarrow$ 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 $= \overline{HR} \times \overline{IJ} = (2.5 \times \overline{TV}) \times (1.5 \times \overline{SU})$

$= \dfrac{15}{4} \times \overline{TV}^2 =$ (正方形 $STUV$ 面積) $\times 7.5$ 。

【定理 5】四邊形 $ABCD$、$CEQP$、$DEFG$、$AGNM$ 皆爲正方形， T、V 分別是 $ABCD$ 與 $DEFG$ 的中心點，S 、U 分別是 $\overline{AG}$ 、$\overline{CE}$ 的中點。若分別以 $\overline{MT}$ 、$\overline{TP}$ 、$\overline{QV}$ 、$\overline{VN}$ 爲邊向外作四個正方形，O_1、O_2、O_3、O_4 分別是這四個正方形的中心點，若分別以 $\overline{O_1O_2}$ 、$\overline{O_2O_3}$ 、$\overline{O_3O_4}$ 、$\overline{O_4O_1}$ 爲邊向外作四個正方形，O_5 、O_6 、O_7 、O_8 分別是這些正方形的中心點，而 H 、J 、R 、I 分別爲 $\overline{O_1O_2}$ 、$\overline{O_2O_3}$ 、$\overline{O_3O_4}$ 、$\overline{O_4O_1}$ 的中點，試證：四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 的面積=(正方形 $STUV$ 面積)×16 。



【證明】

(1)由引理 9 可知：四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 = 正方形 $STUV$ 面積的 7.5 倍。

(2)連 $\overline{IJ}$ 、$\overline{HR}$，則 $\overline{HR} = 2.5 \times \overline{TV}$ ，$\overline{IJ} = 1.5 \times \overline{TV}$（令 $\overline{TV} = r$ ，$\overline{HR} = 3.5r$ ，$\overline{IJ} = 1.5r$ ），$\overline{HR} \perp \overline{IJ}$ 。

(3)由引理 8 知：$O_5O_6O_7O_8$ 面積 = $O_1O_2O_3O_4$ 面積的 $\dfrac{(2.5r+1.5r)^2}{2\cdot(2.5r)\cdot(1.5r)}$ 倍

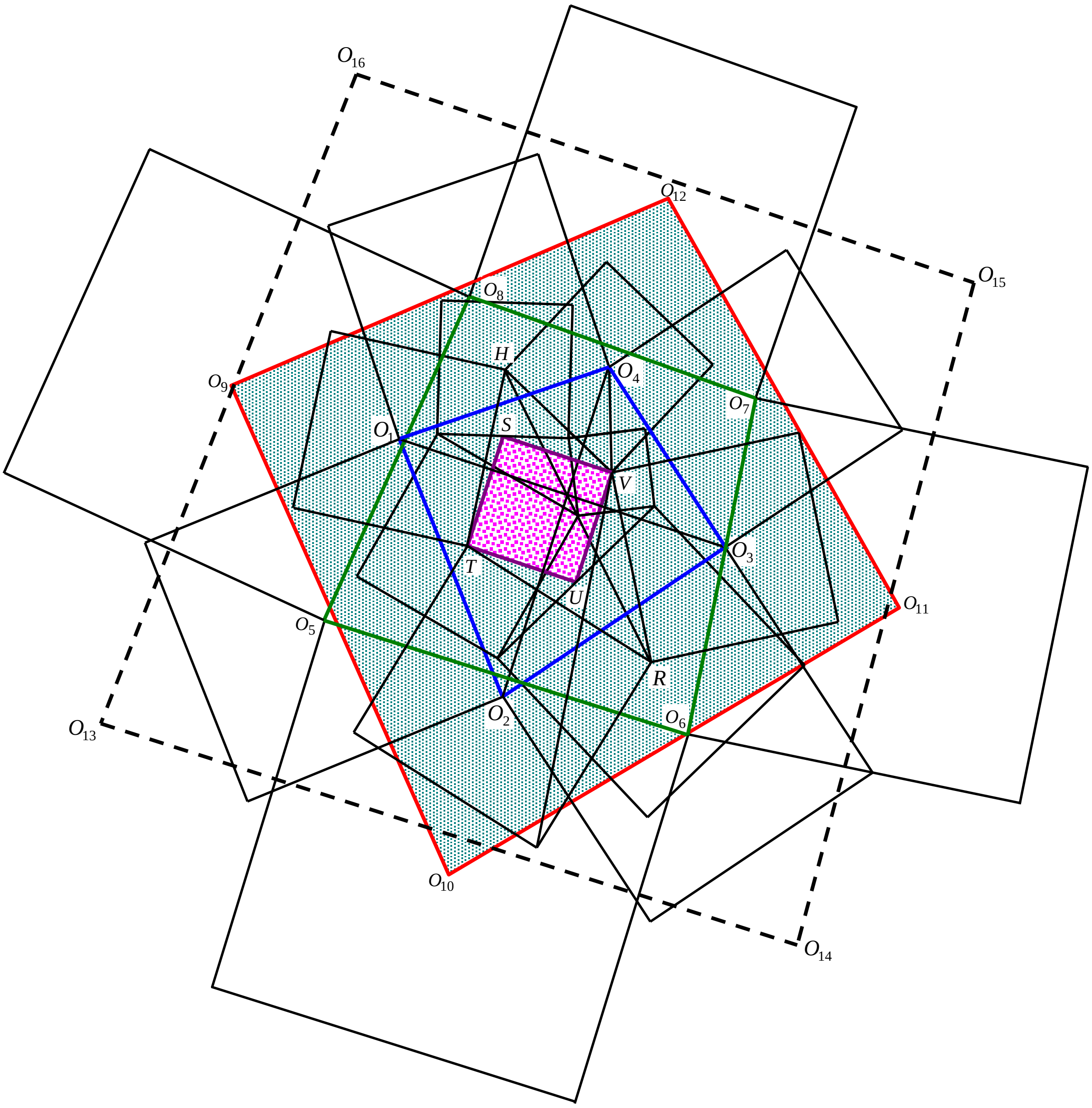
$\Rightarrow$ $O_5O_6O_7O_8$ 面積 = $O_1O_2O_3O_4$ 面積的 $\dfrac{32}{15}$ 倍

$\therefore$ 四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 = 正方形 $STUV$ 面積的 $\dfrac{32}{15}\times\dfrac{15}{2}$ 倍

故得證：四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 的面積 = (正方形 $STUV$ 面積) $\times 16$ 。

伍、研究結論：

【 「以管窺天，以蠡測海」之(一) 】



若 H、T、R、V；O_1、O_2、O_3、O_4；O_5、O_6、O_7、O_8；O_9、O_{10}、O_{11}、O_{12}；……；O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}；……皆各表上圖中正方形的中心點，四邊形 $STUV$ 爲正方形，且令 $STUV$ 的面積爲 1，四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 = Γ_n，則：

(1) $\Gamma_1=$ 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $=1\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$（第 1 層）；

(2) $\Gamma_2=$ 四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 $=\frac{9}{2}\times 2=9$（第 2 層）；

(3) $\Gamma_3=$ 四邊形 $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$ 面積 $=9\times 2=18$（第 3 層）；

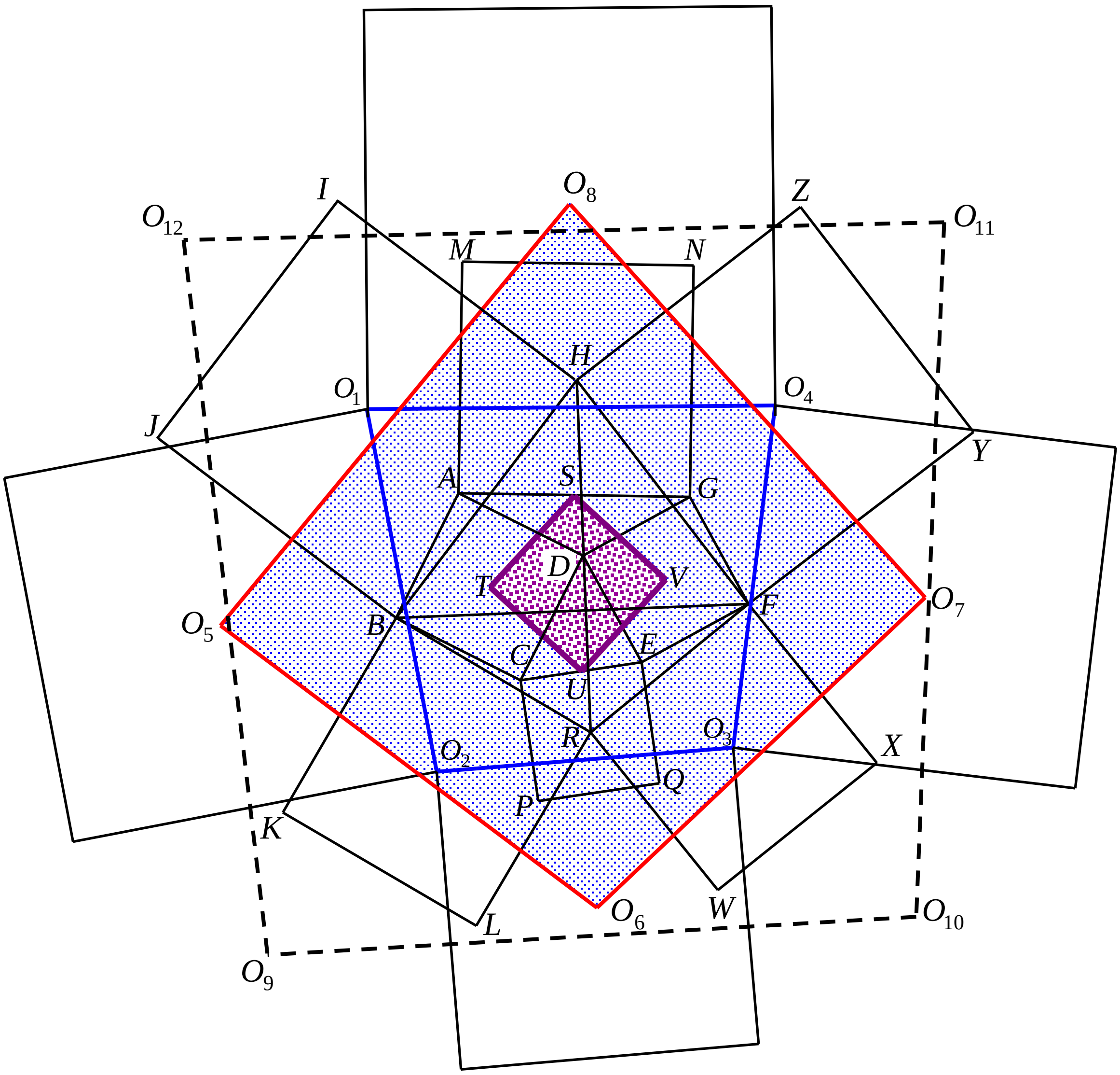
……………………………………………………………………

$(n)\Gamma_n=$ 四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $=9\times 2^{n-2}$（第 n 層）；

……………………………………………………………………

【說明】綜合定理 1、引理 5、定理 2，即可證得。

【「以管窺天，以蠡測海」之(二)】



若 H、T、R、V；O_1、O_2、O_3、O_4；O_5、O_6、O_7、O_8；……；O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}；……皆各表上圖中正方形的中心點，四邊形 $STUV$ 爲正方形，且令 $STUV$ 的面積爲 1，則：

(1)四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $=1\times4=4$（第 1 層）；

(2)四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 $=4\times2=8$（第 2 層）；

(3)四邊形 $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$ 面積 $=8\times2=16$（第 3 層）；

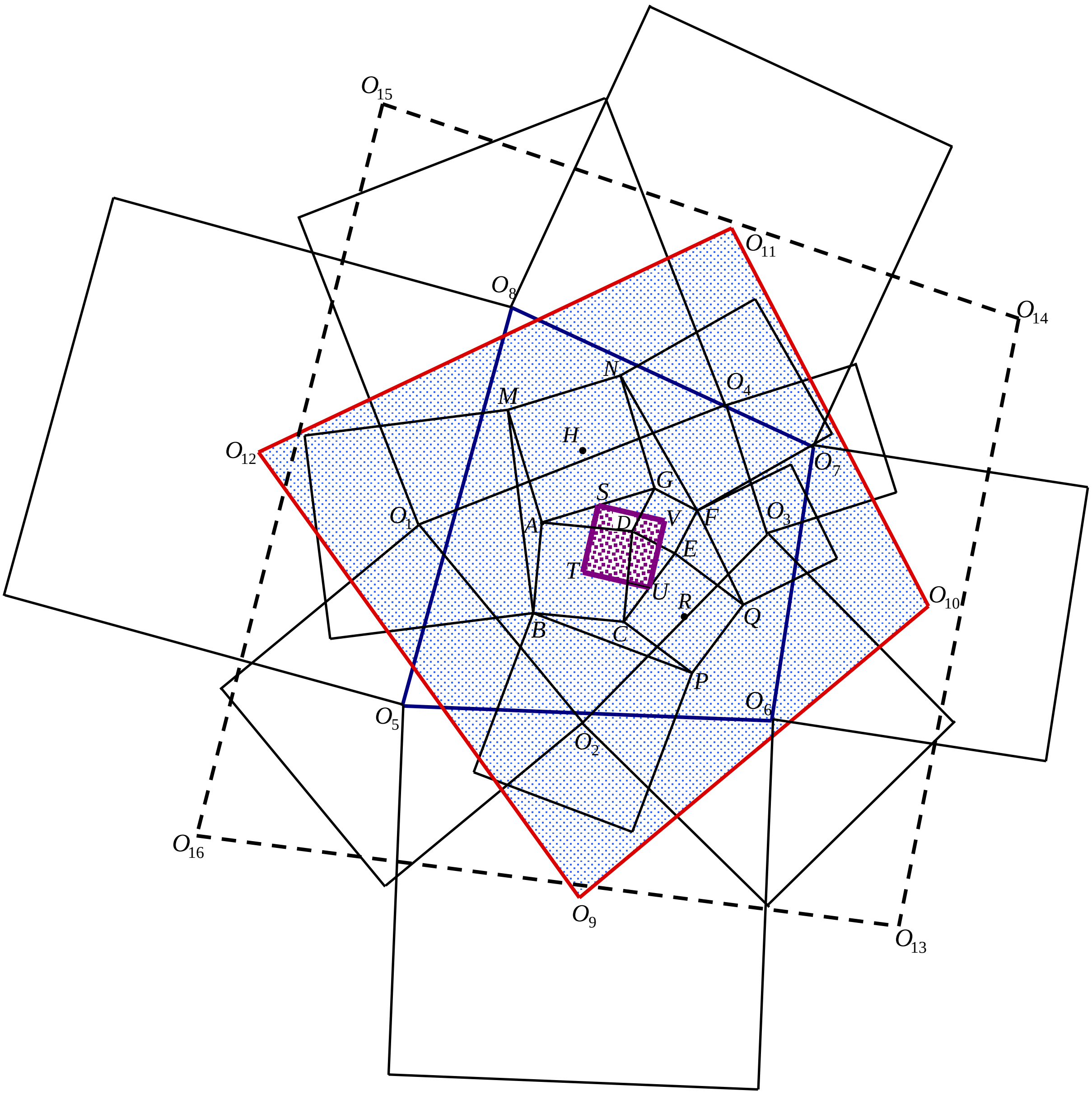
………………………………………………………………

(n)四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $=2^{n+1}$（第 n 層）；

………………………………………………………………

【說明】綜合引理 6、定理 3 與引理 5，即可證得。

【 「以管窺天，以蠡測海」之(三) 】



若 H、T、R、V；O_1、O_2、O_3、O_4；O_5、O_6、O_7、O_8；O_9、O_{10}、O_{11}、O_{12}；……；O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}；……皆各表上頁圖中正方形的中心點，四邊形 $STUV$ 爲正方形，

且令 $STUV$ 的面積爲 1，四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $=\Omega_n$，則：

(1) $\Omega_1=$ 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $=1\times 12=12$（第 1 層）；

(2) $\Omega_2=$ 四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 $=12\times\dfrac{25}{12}=25$（第 2 層）；

(3) $\Omega_3=$ 四邊形 $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$ 面積 $=25\times 2=50$（第 3 層）；

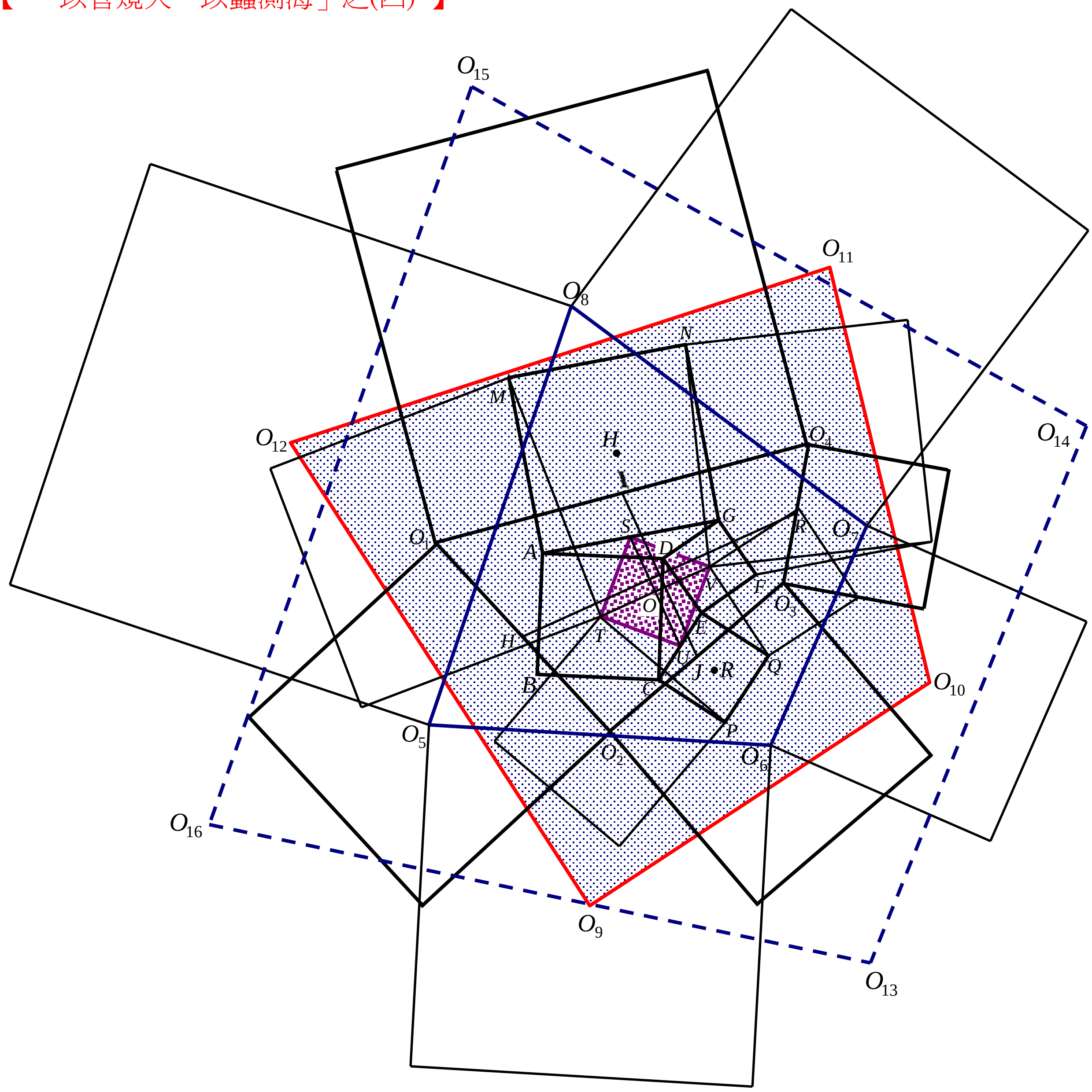
…………………………………………………………………………

(n) $\Omega_n=$ 四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $=25\times 2^{n-2}$（第 n 層，$n\ge 2$）；

…………………………………………………………………………

【說明】綜合引理 7、引理 8、定理 4 與引理 5，即可證得。

【 「以管窺天，以蠡測海」之(四) 】



若 H、T、R、V；O_1、O_2、O_3、O_4；O_5、O_6、O_7、O_8；O_9、O_{10}、O_{11}、O_{12}；……；

O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}；……皆各表上頁圖中正方形的中心點，四邊形 $STUV$ 爲正方形，且令 $STUV$ 的面積爲 1，四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $=\Psi_n$，則：

(1) $\Psi_1=$ 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積 $=1\times 7.5=7.5$（第 1 層）；

(2) $\Psi_2=$ 四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 $=7.5\times\frac{32}{15}=16$（第 2 層）；

(3) $\Psi_3=$ 四邊形 $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$ 面積 $=16\times 2=32$（第 3 層）；

……………………………………………………………………………

$(n)\ \Psi_n=$ 四邊形 $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $=16\times 2^{n-2}$（第 n 層，$n\geq 2$）；

……………………………………………………………………………

【說明】綜合引理 9、定理 5 與引理 5，即可證得。

【 「以管窺天，以蠡測海」之(五) 】

對於任一個「傑克結構」(Jack Structure) 而言，假設其「基準正方形」(Reference Square) 的面積爲 1，若 n 爲正整數，且定義 Γ_n、Ω_n、Ψ_n 分別如本段結論之(一)、(三)、(四)，由於 $\Gamma_1=4.5$，$\Gamma_n=9\times 2^{n-2}$（$n\in N$）；$\Psi_1=7.5$，$\Psi_n=16\times 2^{n-2}$（$n\geq 2$，$n\in N$）；$\Omega_1=12$，$\Omega_n=25\times 2^{n-2}$（$n\geq 2$，$n\in N$），故 Γ_n、Ψ_n、Ω_n 三者具有以下關係（如下頁附表）：

$$\Gamma_n+\Psi_n=\Omega_n\quad \forall\, n\in N$$

陸、心得感想：

無論生活上或學習經驗裡，正方形是很常見的幾何圖形，這次的研究成果，也讓自己更加了解正方形的性質。

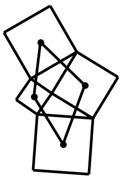
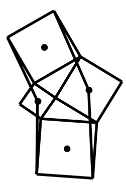
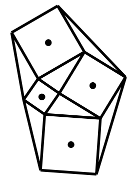
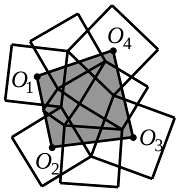
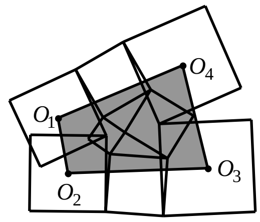
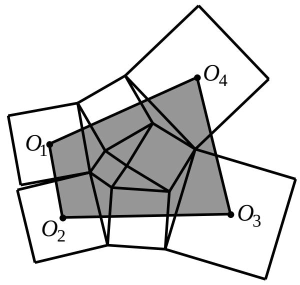
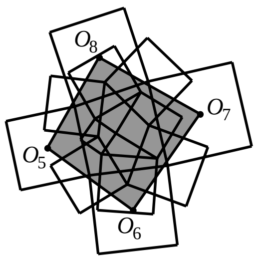
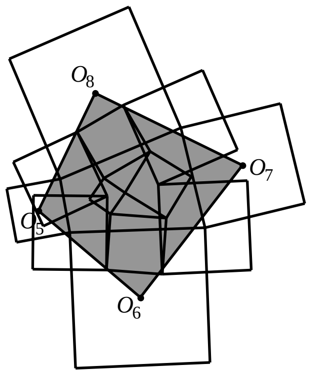
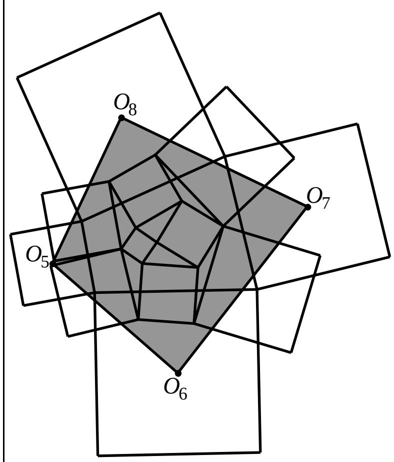
研究過程中，我們曾爲幾個複雜的幾何圖形，因爲理不清證明思緒而感到挫折，但感謝數學老師一再鼓勵、指導，讓我們堅持一定要找出命題的解答才肯罷手。

我們期待討論得出的面積關係能具有實質的參考價值，我們也相信相關主題還有很大的探討空間，也期許將來有機會做進一步研究，以發現更奧妙的正方形世界。

柒、參考資料：

一、台北市九十一年度資賦優異教育方案數學競賽－－隊際賽問題第參題。
二、嚴鎮軍主編《初中數學競賽教程》；台北市；九章出版社；民 88.11。

附表：正方形「心手相連」時，Γ_n 、 Ψ_n 、 Ω_n 三者的關係：

(1)「傑克」的「心」或「手」間相連的其中三種情況。	 「心」與「心」相連	 「手」與「心」相連	 「手」與「手」相連
(2)令「基準正方形」的面積爲 1，以(1)所連成的四線段爲邊，分別向外作正方形，並將它們的「心」依序連成四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 。	 令 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 $=\Gamma_1$ 推得：$\Gamma_1=4.5$	 令 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 $=\Psi_1$ 推得：$\Psi_1=7.5$	 令 $O_1O_2O_3O_4$ 面積 $=\Omega_1$ 推得：$\Omega_1=12$
(3)分別以(2)之 $O_1O_2O_3O_4$ 的四個邊爲邊，向外作正方形，並將這四個正方形的「心」依序連成四邊形 $O_5O_6O_7O_8$ 。	 令 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 $=\Gamma_2$ 推得：$\Gamma_2=9$	 令 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 $=\Psi_2$ 推得：$\Psi_2=16$	 令 $O_5O_6O_7O_8$ 面積 $=\Omega_2$ 推得：$\Omega_2=25$
…	…	…	…
第 n 層（ $n\ge 2$ ）	$O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $=\Gamma_n=9\times 2^{n-2}$	$O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $=\Psi_n=9\times 2^{n-2}$	$O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$ 面積 $=\Omega_n=25\times 2^{n-2}$
Γ_n 、Ψ_n 、Ω_n 三個值的關係式，n 爲任意自然數。	$\Gamma_n+\Psi_n=\Omega_n\quad \forall\, n\in N$		

030425

;