

利用因次分析法研究圓形水躍的變因

摘要

流量 Q 的液柱由高度 H 處流下，撞到水平板時，輻射狀的向外散開，在半徑 R 處突然跳躍成一水牆，稱為圓形水躍。

我們假設影響圓形水躍的變因有 (1) 流量 (2) 高度 (3) 重力加速度 g (4) 黏滯係數 μ ， $R = kQ^a H^b g^c \mu^d$ ，先用因次分析法找出 a ， b ， c ，和 d 的關係，再用控制變因法實驗，由 $\log R$ 對 $\log Q$ 圖， $\log R$ 對 $\log H$ 圖，及 $\log R$ 對 $\log \mu$ 圖得到 a ， b ， c ，和 d 。實驗的結果和近年來期刊上所發表用繁雜數學得到的公式甚為接近。

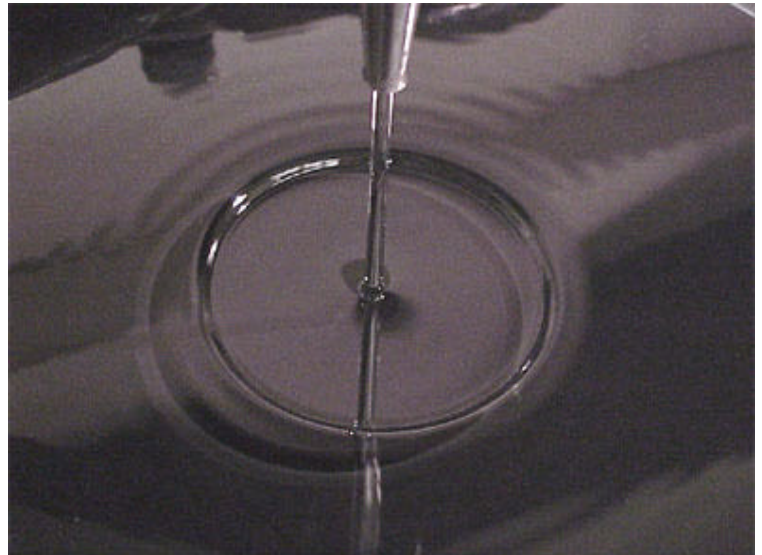
水和酒精的溫度改變時黏滯係數變化很大，甘油水溶液的濃度變化使黏滯係數的變化更大，用以探討黏滯係數對圓形水躍半徑的影響，效果很好。

一、研究動機：

水龍頭流下的水柱撞到平台時，散開成一圓形薄層，經半徑 R 後水的高度突然上升，形成圓形水躍(circular hydraulic jump)現象，引起我們實驗研究影響此圓形水躍半徑變因的興趣。

二、研究目的：

1. 利用攝影機拍攝圓形水躍，研究波速和流速關係。
2. 因次分析圓形水躍半徑和流量、液柱落下高度、重力加速度、黏滯係數間的關係。
3. 實驗探討流量、液柱落下高度、黏滯係數對圓形水躍半徑的影響。



圖一：圓形水躍

三、原理：

1. 水柱由水龍頭流下，撞到水平薄板時，輻射狀散開，形成一薄層的淺水區，產生以重力為恢復力的重力波(gravity wave)，其波速

$$v = \sqrt{gh} \dots \textcircled{1} \quad g: \text{重力加速度, } h: \text{水深}$$

由於薄層水深甚淺，所以波速很慢；水流的流速大於波速，此狀況稱為水流在臨界點以上(supercritical)。

2. 水流散開時，由連續方程式知流速漸慢，再加上黏滯作用，在半徑 R 時流速小於波速，此狀況稱為水流在臨界點以下(subcritical)。水流在臨界點以上渡過到臨界點以下時，形成水躍現象。
3. 我們假設圓形水躍半徑的變因有流量(Q)、液柱落下高度(H)、重力加速度(g)、黏滯係數(ν)； $R = kQ^a H^b g^c \nu^d \dots \textcircled{2}$

$$\text{因次分析： } L = \left(\frac{L^3}{T}\right)^a L^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^g \left(\frac{L^2}{T}\right)^d$$

$$\Rightarrow 3a + b + g + 2d = 1 \dots \textcircled{3}$$

$$-a - 2g - d = 0 \dots \textcircled{4}$$

$$4. \text{雷諾數(Reynolds number) } Nr = \frac{2rvr}{n} \dots \textcircled{5}$$

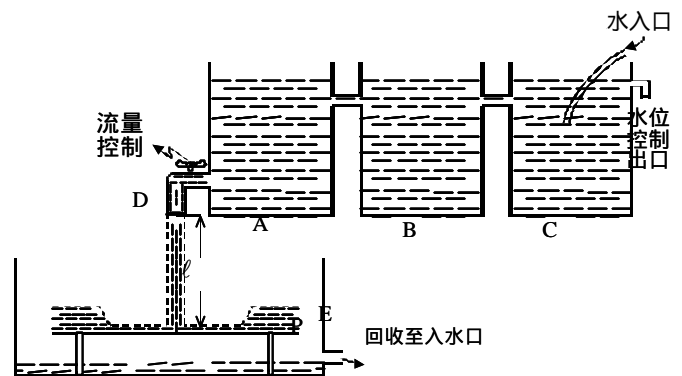
液柱由半徑 r_0 的水龍頭流出時，在 t 秒內流入燒杯內體積 V ，流速 v_0 ，流量

$$Q = \frac{V}{t} = \pi r_0^2 v_0, \text{ 在出口下方 } H \text{ 處液柱半徑 } r, \text{ 流速 } v, \text{ 由 } Q = \pi r^2 v \text{ 及 } v^2 = v_0^2 + 2gH \text{ 可}$$

求得 v, r ，代入黏滯係數及密度 ρ 可得雷諾數。

四、器材：

1. 為了液柱穩定的由 D 流出，三個不銹鋼焊接的容器 A、B、C 長寬高為 20cm × 30cm × 20cm，用塑膠管連成圖二所示，B 為「沉靜槽」，D 可改變流量。
2. 水平板 P 附有升降台，可調整液柱落下高度。
3. 回收桶中置一沉水馬達，可將液體經塑膠管送至入水口，循環使用。



圖二：實驗裝置

五、實驗：

(實驗一)

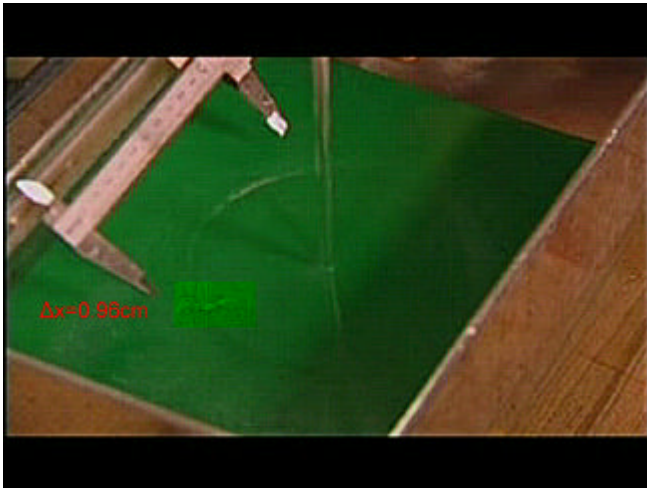
1. 目的：利用攝影機拍攝圓形水躍，直接量出半徑以內及半徑以外的流速。
2. 過程：在容器中放入碎紙片，用攝影機拍攝圓形水躍後，單格放映並擷取所要的照片，直接量取紙片半徑 R 內外的漂移速度（等於流速）。
3. 結果討論：

(1) 流量 $Q = 51.2 \text{ cm}^3/\text{s}$ ， $H = 19.6 \text{ cm}$ ， $r = 0.265 \text{ cm}$ ， $v_1 = 232 \text{ cm/s}$ ，撞到平台時瞬時速

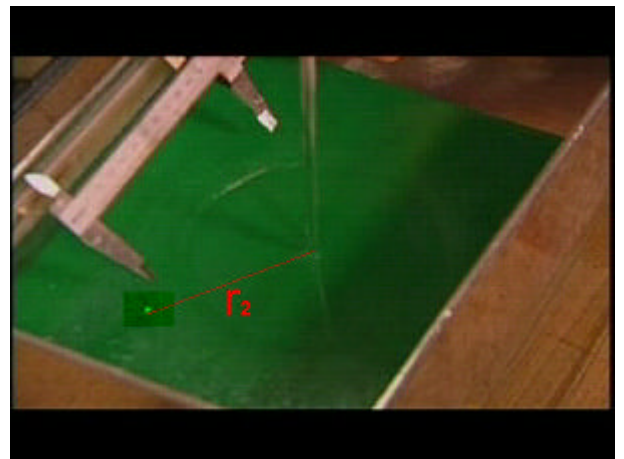
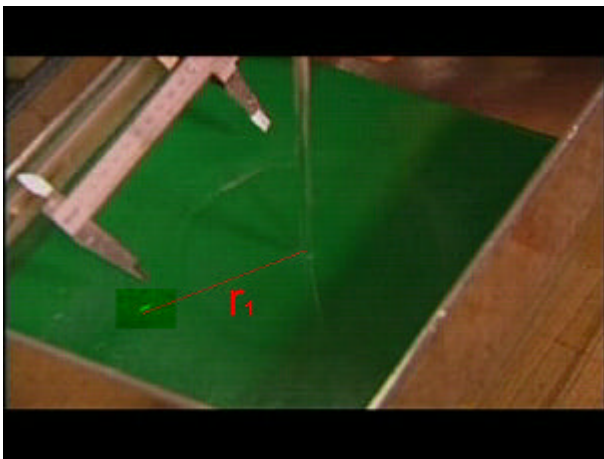
度 303.7cm/s，形成圓形水躍半徑 $R=6.075\text{cm}$ ， R 外圍的水位高度 $h=0.264\text{cm}$ ，外圍的重力波波速 $v=\sqrt{gh}=16.1\text{cm/s}$ 。

(2) 攝影機每秒拍攝 30 張，單張放映時，每張的時距 $t=1/30$ 秒。

(3) 圖三 (a) 的碎片在半徑以內，碎片移動速度 29cm/s ，大於波速 (16.1cm/s)，因“視覺暫留現象”出現模糊的痕跡。圖三 (b) 碎片移動速度= 15.6cm/s ，小於波速。



圖三(a)
碎片,在臨界點以內,1/30 秒移動
0.96cm,顯示出水的流速 29cm/s.



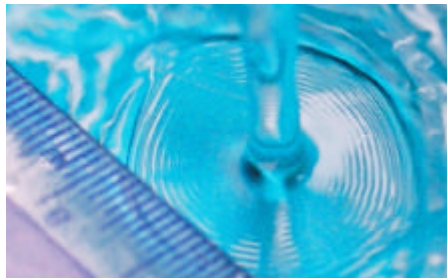
圖三(b)碎片,在臨界點以外,1/30 秒移動 $r_2-r_1=0.52\text{cm}$ ，水的流速 15.6cm/s 。

(實驗二)

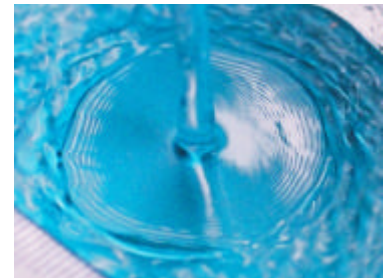
- 1.目的：探討表面張力對圓形水躍影響的範圍。
- 2.過程：水的流量 $20.4\text{cm}^3/\text{s}$ ，水柱高度 $h=0.9\text{cm}$ 時，在半徑 R =內部出現很顯著的表面張力波，表面張力的作用十分顯著，利用相機拍攝，可直接量出波長。
- 3.結果：
 - (1) 圖四- 1 所示， $h=0.9\text{cm}$ ，水柱半徑= 0.44cm ，水打中平台之流速= 33.5cm/s ，表面張力波的波長= 0.363cm 。 $v = \sqrt{\frac{2pg}{rl}}$ ，水的表面張力(25°C)= 72dy/cm ，水的密度= 1g/cm^3 ，得到表面張力波的波速 $v=32.5\text{cm/s}$ ，雷諾數= 2689 。
 - (2) 圖四- 2， $h=2.17\text{cm}$ ，水打中平台之流速= 76.6cm/s ，表面張力波的波長= 0.16cm 。
 - (3) 圖四- 3， $h=4.29\text{cm}$ ，水打中平台之流速= 98.3cm/s ，雷諾數= 4608 ，表面張力波的波長= 0.12cm ，而且，只有在圓形邊緣處才有表面張力波，再加大水柱高度至 $h=10\text{cm}$ ，已看不到表面張力波；以下我們進行的實驗，水柱落下高度超過 35.2cm ，所以不考慮表面張力的作用。



圖四-1



圖四-2



圖四-3

(實驗三)

1. 目的：研究水柱落下高度對水躍半徑的影響。
2. 過程：控制流量固定，改變出水口至平台的距離(H)，測量水躍半徑 R 。
3. 結果：

表一：水柱落下高度對水躍半徑的影響

出水口半徑 0.14cm ， $Q=14.6\text{cm}^3/\text{s}$ ， $t=20^\circ\text{C}$

次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H(cm)	5.90	17.5	25.5	35.2	38.6	42.0	45.0	50.0	55.0	60.0
R(cm)	2.15 ± 0.02	2.55 ± 0.03	3.09 ± 0.03	3.16 ± 0.01	2.80 ± 0.02	2.76 ± 0.02	2.73 ± 0.02	2.68 ± 0.02	2.64 ± 0.02	2.60 ± 0.02
v(cm/s)	260.4	300.9	325.9	353.9	363.2	372.3	380.1	392.8	405.0	416.9
Nr	6751	6909	7208	7512	7610	7705	7785	7914	8036	8153

- (1) 表一所示, R 先隨著 H 之增大而增大, 至一極大值後再減少。在雷諾數(Nr)7512 之前, 平台上的薄層水的深度太大, 不是我們要研究的部分, 我們所要研究的薄層水深遠小於外圍, 雷諾數大於 7512, 小於 8153。
- (2) 取 $H \geq 35.2$ 公分的 $\log R$ 為縱軸, $\log H$ 為橫軸, 其斜率 = $-0.168 \Rightarrow R \sim H^{-0.168}$ 。

(實驗四)

1. 目的：研究流量對水躍半徑的影響。
2. 過程：控制高度固定, 改變流量大小, 測量圓形水躍半徑。
3. 結果：

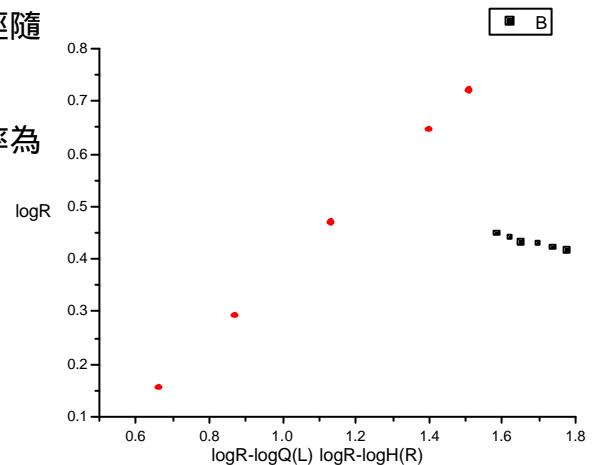
表二：流量對圓形水躍半徑的影響

$H=38.6 \text{ cm}$, $t=25^\circ\text{C}$

次數	1	2	3	4	5	6
Q(cm ³ /s)	4.61	7.40	13.6	25.1	32.5	43.7
R(cm)	1.43±0.03	1.96±0.02	2.95±0.02	4.43±0.02	5.27±0.02	6.42±0.02
logQ	0.664	0.869	1.134	1.399	1.511	1.640
logR	0.155	0.292	0.470	0.646	0.722	0.807

- (1) 表二所示在一定高度下, 圓形水躍的半徑隨著流量增大而增大。

- (2) 將 $\log R$ 為縱軸 $\log Q$ 為橫軸, 其圖形斜率為 $0.668 \Rightarrow R \sim Q^{0.668}$



圖五：水的 $\log R$ 對 $\log Q$ 及 $\log R$ 對 $\log H$ 圖

(實驗五)

1. 目的：利用液體的溫度改變以改變黏滯係數, 研究黏滯係數對圓形水躍半徑的影響。
2. 過程：
 - (1) 水中加入碎冰至水溫降至 0°C , 控制相同流量及高度, 量圓形水躍半徑 R。

- (2) 用電湯匙加熱以改變溫度，至 80°C 左右為止，分別量不同溫度下的 R。
- (3) 改用酒精，但將瓶裝酒精先至放於放有冷劑(水+鹽)的水中，水浴間接冷卻酒精，倒入容器中，控制 Q 及 H，量 R。逐漸用電湯匙加熱至 60°C 左右，分別量不同溫度下的 R。

3. 結果：

表三之一.水的溫度(黏滯係數)對 R 之影響

Q=14.6 cm³/s , H=38.6 cm

次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
水溫(°C)	0	7	17	27	37	47	57	67	77
n(×10 ⁻² cm ² /s)	1.7921	1.4284	1.0828	0.8547	0.6947	0.5782	0.4907	0.4233	0.3702
R(cm)	2.33	2.51	2.75	2.98	3.19	3.40	3.59	3.77	3.94

表三之二.酒精的溫度(黏滯係數)對 R 之影響

Q=14.6 cm³/s , H=38.6 cm

次數	1	2	3	4	5	6
水溫(°C)	5	15	25	35	45	55
n(×10 ⁻² cm ² /s)	1.623	1.332	1.096	0.914	0.764	0.644
R(cm)	2.41	2.57	2.75	2.92	3.09	3.28

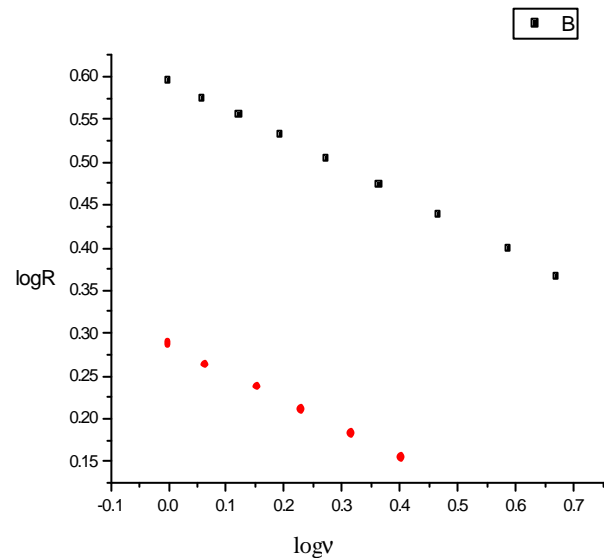
- (1) 表三之一為水的溫度、黏滯係數

(由 Lange's handbook of chemistry 查得)及 R 的關係。

- (2) 表三之二為酒精的溫度、黏滯係數、圓形水躍半徑的關係。

- (3) 圖六為水及酒精之 logR 對 logn 關係，水的斜率 n = -0.338 酒精 n = -0.342 ⇒ R ~ n^{-0.338} 及 R ~ n^{-0.342}。

- (4) 圖六 (以及後面的圖七) logn 的 值取對數，77 的水 = 0.3702cp 當作 1，其他溫度的 值除以 0.3702 後再取對數。酒精則以 55 的 = 0.644cp 當作 1，其他溫度的 值除以 0.644 後再取對數。



圖六：水(■)及酒精(●)之 logR 對 logv

(實驗六)

1. 目的：利用甘油水溶液的黏滯係數隨著濃度的變化，研究黏滯係數對圓形水躍半徑的影響。

2. 過程：

(1) 容器 A 放入 5000 毫升的水，流量 Q 、高度 H ，測量水躍的半徑 R 。

(2) 取掉 200 毫升的水，再加入 200 毫升的甘油，保持容器的體積一定，流量較容易控制一定，測量流量 Q 、高度 H 及半徑 R 。

(3) 取掉 200 毫升的甘油水溶液，再加入 200 毫升的甘油，重作上述實驗。

3. 結果：

表四. 甘油水溶液的濃度、黏滯係數、水躍半徑

$Q = 14.6 \text{ cm}^3/\text{s}$, $H = 38.6 \text{ cm}$, $t = 25^\circ\text{C}$, $r = 0.14 \text{ cm}$, 濃度單位% , 單位 ; cp

次數	1	2	3	4	5	6	7	8
濃度	0	4.95	9.61	14.0	18.1	22.1	25.8	29.3
	0.893	1.009	1.141	1.292	1.457	1.650	1.858	2.108
R(cm)	2.87	2.73	2.66	2.62	2.58	2.54	2.48	2.43
次數	9	10	11	12	13	14	15	16
濃度	32.6	35.6	38.7	41.5	44.1	46.7	49.1	51.4
	2.371	2.664	3.016	3.398	3.805	4.306	4.812	5.441
R(cm)	2.35	2.29	2.20	1.90	1.80	1.64	1.54	1.46
次數	17	18	19	20	21	22	23	24
濃度	53.5	55.6	57.6	59.4	61.2	62.9	64.5	66.1
	6.070	6.811	7.656	8.516	9.564	10.76	11.97	13.32
R(cm)	1.43	1.39	1.32	1.29	1.25	1.15	1.09	1.00
次數	25	26	27	28	29	30	31	32
濃度	67.5	68.9	70.3	71.6	72.8	73.9	75.0	76.1
	14.76	16.49	17.02	20.59	22.80	25.24	27.73	33.86
R(cm)	0.98	0.88	0.77	0.74	0.68	0.63	0.60	0.55
次數	33	34	35	36	37	38	39	40
濃度	77.1	78.1	79.0	79.9	80.7	81.5	82.3	83.0
	33.94	37.58	41.16	45.39	49.48	53.96	59.09	64.20
R(cm)	0.52	0.50	0.47	0.44	0.42	0.38	0.34	0.31

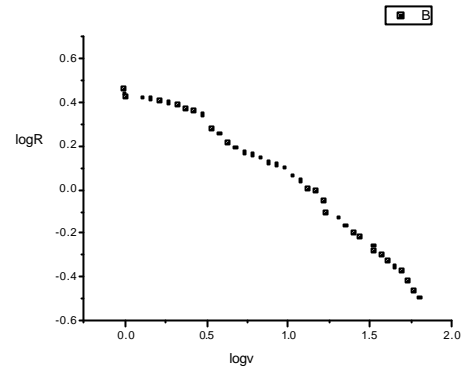
表四所示為濃度 0(純水)至 83.0%的甘油水溶液濃度、

黏滯係數、圓形水躍半徑關係。在濃度 38.7%之前

$\log R$ 對 $\log n$ 為線性，且斜率 = -0.339， $\Rightarrow R \sim n^{-0.339}$ ，

濃度 40%， $v = 363.2 \text{ cm/s}$ ， $\rho = 1.09 \text{ g/cm}^3$ ， $r = 0.113 \text{ cm}$ ，

$Nr = \frac{2rvr}{n} = 2786$ ，圓形水躍半徑 R 內部已不是薄層；濃度



圖七：甘油的 $\log R - \log v$

大於 80.7%出現泡泡，濃度大於 82.3%泡泡變多，濃度大於 83.75%已看不出流動呈現水躍現象了。

六、討論

1. 因次分析 $R = kQ^a H^b g^c n^d \dots$ ②

$$3a + b + c + 2d = 1 \dots$$
 ③

我們得到的流量、高度、黏滯係數對半徑影響中 $\log R$ 對 $\log Q$ 圖之斜率得

$\alpha = 0.668$ ， $\log R$ 對 $\log H$ 得 $\beta = -0.168$ ，水的 $\log R$ 對 $\log v$ 得 $\delta = -0.338$ ，

代入④得 $\gamma = -0.16$ 。

Y. Brechet 1999 年推導出 $R = \left(\frac{27g^{-\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \times 35p} \right)^{\frac{2}{3}} Q^{\frac{2}{3}} H^{-\frac{1}{6}} n^{-\frac{1}{3}} \dots$ ⑥

$$\Rightarrow R = kQ^{\frac{2}{3}} H^{-\frac{1}{6}} g^{-\frac{1}{6}} n^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{1}{6}, \quad c = -\frac{1}{6}, \quad d = -\frac{1}{3}$$

我們的實驗結果和 Brechet 的理論推導結果甚為吻合。

2. 實驗五中，水由 0°C 增至 77°C ，黏滯係數由 1.7921 cp 減為 0.3702 cp ，相差 4.8 倍，表面張力由 75.6 dy/cm 降為 64.3 dy/cm 僅減少 15%，酒精則黏滯係數由 5°C 的 1.623 cp 減為 55°C 之 0.644 cp ，相差 2.52 倍，表面張力由 23.8 dy/cm 減為 20.0 dy/cm 僅減少 16%。所以利用溫度來改變黏滯係數，表面張力及密度的變化幾乎可以忽略。Y. Brechet (1999) 用同一溫度的油、水、酒精、氨水四種不同物質有不同黏滯係數來探討黏滯係數對圓形水躍半徑的影響，未控制的變因太多，實驗結果比我們利用溫度變化的實驗結果差很多。

3. 甘油的水溶液黏滯係數隨濃度變化甚大，用以研究黏滯係數對圓形水躍半徑的影響效果相當好。
4. 雷諾數低於 7512 的水躍，內層水的深度太大，不滿足我們因次分析的結果。
5. 水柱高度低於 5.9cm 者，表面張力的影響不能忽略。

七、結論

圓形水躍為日常生活中常見的流體力學現象，理論推導影響圓形水躍半徑的變因相當繁雜，我們利用因次分析法及簡單的實驗裝置可得知：層流的液體，圓形水躍的半徑和流量的 $\frac{2}{3}$ 次方成正比，和液柱落下高度的 $\frac{1}{6}$ 次方成反比，和黏滯係數的 $\frac{1}{3}$ 次方成反比，和重力加速度的 $\frac{1}{6}$ 次方成反比；和理論得到的結果甚為吻合。利用攝影機拍攝圓形水躍，可以直接量到流速，並證明水躍半徑以內流速大於波速，半徑以外流速小於波速。

八、參考資料

1. 彭黃勝等四人：水牆，中華民國中小學科學展覽第二十一屆至三十屆優勝作品專輯 國立台灣科學教育館編印，頁 301-307
2. "Lange's handbook of chemistry", revised 10 edition, compiled and edited by Norbert Adolph Lange. General Electric Company, Cleveland, Ohio (1967).
3. Robert P. Godwin, "The hydraulic jump", Am. J. Phys. **61**(9), 829–832 (September, 1993)
4. Y. Brechet, "On the circular hydraulic jump", Am. J. Phys. **67**(8), 723–731 (August, 1999)

040121