040401

DeadLock

壹、摘要：

研究立體密碼鎖的解及解與解之間的關係，利用立體幾何圖形探討。

貳、研究動機：

本班導師每週都會發幾個思考性問題給同學研究與探討，其中一回中有一道題：
(摘自師大許志農教授公佈於龍騰文化所編輯之數學天地—問題集)

有一種娛樂用的號碼鎖，它有三個密碼，每個密碼都由 1，2，3 這三個數位所構成，開鎖者只要轉對其中的兩(含)個密碼以上，鎖就會自動開啓，例如當密碼為(1,2,3)時，轉(1,3,2)是不會開的(只轉對一個密碼)，但是轉(1,3,3)就會打開(轉對第 1，3 位置的密碼)。問：對付這種密碼鎖，你至少須嘗試幾次才保證一定能打開。

看其解答後發現其作法可和正立方體連結在一起，為了滿足好奇心，決定將其擴展及推廣，希望可在未來的發展中獲得成果·

參、研究目的：

以下為我們把欲研究的部份:
一.先研究原題目所給的答案，並進一步的證明。
二.解答中提到:最少五組號碼可開啓所有 27 個密碼鎖，
　這樣的五組號碼，我們不防稱為一組最佳解，則最佳解共有幾個？
三.利用平面變換，探討最佳解彼此間有無互通性？並以 c 程式語言所跑的答案做佐證。
四.進而把題目推廣到 4*4*4，並找出答案。
五.希望往 n*n*n 發展，探討及歸納其特性。

肆、研究設備及器材：

紙、筆、C 程式語言、橡皮擦、立體模型—正方體方塊

伍、研究過程及方法：

一.原問題題目：

一種娛樂用的號碼鎖，它有三個密碼，每個密碼都由 1，2，3 這三個數位所構成，開鎖者只要轉對其中的兩(含)個密碼以上，鎖就會自動開啓，例如當密碼為(1，2，3)時，轉(1，3，2)是不會開的(只轉對一個密碼)，但是轉(1，3，3)就會打開(轉對第 1，3 位置的密碼)。問：對付這種密碼鎖，你至少須嘗試幾次才保證一定能打開？

(一).參考解答之一:
　(1)為利用鴿籠原理證明嘗試四次一定打不開
　(2)存在五組號碼可開啓所有 27 個密碼鎖
　　例(1,1,1),(2,2,2),(3,3,1),(1,3,3),(3,1,3)

(二).參考解答之二:
　此題可以利用邊長為 3 的正方體來考慮，將之分割為 3*3*3=27 個小立方體，並配合空間座

標，則每一個立方體代表一組密碼(空間座標中的一個點)，並將再同一直線相連的方塊稱爲特殊直線(此指平行 x 軸、y 軸、z 軸的直線，以下多稱爲線)，在同一平面的九個方塊稱爲面(此指平行 xy 平面、yz 平面、zx 平面的面)。而每一組號碼可以開啓的七道鎖，即爲與此組號碼在同一線上的七組。

得到一結論：5 組號碼可檢查所有 27 個密碼鎖。

參考解答二的方向，就是我們研究的主題。

二.3*3*3 方塊：

(一).定義

在此先定義一些以下常用詞語或用法：

1.利用空間座標來解說，方塊的座標也是用空間座標的定義。即一個(3,2,1)的方塊，就是位在 x 軸上 3、y 軸上 2，z 軸上爲 1 的位置。以下多簡稱爲「321 這個方塊(鎖)」，視爲點(3,2,1)。3*3*3=27 道鎖(點)可視爲三個平面：x=1，x=2，x=3 或三平面 y=1，y=2，y=3 或三平面 z=1，z=2，z=3。

「鎖」這東西轉換到立體中就變成「方塊」。(空間座標中的點)

2.「一組號碼（數字）」是指被選擇來檢驗立體中的鎖的特定方塊。如「111 這組號碼（數字）可以檢驗 111、211、311、121、131、112、113 這 7 道鎖」。這一組「一組號碼」abc 視爲一個點(a,b,c)

3.所謂的特殊平面(以下多簡稱爲平面)指平行 xy、yz、zx 平面之簡稱。

4.所謂的直線指平行 x 軸或 y 軸或 z 軸的特殊直線(以下多簡稱爲直線)之簡稱。

5. 5 組號碼（數字）可檢查所有 27 個密碼鎖，這樣的五組號碼，稱爲一<u>最佳解</u>

(二).內容討論：

在 3*3*3 方塊中

1.一組號碼（數字）上可檢驗 7 道鎖：

例：111 可檢驗打開 111.112.113.121.131.211.311.七道鎖，就是過(a,b,c)之三條特殊直線上有七個點。

2.過(a,b,c)之三條特殊直線上有七個點，一最佳解(5 組號碼)通過 5*7=35 個點，5*7-27=8 個重複。 (同一號碼鎖被多於一組數字解開，稱爲重複)

3.證明：每一面不包含 3 組號碼：(利用反證法)

證明：

設一平面上有三組數字，針對各種狀況的分析探討：

(※代表 3 組數字的位置。○代表已被打開的鎖，◎代表被打開兩次(浪費一次的地方)，●代表被打開三次(浪費兩次的地方))

(A)同一平面上三組數字彼此之間不在同一直線上

※○	◎	◎
◎	※○	◎
◎	◎	※○

z=1 的面

○		
	○	
		○

z=2 的面

○		
	○	
		○

z=3 的面

(B)同一平面上三組數字有兩個在同一條線上(一組)

※◎	●	※◎
◎	※○	◎
○	○	○

z=1 的面

○		○
	○	

z=2 的面

○		○
	○	

z=3 的面

(C)同一平面上三組數字皆在同一直線上

※●	※●	※●
○	○	○
○	○	○

z=1 的面

○	○	○

z=2 的面

○	○	○

z=3 的面

針對以上(A)(B)(C)三種狀況，我們知道三組在同一平面上的數字可打開 15 道鎖。因爲這共面三組數字在兩兩彼此之間都會製造出 2 個重複點。所以這共面三組數字會有 6 個重複點。3*7-6=15。又我們知道剩下的兩組數字碼必與這三組數字中其中兩個共面，所以能打開的鎖必不大於 15+2*7-2-2=25 個鎖，無法打開全部的鎖。

(D)同一平面上三組數字有兩個在同一條線上(兩組)

※◎	※●	◎
○	※◎	○
○	◎	

z=1 的面

○	○	
	○	

z=2 的面

○	○	
	○	

z=3 的面

我們可以看出這三組數字只有打開 14 個鎖，剩下的兩組數字不是彼此重覆就是與這三組數字中其中一個重覆，於是能打開必不大於 14+7*2-2=26 道鎖，無法打開全部的鎖。由(A)(B)(C)(D)知當三組數字必不在同一面上的推論。

4.證明：2 組數字不在同一條直線上：

利用反證法，探討當兩組解在同一直線上的各種狀況：

(※代表兩組數字的位置。○代表已被打開的鎖，◎代表被打開兩次(浪費一次的地方)，●代表被打開三次的鎖

※◎	※◎	◎
○	○	
○	○	

z=1 的面

○	○	

z=2 的面

○	○	

z=3 的面

基於一個平面上沒有 3 組數字的前提下，爲了打開 z=1 的平面上剩下的兩個鎖，不可能在 z=1 上再放另一組數字。所以只有以下兩種放法：

※◎	※◎	◎
○	○	
○	○	

z=1 的面

○	○	
		※

z=2 的面

○	○	
		※

z=3 的面

※◎	※◎	◎
○	○	
○	○	

z=1 的面

○	○	
		※
		※

z=2 的面

○	○	

z=3 的面

所以會有以下狀況：

※◎	※◎	◎
○	○	○
○	○	○

z=1 的面

○	○	○
○	○	※○
		◎

z=2 的面

○	○	○
		○
○	○	※○

z=3 的面

※◎	※◎	◎
○	○	○
○	○	○

○	○	◎
○	○	※◎
○	○	※◎

○	○	
		○
		○

皆可看出不可能再用另一組數字將剩下的全部涵蓋。所以：「任意兩組數字必不在同一行上。」

5.證明：五組數字構成一最佳解必有四個三次重複點

證明：因為每一面不包含 3 組號碼，

所以三個面 x=1，x=2，x=3 各有 2、2、1 組數字

又兩組數字在同一面上時會有 2 個重複，

所以 x=1，x=2，x=3 上有 2*2=4 個重複，

考慮 y=1，y=2，y=3 及 z=1，z=2，z=3 亦同。

共有 12 個重複，與(2)之 5*7-27=8 個重複點差為 4 個，

由此可知應有四個三次重複點。

(三).平面互換：

1.**平面互換的基本原理**：

原來的一組最佳解五組數字，經平面互換後所在位置之五個數，依舊是其中一組解。(因為一點所在之三直線所對應的點，不因平面互換而改變)

2.我們由 3*3*3 的立方體中，平面 x=1，x=2，x=3 互換有六種方法，同理 y=1，y=2，y=3 與 z=1，z=2，z=3 互換均有六種，依乘法原理知有 6*6*6=216 種平面互換方法，製造出 216 組最佳解，所有的最佳解是否包含於這 216 組最佳解中？其中是否有不同的變換路徑而得相同的最佳解？

3.為了解決與上述問題，我們由 C 程式語言跑出來的結果有 54 組最佳解，雖然不是 216 種，但 216=54*4，給了我們莫大的啓發示，於是我們大膽猜測所有的最佳解包含於這 216 組最佳解中(由一組最佳解經平面互換所得)，且有四種不同的平面變換路徑而得相同的最佳解。於是我我們嘗試以下的實驗並證明之

(1).**任一組解恰可利用 4 種不同的平面變換路徑變回原本自己的型態：**

我們利用一組最佳解作爲標準解: 111 133 222 313 331
觀察標準解，我們知道 x=1、x=3 的各有兩個，x=2 的只有一個，
且在 y 軸及 z 軸上狀況也是相同。
我們可以知道如果要經平面互換路徑變回原本自己的型態只能 1 跟 3 互換，
接著我們定義 A 爲平面上的 1 與 3 互換，B 爲不換。
順序依序是 x 軸、y 軸、z 軸。
如 ABB 的意思是：x 軸上 x=1 與 x=3 互換，ABA 的意思是 x 軸上 x=1 與 x=3 互換，z 軸上 z=1 與 z=3 互換。
標準解: 111 133 222 313 331

(ABB)	311 333 222 113 131	(BAA)	133 111 222 331 313
(AAB)	331 313 222 133 111	(BBA)	113 131 222 333 311
(ABA)	313 331 222 111 133	(BBB)	111 133 222 331 313
(BAB)	131 113 222 333 311	(AAA)	333 311 222 113 131

橙色爲成功變回自己本身的方法。

(2).**我們利用一組最佳解作爲標準解，**
證明:任意一組最佳解皆可利用 4 種不同的平面變換路徑
變回原本最佳解標準解的型態，
(換句話說：一組最佳解作爲標準解，有四種不同平面變換路徑
得到相同的一組最佳解)

證明：
解釋以下將使用的有關平面互換的符號:
x：123 表 x=1,x=2,x=3 三平面均不變換(123→123)
x：312 的意思是將「x=1 的面換到 x=3，x=2 換到 x=1，x=3 換到 x=2」。
(123→312，即 1→3，2→1，3→3)
其他有關 y 軸、z 軸方向之平面互換的符號亦同。
接下來我們對由 c 語言跑出來的 54 組解進行研究，確認每一組最佳解皆可利用 4 種不同的平面變換路徑變回原本最佳解標準解的型態。
最佳解標準解: 111 133 222 313 331
在附錄中標出了它們變回最佳解標準解的四個方法，請參閱：

4.結論:

由一已知最佳解經由 6*6*6=216 種平面互換方法，製造出最佳解，所有的最佳解是否包含於其中，且有四種不同的平面變換路徑而得相同的最佳解，
所有的最佳解共有 216÷4=54 組。

三. n*n*n:

(一). 說明：「<u>**從數量來觀察，平均分配數字於各平面上所製造的重複會最少**</u>」
先假設已下狀況：
以下爲 5*5*5 的立體方塊，<u>**由 x 軸方向去看的樣子**</u>。假設全部有 12 組數字，可能有以下

狀況：
平均分配:(x=1、x=2 的面上各有 3 組數字，x=3、x=4、x=5 上各有 2 組數字)

<u>(假設它們兩兩不共線)</u>

(此圖不一定按照真實情況，只是純粹表示出每一面上的數字數)

●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●			

x=1　x=2　x=3　x=4　x=5

或者是有其中一面特別多：(x=1 上有 4 組數字，其餘的面上各有 2 組數字)

●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●				
●				

x=1　x=2　x=3　x=4　x=5

觀察這兩種狀況的重複，判斷哪一種會重複較多？
第一種在 x=1、x=2 的面上各有 3 組數字，所以對 x=1 這個面來看會有以下狀況：x=1 的面

●	◎		◎	
◎	●		◎	
◎	◎		●	

可看出它有六個重複點，即為前面所討論的 C(3,2)*2=6

●	◎			
◎	●			

同一個面上有兩組數字，則會有 C(2,2)*2=2 個重複點。
所以我們可以知道，第一種平均分配的狀況會有〈C(3,2)*2+C(2,2)*3〉*2=18 個重復點。
第二種則是〈C(4,2)*1+C(2,2)*4〉*2=20 個，可知第二種方法會有較多的重複點，不是我們所期望製造的「愈少重複點愈好」的狀況。

其實這種狀況就相近於要證明 C((3+1),2)+C((3-1),2)>2*C(3,2)

即爲證 C(m,2)+C(n,2)> $2\cdot C\left(\dfrac{m+n}{2},2\right)$ 其中 m+n 爲偶數，m≠n

$$C(m,2)+C(n,2) \quad > \quad 2\cdot C\left(\frac{m+n}{2},2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2} \quad > \quad \frac{2*[(\frac{m+n}{2})*(\frac{m+n}{2}-1)]}{2}$$

$\Leftrightarrow 2*[m(m-1)+n(n-1)] \quad > \quad (m+n)*(m+n-2)$

$\Leftrightarrow 2m^2+2n^2-2m-2n \quad > \quad (m+n)^2-2m-2n$

$\Leftrightarrow m^2+n^2-2mn \quad > \quad 0$…..得證

所以我們知道，平均分配所製造的重複數會比其他方法還少，更符合我們所期望的目標。目前做到這個地步，我們開始證明 n*n*n 立體方塊的相關內容。

<u>(二).證明：在 n*n*n 中，若有兩組以上數字在同一直線上，會造成多餘的浪費。</u>

假設有 p 組數字，其中有 q 組數字在同一直線上。

由除法原理知：p= t * n + s　其中 0 ≦ s < n

以 8*8*8 爲例，當 p=43 時， 43 = 5 * 8 + 3

在這種情況，p=43(數字數)　t=5(滿足行內部有 n 個數字的行數)　n=8(8*8*8 的方塊內)　s=3(第 t+1 行的數字)　q=4 (非實心圈圈所標示的部份)

1.當 q<t 的時候：

舉例：

○	●	●	●	●	●	●	●	第一行
○	●	●	●	●	●	●	●	第二行
○	●	●	●	●	●	●	●	第三行
○	●	●	●	●	●	●	●	第四行
●	●	●	●	●	●	●	●	第五行
●	●	●						第六行
								第七行
								第八行
x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	x=6	x=7	x=8	

這是 8*8*8 的立方體中，從 x 軸上去看，數字在每一面上的分布情況。它代表的是：x=1、x=2、x=3 上各有 6 組數字，x=4、x=5、x=6、x=7、x=8 上各有 5 組數字(要符合前面所推導的「平均分配」的原則)。

我們可以知道，有 q 個數字在同一直線上時，會產生(q-1)*n 個重複(因爲一直線上的每一點都被選擇 q 次)。

對同一平面而言，從都沒有數字的狀況下丟入第一行的數字，是不會有重複的。
從已經有一行數字的狀況下丟入第二行的數字，在每一面上會有 2 個重複。
從已經有兩行數字的狀況下丟入第三行的數字，在每一面上會多出 4 個重複，總共是 6 個重複。

所以會是 $\sum_{a=1}^{t} 2(a-1)$ =t(t-1)個重複

所以在 $q<t$ 的狀況下，從 x 軸上來看，
重複數
=(q 組數字在同一直線上的重複數)
+(除了 x=1 那一面，其餘平面第 q 行以下所製造出來的重複數)
+(從第 q+1 行到第 t 行所產生的重複數)
+(在第 t+1 行上有 s 組數字產生出來的重複數)。
=(q-1) * n + q * (q-1)(n-1) + (q+t-1)(t-q)n+2ts …①
又若沒有兩組數字在同一直線上，則全部重複數有 t(t-1) * n+2ts …②
①-②得：
(q-1) * n+ q * (q-1)(n-1)-q(q-1)n=(q-1) * n-(q-1) * q>0
(因爲 n 必大於 q，所以(q-1) * n-(q-1) * q>0)
即有 q 組數字在同一直線上會產生較多的重複。

2.當 q≥t 時會是以下情況：

○	●	●	●	●	●	●	●	第一行
○	●	●	●	●	●	●	●	第二行
○	●	●	●	●	●	●	●	第三行
○	●	●	●	●	●	●	●	第四行
○	●	●	●	●	●	●	●	第五行
○	●							第六行
○								第七行
								第八行
x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	x=6	x=7	x=8	

同上面，假設有 p 組數字，有 q_2 組數字在同一直線上。
p= t * n + s
(p-q_2) = t_2 * (n-1) + s_2

觀察以上，跟 $q<t$ 的圖比較起來，是把第六行上的數字丟到 x=1 上面(即爲減少 2*(6-1)個重複，增加 8 個重複。若第六行拿完了，再拿第五行的話，那就會是減少 2*(5-1)個重複，增加 8 個重複。這樣是會製造出越來越多重複的，所以我們只能討論拿第六行上面的數字的狀況。

如此一來 $t= t_2$

則全部會有$(q_2 -1) * n+ t * (t-1)(n-1)+ 2ts_2$ …①
沒有兩組數字在同一直線上的狀況會是 $t(t-1) * n+2ts$ …②
①-②得：
$(q_2 -1) * n- t(t-1) + 2t * (s- s_2)>0$
(因爲 $n>q_2 >t$, $s- s_2 >0$
所以$(q_2 -1) * n + 2t * (s- s_2) > (t-1) * n> t(t-1)$
$(q_2 -1) * n- t(t-1) + 2t * (s- s_2)>0$)
即在 q≥t 的狀況下，有 q 組數字在同一直線上仍會產生較多重複。
由(1) (2)知：**在 n*n*n 中，若有兩組以上數字在同一直線上，會造成多餘的浪費。**

<u>(三).n*n*n 的解</u>：

從重複數的觀點，我們得到一個重要概念：
重複數
=(全部的數字)*(每組數字能打開的鎖)-(全部的鎖數(即 n*n*n))
=(觀察出來的重複數)-(三次重複點)。
所謂觀察出來的重複數，意指分別從 x 軸、y 軸、z 軸方向觀察所得的重複數總和。
即 重複數=重複數

1. 5*5*5 的狀況：

x=1 x=2 x=3 x=4 x=5

我們不知道 5*5*5 中最佳解爲多少組數字，所以我們從重複數的觀點來推測：
<u>假設 n*n*n 中，最佳解爲 x 組數字，每組數字可以打開 3n-2 把鎖</u>
x(3n-2)-n*n*n=3*(x 軸上觀察到的重複數)－(三次重複點)
因爲重複數不能爲負數，所以 x(3n-2)恆大於 n*n*n；因爲方程式中只有 三次重複點爲未知數 q，故只需求得 q，再檢查 q 是否符合 3q≤p 的條件，若符合條件則方程式成立。

n=5 的情況：

x= 9　9*(3*5-2)-5*5*5<0　　所以不成立

x=10　10*(3*5-2)-5*5*5=5=3*10-q　得 q=25 , p=30 與 3q≤p 不合，所以不成立

x=11　11*(3*5-2)-5*5*5=18=3*14-q 得 q=24 , p=42 與 3q≤p 不合，所以不成立

x=12　12*(3*5-2)-5*5*5=31=3*18-q 得 q=23 , p=54 與 3q≤p 不合，所以不成立

x=13　13*(3*5-2)-5*5*5=44=3*22-q 得 q=22 , p=66 所以當 x=13 時成立

等式中 x=10 時的 10，x=11 時的 14，x=12 時的 18，x=13 時的 22 就是指
<u>*從 x 軸上面觀察到的重複數*</u>。

x=10(組數字)

●	●	●	●	●
●	●	●	●	●

x=1　x=2　x=3　x=4　x=5　(軸)

可觀察出有 10 個重複。

x=11(組數字)

●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●				

x=1　X=2　x=3　x=4　x=5　(軸)

可觀察出 x=1 上有 6 個重複，其他面上各有 2 個重複，全部有 14 個重複。

x=12(組數字)

●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●			

x=1　X=2　x=3　x=4　x=5　(軸)

可觀察出 x=1、x=2 上有 6 個重複，其他面上各有 2 個重複，全部有 18 個重複。

x=12(組數字)

●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●		

x=1 x=2 x=3 x=4 x=5 (軸)

可觀察出 x=1、x=2、x=3 上有 6 個重複，其他面上各有 2 個重複，全部有 22 個重複。

既然已經在程式上證出了 5*5*5 可用 13 組數字就打開，以下是實際用 13 組數字打開 5*5*5 的狀況：

z=1 的面：

●				
	●			
		●		

z=2 的面：

	●			
		●		
●				

z=3 的面：

		●		
●				
	●			

z=4 的面：

			●	
				●

z=5 的面：

				●
			●	

可看出可以用 13 組數字就打開 5*5*5。

2. 6*6*6 的狀況：

●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●

x=1　x=2　x=3　x=4　x=5　x=6

同 5*5*5 的假設。只不過將 n 換成 6 而已。
3*6-2=16

x=13　13*16-6*6*6<0　所以不成立
x=14　14*16-6*6*6=8=3*20-q　得 q=52 p=60 與 3q≤p 不合，所以不成立
x=15　15*16-6*6*6=24=3*24-q　得 q=48 p=72 與 3q≤p 不合，所以不成立
x=16　16*16-6*6*6=40=3*28-q　得 q=44 p=84 與 3q≤p 不合，所以不成立
x=17　17*16-6*6*6=56=3*32-q　得 q=40 p=96 與 3q≤p 不合，所以不成立
x=18　18*16-6*6*6=72=3*36-q　得 q=36 p=108　成立
在 6*6*6 中，我們可以用 18 組數字就打開全部的鎖，以下是詳細情況

z=1

●					
	●				
		●			

z=3

		●			
●					
	●				

z=2

	●				
		●			
●					

z=4

			●		
				●	
					●

z=5

				●	
					●
			●		

z=6

					●
			●		
				●	

(四).整理歸納與猜測：

1.從以上討論，我們可以知道：

n=3 時最佳解爲 5 組數字；

n=4 時最佳解爲 8 組數字；

n=5 時最佳解爲 13 組數字；

n=6 時最佳解爲 18 組數字。

仔細觀察並分析圖形，我們發現

5=1*1+2*2　　1+2=3=n

8=2*2+2*2　　2+2=4=n

13=2*2+3*3　3+2=5=n

18=3*3+3*3　3+3=6=n

2.於是我們猜測：

當 n 爲偶數時　全部可以用 $(\frac{n}{2})*(\frac{n}{2})+(\frac{n}{2})*(\frac{n}{2})=n*\frac{n}{2}$ **組數打開**

當 n 爲奇數時　全部可以用 $\frac{n+1}{2}*\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}*\frac{n-1}{2}=\frac{n^2+1}{2}$ **組數打開**

將此猜測代入我們的方程式看看：

①n 爲偶數：

因爲 $\frac{n^2}{2}=(\frac{n}{2})\cdot n$

從 x 軸上面去看，會有 $\frac{n}{2}$ 行是填滿的，觀察出來會有 $(\frac{n}{2})\cdot(\frac{n}{2}-1)\cdot n$ 個重複。

$$\frac{n^2}{2}\cdot(3n-2)\ -\ n^3\ =\ 3\cdot\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}-1)\cdot n\ -\ q$$

解得 $q=(\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2})$ $p=3\cdot\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}-1)\cdot n$

所以成立(因爲 3q=p)

②n 爲奇數：

$(\frac{n^2+1}{2})=(\frac{n}{2})\cdot n+\frac{1}{2}$ 但 $\frac{1}{2}$ 不是整數，

所以將 $(\frac{n^2+1}{2})$ 拆成 $(\frac{n-1}{2})\cdot n+\frac{n+1}{2}$。

$(\frac{n-1}{2})\cdot n+\frac{n+1}{2}$ 組數字，

從 x 軸上面去看，會有 $\frac{n-1}{2}$ 行是填滿的，再加剩餘的 $\frac{n+1}{2}$ 組數字，觀察出來會有

$(\frac{n-1}{2})\cdot(\frac{n-1}{2}-1)\cdot n+2\cdot(\frac{n-1}{2})\cdot(\frac{n+1}{2})\ =\ \frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}-\frac{1}{2}$ 重複數。

$$(\frac{n^2+1}{2})\cdot(3n-2)\ -\ n^3\ =3*\ (\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}-\frac{1}{2})\ -q$$

解得 $q=(\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}-\frac{1}{2})$ $p=3*\ (\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}-\frac{1}{2})$

所以成立(因爲 3q=p)

3.再證明

當 n 爲偶數在 $\frac{n^2}{2}$ 組數字以下不成立

當 n 爲奇數時在 $\frac{n^2+1}{2}$ 組數字以下不成立

①n 爲偶數的狀況：

將原本的

$$\frac{n^2}{2}\cdot(3n-2)-n^3=3\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot n-\left(\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2}\right)$$

(令 $P=\frac{n^2}{2}\cdot(3n-2)$，$Q=(\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2})$)

簡化成 $P-n^3=2Q$

將 $\frac{n^2}{2}$ 組數字減 k 組數字的狀況：

假設 k = A * n + B　(n > B) (即從原本的 $\frac{n}{2}$ 行拿掉 A 行又拿掉 B 組數字)

又假設拿掉 k 組數字從 x 軸上面觀察會少掉 R 個重複

拿掉 k 組數字代表著把從第 $\frac{n}{2}$ 行到第 $\frac{n}{2}$-A+1 行拿掉，又拿掉第 $\frac{n}{2}$-A 行上的 B 個數字。

所以 R = $\frac{2\cdot n\cdot(\frac{n}{2}-1+\frac{n}{2}-A)\cdot A}{2}+2\cdot(\frac{n}{2}-A-1)\cdot B$

將 $\frac{n^2}{2}$ - k 代入重複數=重複數的等式中：

P - k·(3n-2) - n^3 = 3·(Q-R) － (三次重複點數)…◎

因為 P - n^3 = 2Q ，代入◎：

2Q - k·(3n-2) = 3·(Q-R) － (三次重複點數)

(三次重複點數) = Q - 3R + k·(3n-2)

但 k* (3n-2)

= (A * n + B) * (3n-2)

= $3n^2$ A + 3nB － 2nA -2B…①

R = $\frac{2\cdot n\cdot(\frac{n}{2}-1+\frac{n}{2}-A)\cdot A}{2}+2\cdot(\frac{n}{2}-A-1)\cdot B$

= n^2 A － nA - nA^2 +nB- 2AB -2B…②

觀察一下可知

①-3*② $=nA+3nA^2+6AB+4B>0$ 得 k* (3n-2) > 3*R

所以三次重複點數恆大於 Q，但這時觀察到的重複數已變成 3*(Q-R)

Q-R 恆小於 Q，不符合前面所提的 p≧3q，

所以***當 n 為偶數時，若用小於 $\frac{n^2}{2}$ 的數字數將無法打開*** *n*n*n*

②n 為奇數的狀況：

將原本的

$(\frac{n^2+1}{2})\cdot(3n\text{-}2)-n^3 = 3\cdot(\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}-\frac{1}{2})-(\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}-\frac{1}{2})$

（ 令 $P=\frac{n^2+1}{2}\cdot(3n\text{-}2)$，$Q=\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}-\frac{1}{2}$ ）

簡化成 $P-n^3=2Q$

將 $\frac{n^2+1}{2}-k$ 的狀況：

假設

第一種狀況：$k=C$ $(\frac{n+1}{2})>C$ (從原本的第 $\frac{n+1}{2}$ 行拿掉 C 組數字)

或

第二種狀況：$k=\frac{n+1}{2}+A\cdot n+B$ $(n>B)$

(即從原本的第 $\frac{n+1}{2}$ 行先拿掉 $\frac{n+1}{2}$ 組數字再拿掉 A 行 又拿掉 B 組數字)

又假設拿掉 k 組數字從 x 軸上面觀察會少掉 R 個重複

以下證明此兩種狀況均不成立

第一種狀況：

第一種狀況下的 $k=C$ ， $R=2\cdot\frac{(n\text{-}1)}{2}\cdot C$

將 $\frac{(n^2+1)}{2}-k$ 代入重複數=重複數的等式中：

$P-k\cdot(3n\text{-}2)-n^3=3\cdot(Q\text{-}R)$ －(三次重複點數)…◎

因爲 $P-n^3=2Q$ ，代入…◎：

$2Q-k\cdot(3n\text{-}2)=3\cdot(Q\text{-}R)$ －(三次重複點數)

(三次重複點數) $=$ $Q-3R+k\cdot(3n\text{-}2)$

但 $k\cdot(3n\text{-}2)=3nC-2C$ …①

$R=2\cdot(\frac{n\text{-}1}{2})\cdot C=nC\text{-}C$ …②

觀察一下可知，①-3*② $=C>0$ 得 $k^*(3n\text{-}2)>3^*R$

所以三次重複點數恆大於 Q，但這時觀察到的重複數已變成 $3\cdot(Q\text{-}R)$

Q-R 恆小於 Q，不符合前面所提的 $p\geqq3q$，所以

若用小於 $\frac{(n^2+1)}{2}$ 的數字數將無法打開 n^*n^*n

第二種狀況：

第二種狀況下

$k = \frac{n+1}{2} + A \cdot n + B \quad (n > B)$

拿掉 k 組數字代表著

先把第 $(\frac{n+1}{2})$ 行上的 $(\frac{n+1}{2})$ 組數字拿掉，

再把從第 $(\frac{n-1}{2})$ 行到第 $(\frac{n-1}{2})$ -A+1 行拿掉，

又拿掉第 $(\frac{n-1}{2})$ -A 行上的 B 個數字。

所以 R＝ $2 \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot \frac{(n-1)}{2} \quad + \quad 2 \cdot n \cdot \frac{(\frac{n-1}{2} - 1) + (\frac{n-1}{2} - A)}{2} \cdot A \quad + \quad 2 \cdot (\frac{n}{2} - A - 1) \cdot B$

將 $\frac{(n^2+1)}{2} - k$ 代入重複數=重複數的等式中：

$P - k \cdot (3n-2) - n^3 = 3 \cdot (Q-R)$ －(三次重複點數)…◎

因為 $P - n^3 = 2Q$ ，代入◎：

$2Q - k \cdot (3n-2) = 3 \cdot (Q-R)$ －(三次重複點數)

(三次重複點數) $= Q - 3R + k \cdot (3n-2)$

但 $k \cdot (3n-2) = [A \cdot n + B + (\frac{n+1}{2})] \cdot (3n-2)$

$= 3n^2A + 3nB + \frac{3n^2}{2} + \frac{3n}{2} - 2nA - 2B - n - 1$ … ①

$R = 2 \cdot (\frac{n+1}{2}) \cdot (\frac{n-1}{2})$

$+ 2 \cdot n \cdot \frac{[(\frac{n-1}{2}) - 1 + (\frac{n-1}{2}) - A]}{2} \cdot A$

$+ 2 \cdot (\frac{n}{2} - A - 1) \cdot B$

$= \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} + n^2A - 2nA - nA^2 + nB - 2AB - 2B$ …②

①-3*② $= \frac{n}{2} + 4nA + 4B + \frac{1}{2} + 3nA^2 + 6AB > 0$ 得 $k^* (3n-2) > 3^*R$

所以三次重複點數恆大於 Q，但這時觀察到的重複數已變成 $3 \cdot (Q-R)$

Q-R 恆小於 Q，不符合前面所提的 p≧3q，
所以

若用小於 $\frac{(n^2+1)}{2}$ *的數字數將無法打開* $n*n*n$

陸.研究討論與結論：

一. 3*3*3 立方體中

(一).最少需 5 組數字可以檢驗完所有的鎖的答案。(一組最佳解)

(二).最佳解 111 133 222 331 313 為原題目解答給的解，但經由我們的研究這標準解可以有 216 種平面互換的方法(包括都不換的狀況下)，而變換到 216 種的其他解，但其中每四種不同變換方式可得相同一組解，所以實質上只有 54 組解，這 54 組解每一組都是不一樣的。

(三). 54 解的任一組最佳解都有 4 種平面互換的方法轉換為自己原來的樣子 (包括都不換的狀況)，也就是說這 54 組解之間都是互通的，彼此之間都可以經由平面互換而互相作轉換，且方法不只一種。

二.在 4*4*4 的立方體，經由我們的研究和證明，

(一).8 組數字為最少可以檢驗完所有的鎖的答案。

(二).在 4*4*4 的立方體中,總共有 24*24*24=13824 個平面互換的方法，但其中每 32 種方法所轉換的 32 組解會互相重覆而成一組解，所以實質上只有 432 組解，同樣的每一組解也都是不一樣的。

(三).4*4*4 的立方體的 432 組解彼此之間也都是可以互相轉換，只是任一組解變回本身的那一組解的換行換列的方法增為 32 種。

三在 n*n*n 的立方體中，經由我們的研究與證明

(一).在 n*n*n 中，同一平面上的數字分布要符合平均分配法則。

(二).在 n*n*n 中，證明 2 組以上的數字不會在同一條直線上。

(三).n*n*n 的最佳解需要幾組數字。

1.當 n 為偶數時　全部可以用 $n*\frac{n}{2}$ 組數打開

2.當 n 為奇數時　全部可以用 $\frac{n^2+1}{2}$ 組數打開

四.針對 n*n*n 來討論平面互換的可能方法數。

(一)當 n 為奇數，全部有 $(\frac{n+1}{2})!\cdot(\frac{n-1}{2})!\cdot(\frac{n+1}{2})\cdot(\frac{n-1}{2})$ 種變換方法。

$(n!)^3 \div [(\frac{n+1}{2})! * (\frac{n-1}{2})! *(\frac{n+1}{2}) *(\frac{n-1}{2})]$ 為最佳解的個數。

(二)當 n 為偶數，全部有 $(\frac{n}{2})!\cdot (\frac{n}{2})!\cdot (\frac{n}{2})^2\cdot 2]$ 種變換方法

$(n!)^3 \div [(\frac{n}{2})!\cdot (\frac{n}{2})!\cdot (\frac{n}{2})^2\cdot 2]$ 為最佳解的個數。

柒.發展與展望：

一.對長方體型態的探討。
二.對 n 的 m 次方的方塊下(脫離空間的範圍)的相關內容。

捌.參考資料：

一. 龍騰文化所編輯之數學天地—第九輯、第十輯。
二.高級中學 數學 第三、四冊 南一書局

040401 DeadLock

1.

2.

3.