040404

作品名稱：

壹、摘要

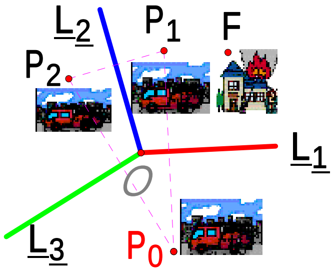
本研究主題主要在探討在一平面上給定 n 條直線 L_1 、 L_2 、 $L_3 \cdots L_n$ ，若有一點 P_0 ，作關於 L_1 的對稱點 P_1 。 P_1 又作關於 L_2 的對稱點 P_2 ， P_2 又作關於 L_3 的對稱點 P_3 ，…， P_{n-1} 又作關於 L_n 的對稱點 P_n ， P_n 又作關於 L_1 的對稱點 P_{n+1} ，如此反覆對直線 L_1 、 L_2 、 $L_3 \cdots L_n$ 對稱點 P_1 、 P_2 、 $P_3 \cdots$ ， P_m ，在什麼條件下 P_m 會和 P_0 重合。這個問題是起源於三角形復原問題：已知三角形三邊的中垂線，要如何作出此三角形呢？我們知道中垂線其實就是兩個頂點的對稱軸。因此，要作出此三角形，如果能先找到這個三角形的一個頂點當作起始點，然後依序對這三條中垂線（對稱軸）作出對稱點，而能再回到起始點，就可以作出此三角形。

我先從二條、三條、四條直線的情形開始研究，再逐步推展到一般的 n 條直線的情形。在研究過程中，從線對稱性質，分析四條直線情形，發現任一點依序對四條直線作線對稱，可以簡化成依序對二條直線作線對稱。這個重要性質，對 n 條直線連續作線對稱可依 n 爲偶數或奇數化簡成對 2 條或 3 條直線作線對稱。因此再回頭分析 2 條以及 3 條直線的情形後，發展出一種雙重起始點測試法，對給定 n 條直線，會重合到起始點的的條件以及作圖法。這種化繁爲簡的方法，完整的解決了 n 條直線的複雜問題。

貳、研究動機

台灣火災頻繁，需要適當的設置消防站。如果一個城市分成三個區域，要如何在每個區域中設置一個消防站負責此區域呢？相對應的數學問題是，已知三角形的三邊中垂線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，要如何作出此三角形呢？我們知道中垂線其實就是兩個頂點的對稱軸。因此，要作出此三角形，如果能先找到這個三角形的一個頂點當作起始點，然後依序對這三條中垂線作出對稱點，而能再回到起始點，就可以作出此三角形。

請教老師如何找到這個起始點呢？老師建議我參考數一上圖形平移與線對稱以及數學甲有關直線的旋轉概念來研究此有趣問題。在我研究這個問題時，發現第 42 屆全國科展中有一件作品「點的對稱」中，討論連續對兩條相交直線作對稱的研究。這個科展作品利用解析幾何的方式只做到二條相交直線的情形。那麼對於 3 條直線、4 條直線，n 條直線的交錯不停的對稱情形又會如何呢？



參、研究目的

本研究目的主要在研究一平面上給定 n 條直線 L_1 、 L_2 、 $L_3 \cdots L_n$ ，若有一點 P_0 ，作關於 L_1 的對稱點 P_1 。 P_1 又作關於 L_2 的對稱點 P_2 ， P_2 又作關於 L_3 的對稱點 P_3 ，…， P_{n-1} 又作關於 L_n 的對稱點 P_n ， P_n 又作關於 L_1 的對稱點 P_{n+1} ，如此反覆對直線 L_1 、 L_2 、 $L_3 \cdots L_n$ 對稱點 P_1 、 P_2 、 $P_3 \cdots$ ， P_m ，在什麼條件下 P_m 會和 P_0 重合。

肆、研究設備及器材

動態幾何繪圖軟體(GSP)、紙、筆

伍、研究過程或方法

我們先分析線對稱的一些基本的性質後，從二條、三條直線的情形開始研究，再逐步推展到一般的 n 條直線的情形。在研究過程中，使用 GSP 來幫助繪圖操作實驗，提供觀察、歸納、分析其中的性質。

我們以 Q＝L(P)表示 Q 點是 P 點以直線 L 爲對稱軸的對稱點，因此，P＝L(Q)。

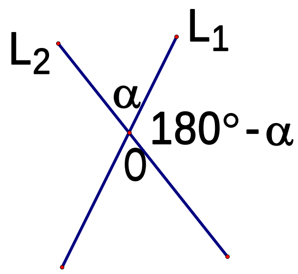
若 $L_1(P_0)=P_1$，且 $L_2(P_1)=P_2$，我們以 $L_2\,L_1(P_0)=P_2$ 表示 P_2 是由 P_0 連續對 L_1、L_2 作對稱的對稱點。

同樣地，$P_n=L_n\cdots L_3\,L_2\,L_1(P_0)$表示點 P_0，作關於 L_1 的對稱點 P_1。P_1 又作關於 L_2 的對稱點 P_2，P_2 又作關於 L_3 的對稱點 P_3，…，P_{n-1} 又作關於 L_n 的對稱點 P_n。

$P_m=L_j\cdots L_3\,L_2\,L_1\,L_n\cdots L_3\,L_2\,L_1(P_0)$，j＝1,2,⋯n，表示第 m 次的對稱點。

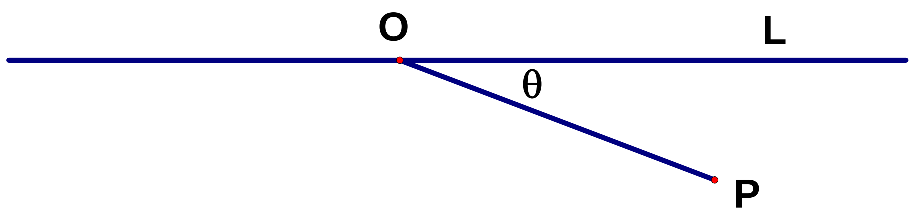
我們以∠ A_1 O A_2 表示以 A_1 爲起點、O 爲頂點、A_2 爲終點的有向角。

∠L_1,O,L_2 (或者以∠L_1,L_2) 表示相交於 O 點的二直線 L_1 和 L_2 的交角，以 L_1 爲始邊 L_2 爲終邊的有向角。



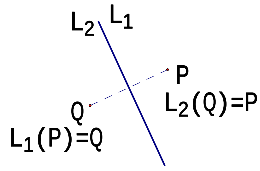
如上圖，直線 L_1 與 L_2 交於 O 點，L_1 以 O 點爲旋轉中心，逆時針方向旋轉 α 角度與 L_2 重疊，此時，L_2 逆時針方向旋轉 $180^\circ-\alpha$ 與 L_1 重疊，以∠L_1,O,L_2＝α (或∠L_1, L_2＝α) ，或∠L_2,O, L_1＝$180^\circ-\alpha$ (或∠L_2, L_1＝$180^\circ-\alpha$) ，來表示此二直線 L_1 和 L_2 的交角。

∠P,O, L 表示以 P 爲起點、直線一點 O 爲頂點、L 爲終邊的有向角。



一、二條直線的情形

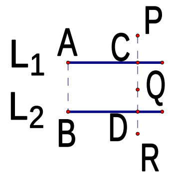
兩條直線可以分成三種情形討論：(1)兩條直線重疊，(2)兩條直線平行，(3) 兩條直線相交於一點。下面分析這三種情形。



(一).若二直線 L_1 與 L_2 重疊($L_1=L_2$)，則對任意一點 P，恆有 P＝ $L_2\ L_1$(P)。

亦即，連續對重疊的二直線作對稱，第二點會和起始點重合，

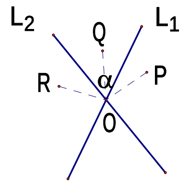
$P_2=L_2\ L_1(P_0)=P_0$ 。



(二).若二直線 L_1 與 L_2 平行($L_1 // L_2$)， $\overline{AB}$ 長為 L_1 與 L_2 間的距離，

且 Q＝ L_1(P)，R＝ L_2(Q)，則 $\overline{PR} // \overline{AB}$ 且 $\overline{PR}=2\,\overline{AB}$ 。

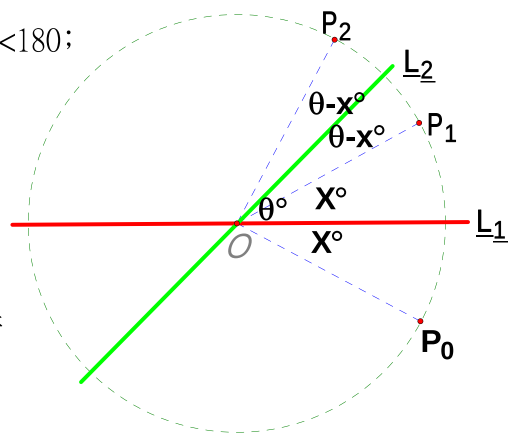
亦即，一點對平行的二直線連續作線對稱，如同沿此二平行線垂直方向作二倍平行線間距離的平移。因此，連續對平行的二直線作對稱，將不會回到起始點（P≠Q），且 L_1 、 L_2 沿著它們垂直方向等距離平移，不會影響起點 P 及終點 R 的位置。



(三).若二直線 L_1 和 L_2 相交於 O 點，交角 $\angle L_1,O,L_2=\theta$ 度，

且 Q＝ L_1(P)，R＝ L_2(Q)，則∠POR＝2 α ，且 $\overline{OP}=\overline{OR}$ 。

亦即，一點對相交的二直線連續作線對稱，如同對交點作二倍夾角角度的旋轉。且 L_1 、 L_2 對交點 O 保持等角旋轉，也不會影響起點 P 及終點 R 的位置。



進一步分析二直線交於一點的情形。

設相交於 O 點的二直線 L_1 和 L_2 的交角 $\angle L_1,O,L_2=\theta$ 度，0< θ <180；

令 $L_1(P_0)=P_1$ ， $L_2(P_1)=P_2$ ， $L_1(P_2)=P_3$ ， $L_2(P_3)=P_4$ ，⋯，

$L_1(P_{2k-2})=P_{2k-1}$ ， $L_2(P_{2k-1})=P_{2k}$ 。

若 $\angle P_0,O,L_1$ ＝x 度，則 $\angle P_0,O,P_1$ ＝2x，

$\angle P_0,O,P_2=\angle P_0,O,P_1+\angle P_1,O,P_2=2(x+\theta-x)=2\theta$ ，

$\angle P_0,O,P_3=\angle P_0,O,P_1+\angle P_1,O,P_3=2x-2\theta$ ，

（因為， $L_2(P_1)=P_2$ ， $L_1(P_2)=P_3$ ， P_3 是由 P_1 對 O 點旋轉二倍的 $\angle L_2,O,L_1=-\theta$ 的旋轉點。）

$\angle P_0,O,P_4=\angle P_0,O,P_2+\angle P_2,O,P_4=2\theta+2\theta=4\theta$ ，

$\angle P_0,O,P_5=\angle P_0,O,P_3+\angle P_3,O,P_5=2x-2\theta-2\theta=2x-4\theta$ ，

$\angle P_0,O,P_6=\angle P_0,O,P_4+\angle P_4,O,P_6=4\theta+2\theta=6\theta$ ，⋯。

整理得

1. $\angle P_0,O,P_m=\angle P_0,O,P_{2k}=2k\theta$ ，m＝2k；

2. $\angle P_0,O,P_m=\angle P_0,O,P_{2k-1}=2x-2(k-1)\theta$ ，m＝2k－1。

P_0 與 P_m 重合的充要條件為 $\angle P_0,O,P_m$ ＝t×360 度，t∈Z。

1.當 m 為偶數時，m＝2k，則 $\angle P_0,O,P_m=\angle P_0,O,P_{2k}=2k\theta$ 。

由重合的充要條件 2kθ=tx360，得 k=tx180／θ。由於 k∈N 且 t∈Z，所以θ∈Q，亦即P_m 要與P_0重合，直線L_1和L_2的交角$\angle L_1,O,L_2=\theta$度的度數θ必須爲有理數。

令θ=a／b，a∈Z，b∈Z，且 a，b 互質，(a,b)=1，則 k=tx180／θ=tx180xb／a。

令 180 和 a 的最大公因數 d=(180, a)，180=dxq_1，a=dxq_2，(q_1,q_2)=1。

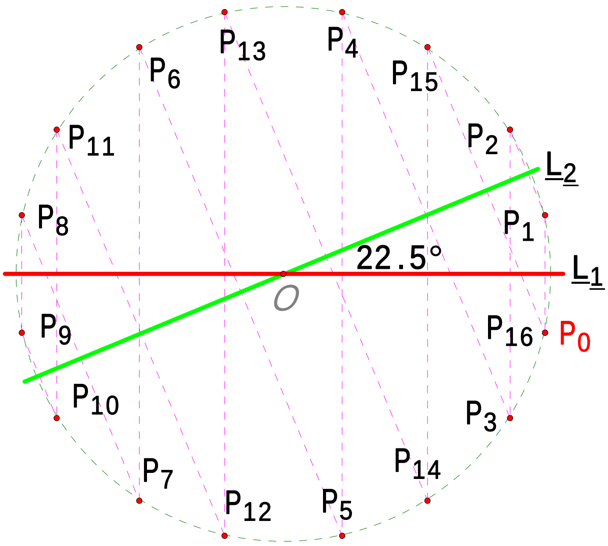
則 k=tx180xb／a=txdx$q_1$xb／dxq_2=tx$q_1$xb／q_2。

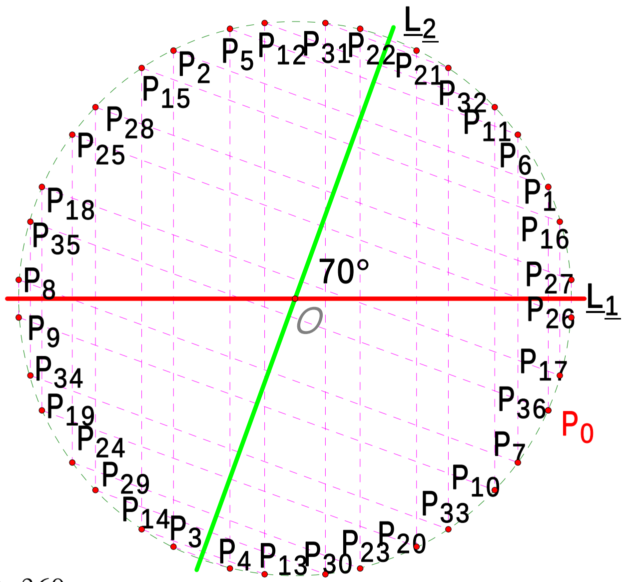
由於 k∈N 且 t∈Z，取 t=q_2 可得最小整數 k=bxq_1。

此時，m=2k=2xbxq_1=2xbx180／d=360xb／(180, a)。

亦即，直線 L_1和 L_2的交角度數θ=a／b 爲有理數，在 **m=360xb／(180, a)時，P_m會與P_0重合。**

但是 42 屆全國科展作品「點的對稱」的主要結果 m=360／(180,θ)，只考慮到 L_1和 L_2的交角度數θ爲整數的情形。下圖是以θ=22.5=45／2 爲例，m=360x2／(180, 45)=16，$P_{16}=P_0$，以及θ=70=70／1 爲例，m=360x1／(180, 70)=36，$P_{36}=P_0$。





2.當 m 爲奇數時，m=2k−1，則 2x−2(k-1)θ=tx360。

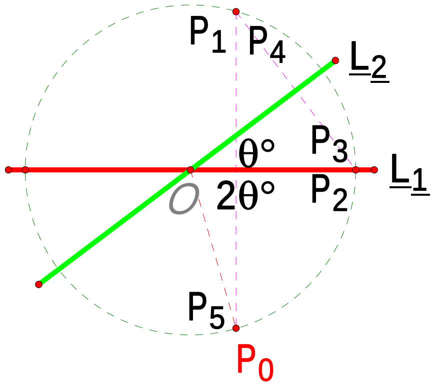
由此得 x−(k-1)θ=tx180，x=tx180+(k-1)θ。

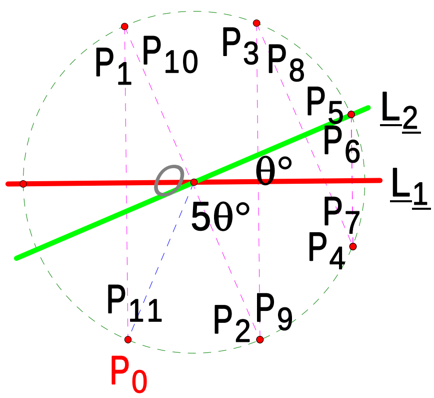
取 t=0 可得最小正整數 x=(k−1)θ。

亦即，當 x=(k−1)θ時，P_m會與P_0重合，其中 m=2k−1。

例如，選取$\angle P_0,O,L_1$=x=4θ度，則P_9會與P_0重合。

選取特殊起始點P_0，滿足$\angle P_0,O,L_1$=x=(k-1)θ，則P_{2k-1}會與P_0重合的情形，在 42 屆全國科展作品「點的對稱」中沒有討論。下圖是以θ=(3−1)θ=2θ爲例，m=2x3−1=5，$P_5=P_0$，以及θ=(6−1)θ=5θ爲例，m=2x6−1=11，$P_{11}=P_0$。





進一步分析二個不同起始點 P_0 、 Q_0 連續對二直線 L_1 、 L_2 作對稱所產生的二組對應點 $P_1 = L_1(P_0)$， $P_2 = L_2(P_1)$， $Q_1 = L_1(Q_0)$， $Q_2 = L_2(Q_1)$。

(一).若二條直線重疊($L_1 = L_2$)，則 P_0 和 P_2 重合（ $P_0 = P_2$ ）而且 Q_0 和 Q_2 重合（ $Q_0 = Q_2$ ）。此時，無論如何選取起點 P_0 ，連續對 L_1 、L_2 作對稱，第二點 P_2 一定會和起點 P_0 重合， $P_2 = P_0$ 。

(二).若二條直線平行($L_1 // L_2$)，則 $\overline{P_0P_2}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_2}$ 的中垂線 L_Q 會平行， $L_P // L_Q$ ，而在此情形下，任意起始點 P_0 對此二直線 L_1 、 L_2 作對稱 $P_2 = L_2\ L_1(P_0)$都不會回到起始點 P_0 ，亦即 $P_2 \neq P_0$ 。

(三).若二條直線相交於 O 點，則 $\overline{P_0P_2}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_2}$ 的中垂線 L_Q 也會交於 O 點。而在此情形下，如果 L_1 、 L_2 相交於點 O，夾角 $\angle L_1, O, L_2 = \theta$ ，$0<\theta<180$，則對於起始點 P_0 ，

1.若 P_0 ＝O，恆有 $P_2 = L_2\ L_1(P_0) = P_0$ ，

2.若 L_1 和 L_2 的夾角 $\angle L_1, O, L_2 = \theta$ 為有理數， θ ＝a／b，a∈Z，b∈Z，(a,b)＝1，
則當 m＝360×b／(180, a) 時， P_m 會與 P_0 重合， $P_m = P_0$ 。

3.若選取起始點 P_0 和直線 L_1 的夾角 $\angle P_0, O, L_1$ ＝(k－1) θ ，
則當 m＝2k－1， P_m 會與 P_0 重合， $P_{2K-1} = P_0$ 。

這種利用二個不同起始點 P_0 、Q_0 所產生的二組對應點的測試方法，我把它叫做**雙重測試法**。

二、三條直線的情形

三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，也可以分成三種情形討論：(1) L_2 、 L_3 兩條直線重疊，(2) L_2 、 L_3 兩條直線平行，(3) L_2 、 L_3 兩條直線相交於一點。下面分析這三種情形。

(一). L_2 、 L_3 兩條直線重疊($L_2 = L_3$)

由於 $L_2 = L_3$ ，則對任意一點 P，恆有 P＝ $L_3\ L_2$ (P)。因此，對於任一起點 P_0 ，連續對 L_1 、L_2 、 L_3 作對稱，得 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = L_1(P_0)$。

(二). L_2 、 L_3 兩條直線平行($L_2 // L_3$)

1.若 L_1 也平行 L_2 ，亦即 $L_1 // L_2 // L_3$ ，則可以將 L_1 、 L_2 沿著它們垂直方向等距離平移，使得 L_2 和 L_3 重疊，而 L_1 平移至 K_1 。因此，對於任一起點 P_0 ，連續對 L_1 、 L_2 、 L_3 作對稱，得 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0)$。

2.若 L_1 不平行 L_2 ，則形成直線 L_1 截二平行線 $L_2 // L_3$ 的情形。

(三). L_2 、 L_3 兩條直線相交於一點 O

1.若 L_1 也和 L_2 交於同一點 O，亦即 L_1 、 L_2 、 L_3 三直線共交於一點，則可以將 L_1 、L_2 對交點 O 保持等角旋轉，使得 L_2 和 L_3 重疊，而 L_1 旋轉至 K_1。因此，對於任一起點 P_0 ，連續對 L_1、L_2 、 L_3 作對稱，得 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0)$。

2.若 L_1 和 L_2 交於另外一點 Q，則可以將 L_1 、L_2 對交點 Q 保持等角旋轉，使得 L_2 旋轉至 K_2 和 L_3 平行，而 L_1 旋轉至 K_1。再令 $K_3 = L_3$ ，對於任一起點 P_0 ，連續對 L_1 、 L_2 、 L_3 作對稱，得 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_3\ K_2\ K_1(P_0)$。形成直線 K_1 截二平行線 $K_2 // K_3$ 的情形。

由上面分析，可以得知一點 P_0 ，連續對 L_1 、 L_2 、 L_3 作對稱，簡化成二種情形：(一）存在一直線 K_1 ，使得 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0)$；(二）存在三直線 K_1 、 K_2 、 K_3 ，其中 $K_2 // K_3$ 而 K_1

和 K_2 不平行，使得 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_3\ K_2\ K_1(P_0)$。

(一).存在一直線 K_1，使得 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0)$

由於 $L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0)$，因此 $P_6 = L_3\ L_2\ L_1\ L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1\ K_1(P_0) = P_0$。亦即，無論如何選取起點 P_0，連續對 L_1、L_2、L_3 作對稱，第六點 P_6 一定會和起點 P_0 重合($P_6 = P_0$)。

也就是說，L_1、L_2、L_3 三直線交於一點的情形，對任一起點 P_0，P_6 都會與 P_0 重合。

如果起點 P_0 選在直線 K_1 上，由 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0) = P_0$，得到第三點 P_3 和起點 P_0 重合。

如何知道連續對 L_1、L_2、L_3 作對稱，可簡化成對一直線 K_1 作對稱，$P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0)$？又如何找到直線 K_1？雙重測試法：

若 $K_1(B_0) = B_1$，$K_1(C_0) = C_1$，則 $\overline{B_0B_1} // \overline{C_0C_1}$ 且 $\overline{B_0B_1}$ 的中垂線 L_B 和 $\overline{C_0C_1}$ 的中垂線 L_C 會重合，$L_B = L_C$。因此，任取相異二點 P_0、Q_0 分別做起始點，連續對 L_1、L_2、L_3 作對稱後，$P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，$Q_3 = L_3\ L_2\ L_1(Q_0)$，若 $\overline{P_0P_3}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_3}$ 的中垂線 L_Q 重合($L_P = L_Q$)，則連續對 L_1、L_2、L_3 作對稱，可簡化成對一直線 K_1 作對稱且此直線 K_1 就是 $\overline{P_0P_3}$ 的中垂線 L_P。

(二).存在三直線 K_1、K_2、K_3，其中 $K_2 // K_3$ 而 K_1 和 K_2 不平行，使得 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_3\ K_2\ K_1(P_0)$。

設 B_0 是任一起始點，$K_1(B_0) = B_1$，$K_2(B_1) = B_2$，$K_3(B_2) = B_3$。由於 $\overline{B_0B_1} \perp K_1$ 而 $\overline{B_1B_3} \perp K_2$，所以 B_3 不會和 B_0 重合，$B_0 \neq B_3$。因此，任取相異二點 P_0、Q_0 分別做起始點，連續對 L_1、L_2、L_3 作對稱後，$P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，$Q_3 = L_3\ L_2\ L_1(Q_0)$，若 $\overline{P_0P_3}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_3}$ 的中垂線 L_Q 不重合，$L_P \neq L_Q$，則連續對 L_1、L_2、L_3 作對稱後的對稱點 P_m，都不會和起點重合，$P_m \neq P_0$。

以下說明三直線共交於一點情形。

設三直線 L_1、L_2、L_3 相交於 O 點，L_1、L_2 交角 $\angle L_1,O,L_2 = \theta$ 度，$0<\theta<180$，L_2、L_3 交角 $\angle L_2O,L_3 = \alpha$ 度，$0<\alpha<180$；令 $L_1(P_0)=P_1$，$L_2(P_1)=P_2$，$L_3(P_2)=P_3$，$L_1(P_3)=P_4$，$L_2(P_4)=P_5$，$L_3(P_5)=P_6$，⋯，$L_1(P_{3k})=P_{3k+1}$，$L_2(P_{3k+1})=P_{3k+2}$，$L_3(P_{3k+2})=P_{3k+3}$。

若 $\angle P_0,O,L_1 = x$，則

$\angle P_0,O,P_1 = 2x$，　$\angle P_0,O,P_2 = 2\theta$，　$\angle P_0,O,P_3 = \angle P_0,O,P_1 + \angle P_1,O,P_3 = 2x + 2\alpha$，

(因爲，$L_2(P_1)=P_2$，$L_3(P_2)=P_3$，亦即 P_3 是由 P_1 對 O 點旋轉二倍的 $\angle L_2O,L_3 = \alpha$ 度的旋轉點。)

$\angle P_0,O,P_4 = \angle P_0,O,P_2 + \angle P_2,O,P_4 = 2\theta - 2(\alpha + \theta) = -2\alpha$，

(因爲，$L_3(P_2)=P_3$，$L_1(P_3)=P_4$ 亦即 P_4 是由 P_2 對 O 點旋轉二倍的 $\angle L_3,O,L_1 = -(\alpha + \theta)$ 度的旋轉點。)

$\angle P_0,O,P_5 = \angle P_0,O,P_3 + \angle P_3,O,P_5 = 2x + 2\alpha + 2\theta$，

$\angle P_0,O,P_6 = \angle P_0,O,P_4 + \angle P_4,O,P_6 = -2\alpha + 2\alpha = 0$。

整理得

1.∠ P_0,O,P_m ＝0，m＝6k；

2.∠ P_0,O,P_m ＝2x，m＝6k＋1；

3.∠ P_0,O,P_m ＝2θ ，m＝6k＋2；

4.∠ P_0,O,P_m ＝2x＋2α ，m＝6k＋3；

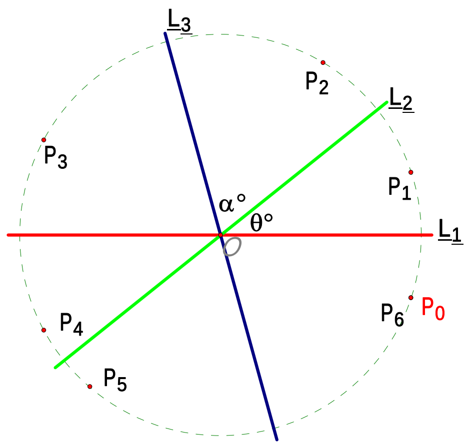
5.∠ P_0,O,P_m ＝－2α ，m＝6k＋4；

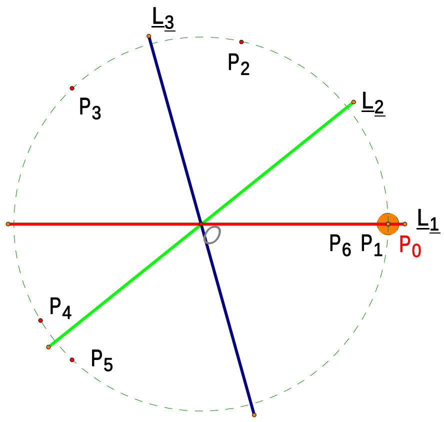
6.∠ P_0,O,P_m ＝2x＋2α ＋2θ ，m＝6k＋5；

P_0與P_m重合的充要條件為∠ P_0,O,P_m ＝tx360 度，t∈Z。

1.當 m＝6k 時，則P_m會與P_0重合，亦即，無論如何P_0選取，P_6一定與P_0重合。

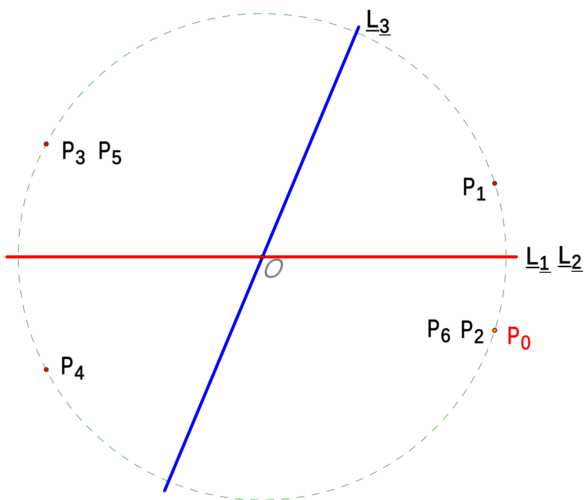
2.當選取P_0使得∠ P_0,O,L_1 ＝x＝0 時，則P_m ，m＝6k＋1，會與P_0重合，亦即，選取P_0在直線 L_1 ，P_1與P_0重合。

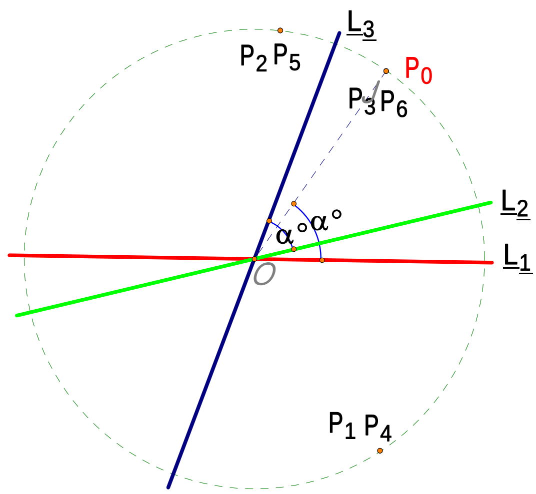




3.當L_1 、 L_2交角∠L1,O,L2＝ θ ＝0 度時，則P_m ，m＝6k＋2，會與P_0重合，亦即，直線L_1和直線L_2重疊時， P_2與P_0重合。

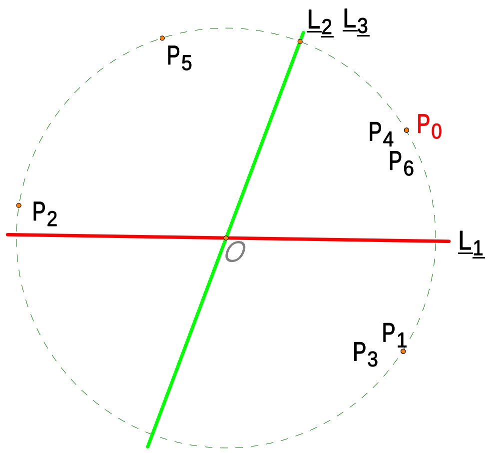
4.當選取P_0使得∠ P_0,O,L_1 ＝x＝180－α 時，則P_m ，m＝6k＋3，會與P_0重合，亦即，選取P_0使得∠ L_1,O, P_0 ＝ α ，P_3與P_0重合。

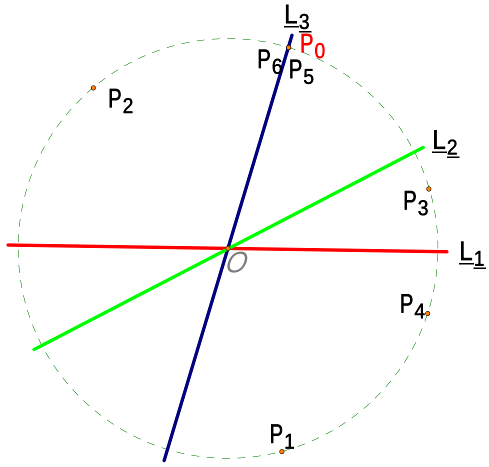




5.當L_2 、 L_3交角∠ L_2,O,L_3 ＝ α ＝0 度時，則P_m ，m＝6k＋4，會與P_0重合，亦即，直線L_2和直線L_3重疊時， P_4與P_0重合。

6.當選取 P_0 使得 $\angle P_0, O, L_1 = x = 180-(\alpha+\theta)$ 時，則 P_m，m＝6k＋5，會與 P_0 重合，亦即，選取 P_0 在直線 L_3，P_5 與 P_0 重合。





排除 2、3、5、6 四種特殊情外，我們可以得到在三條直線共交於一點的情形，對稱 6 次後一定跳回原位，P_6 一定與 P_0 重合。如果適當的選取起始點 P_0 使得 $\angle P_0, O, L_1 = x = 180-\alpha$ 時，亦即 P_0 在 K_1 上，對稱三次即跳回原位，P_3 與 P_0 重合。

三、四條直線的情形

四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4，也可以分成三種情形討論：(1) L_3、L_4 兩條直線重疊，(2) L_3、L_4 兩條直線平行，(3) L_3、L_4 兩條直線相交於一點。下面分析這三種情形。

(一). L_3、L_4 兩條直線重疊($L_3 = L_4$)

由於 $L_3 = L_4$，則對任意一點 P，恆有 P＝$L_4\,L_3$(P)。因此，對於任一起點 P_0，連續對 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，得 $P_4 = L_4\,L_3\,L_2\,L_1(P_0) = L_4\,L_3(L_2\,L_1(P_0)) = L_2\,L_1(P_0)$。因此，在此情形下，連續對四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，可化簡成連續對二條直線 L_1、L_2 作對稱。

(二). L_3、L_4 兩條直線平行($L_3 // L_4$)

1.若 L_1 和 L_2 重疊，亦即 $L_1 = L_2$，則連續對 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，得 $P_4 = L_4\,L_3\,L_2\,L_1(P_0) = L_4\,L_3(L_2\,L_1(P_0)) = L_4\,L_3(P_0)$。因此，在此情形下，連續對四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，可化簡成連續對二條直線 L_3、L_4 作對稱。

2.若 L_1 和 L_2 平行，亦即 $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$，則可以將 L_1、L_2 沿著它們垂直方向等距離平移，使得 L_2 和 L_3 重疊，而 L_1 平移至 K_1。因此，對於任一起點 P_0，連續對 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，得 $P_4 = L_4\,L_3\,L_2\,L_1(P_0) = L_4\,K_1(P_0)$，可化簡成連續對二條直線 K_1、L_4 作對稱。

3.若 L_1 和 L_2 相交於一點 O，則可以先將 L_1、L_2 對交點 O 保持等角旋轉，使得 L_2 和 L_3 平行，而 L_1 旋轉至 K_1。再將 L_3、L_4 沿著它們垂直方向等距離平移，使得 L_2 和 L_3 重疊，而 L_4 平移

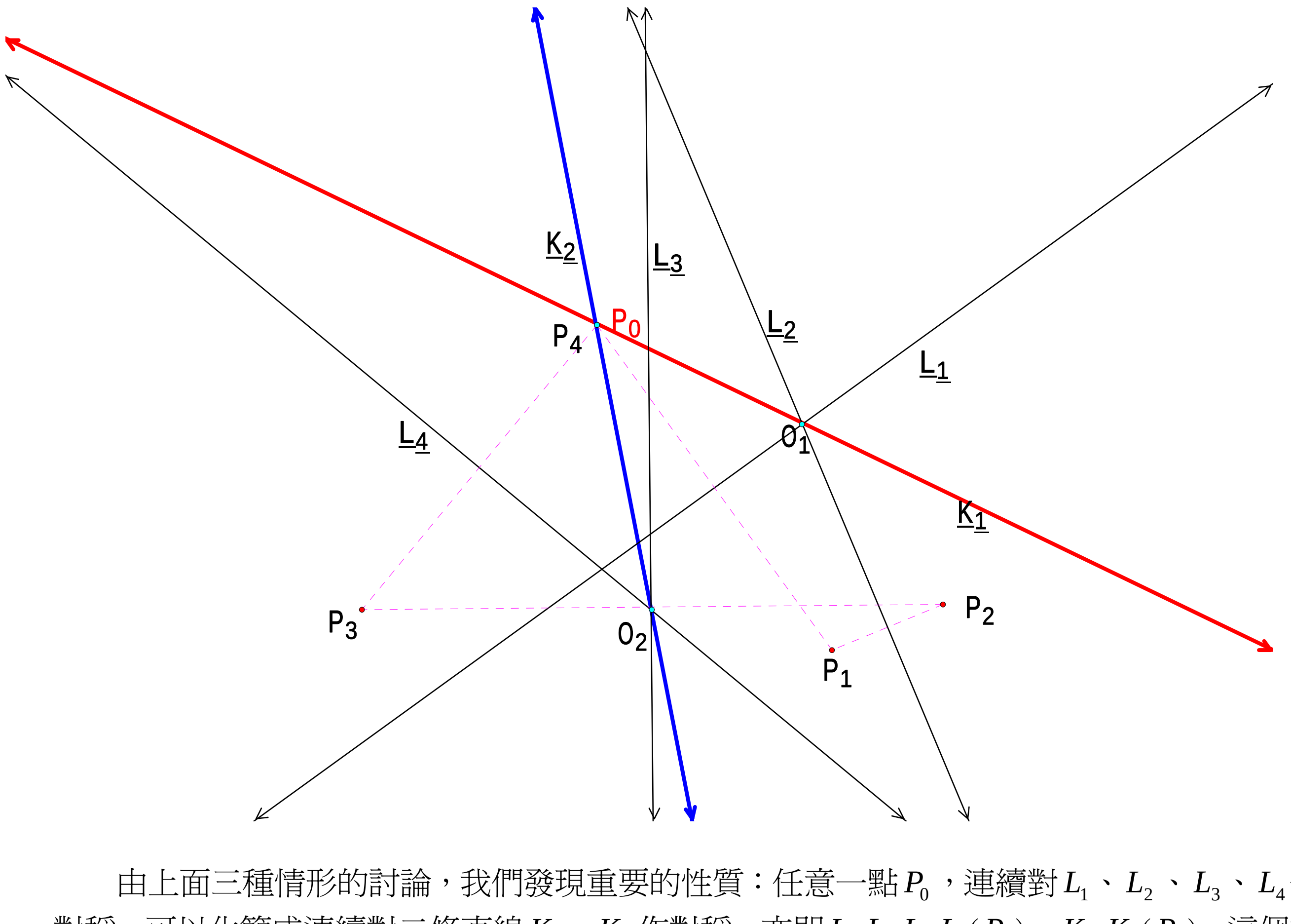
至 K_2。因此，對於任一起點 P_0，連續對 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，得 $P_4 = L_4\,L_3\,L_2\,L_1(P_0)$ $= K_2\,K_1(P_0)$，可化簡成連續對二條直線 K_1、K_2 作對稱。

(三). L_3、L_4 兩條直線相交於一點 O

1.若 L_1 和 L_2 重疊，亦即 $L_1 = L_2$，則連續對 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，得 $P_4 = L_4\,L_3\,L_2\,L_1(P_0)$ $= L_4\,L_3(L_2\,L_1(P_0)) = L_4\,L_3(P_0)$。因此，在此情形下，連續對四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，可化簡成連續對二條直線 L_3、L_4 作對稱。

2.若 L_1 和 L_2 平行，則可以先將 L_3、L_4 對交點 O 保持等角旋轉，使得 L_2 和 L_3 平行，而 L_4 旋轉至 K_2。再將 L_1、L_2 沿著它們垂直方向等距離平移，使得 L_2 和 L_3 重疊，而 L_1 平移至 K_1。因此，對於任一起點 P_0，連續對 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，得 $P_4 = L_4\,L_3\,L_2\,L_1(P_0) = K_2\,K_1(P_0)$，可化簡成連續對二條直線 K_1、K_2 作對稱。。

3.若 L_1 和 L_2 交於一點 Q，則可以先將 L_1、L_2 對交點 Q 保持等角旋轉，使得 L_2 通過 O 點，而 L_1 旋轉至 K_1。再將 L_3、L_4 對交點 O 保持等角旋轉，使得 L_3 通過 Q 點，而 L_4 旋轉至 K_2。此時，L_2 和 L_3 旋轉後重疊在一起，$L_2 = L_3$。因此，對於任一起點 P_0，連續對 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，得 $P_4 = L_4\,L_3\,L_2\,L_1(P_0) = K_2\,K_1(P_0)$，可化簡成連續對二條直線 K_1、K_2 作對稱。如下圖所示：



由上面三種情形的討論，我們發現重要的性質：任意一點 P_0，連續對 L_1、L_2、L_3、L_4 作對稱，可以化簡成連續對二條直線 K_1、K_2 作對稱，亦即 $L_4\,L_3\,L_2\,L_1(P_0) = K_2\,K_1(P_0)$。這個重要性質可以簡化問題。也就是說，偶數條直線作對稱可以簡化成對兩條直線作對稱來討論，奇數條直線作對稱可以簡化成對三條直線作對稱來討論。

陸、研究結果

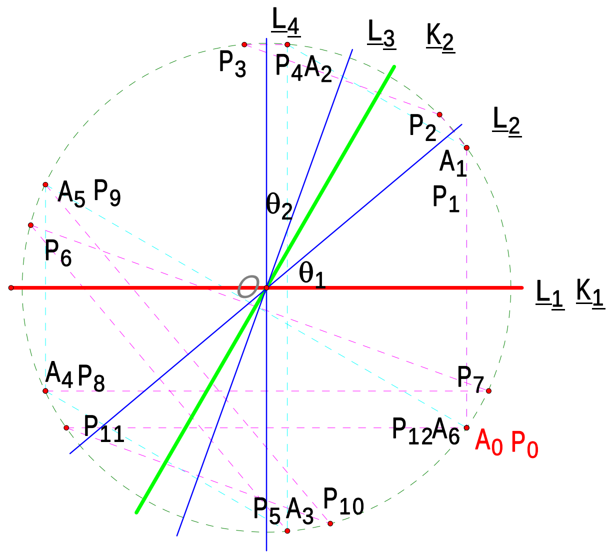
一、偶數條直線的情形

分成共交於一點及不共交於一點的情形討論。

(一).偶數條共交於一點

設相交於 O 點的偶數條直線 L_1、L_2、L_3、L_4、…、L_n，$P_n = L_n \cdots L_3\, L_2\, L_1(P_0)$，表示點 P_0 作關於 L_1 的對稱點 P_1。P_1 又作關於 L_2 的對稱點 P_2，P_2 又作關於 L_3 的對稱點 P_3，…，P_{n-1} 又作關於 L_n 的對稱點 P_n。

點 P_0 對此偶數條直線 L_1、L_2、L_3、L_4、…、L_n 連續作對稱點可簡化成對二條直線 K_1、K_2 作對稱，$K_1 = L_1$。下圖以 4 條直線 L_1、L_2、L_3、L_4 爲例，簡化成對二條直線 K_1、K_2 作對稱。

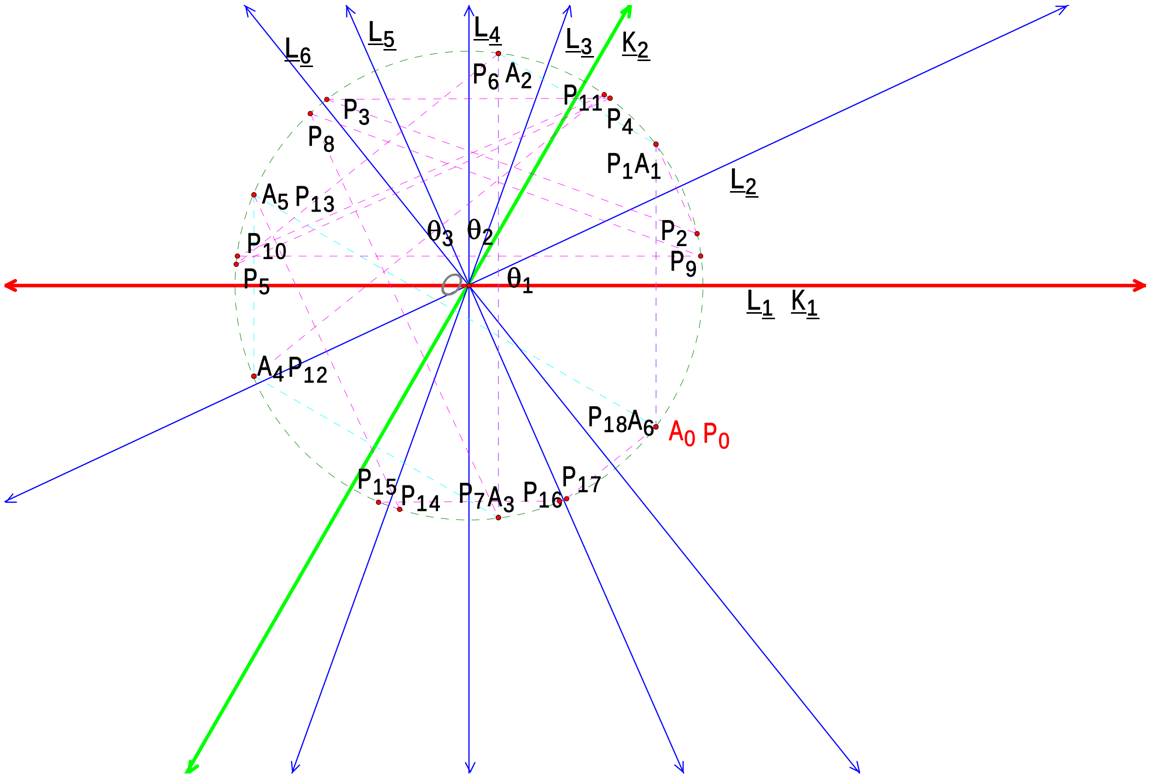


令 $A_0 = P_0$，$K_1(A_0)= A_1$，$K_2(A_1)= A_2$，$K_1(A_2)= A_3$，$K_2(A_3)= A_4$，…，$K_1(A_{2k-2})= A_{2k-1}$，$K_2(A_{2k-1})= A_{2k}$。則可得到對應關係：$A_0 = P_0$，$A_1 = P_1$，$A_2 = P_n$，$A_3 = P_{n+1}$，$A_4 = P_{2n}$，$A_5 = P_{2n+1}$，$A_6 = P_{3n}$，$A_7 = P_{3n+1}$，$A_8 = P_{4n}$，…，$A_{2t} = P_{tn}$，$A_{2t+1} = P_{tn+1}$。

由於連續對二直線 K_1、K_2 作對稱，當 2k＝360xb／(180, a)時，θ＝a／b 爲有理數，A_{2k} 會和 A_0 重合。亦即，在直線 K_1 和 K_2 的交角度數 θ＝a／b 爲有理數，在 m＝360xb／(180, a)時，A_{2k} 會與 A_0 重合。

因此，連續對偶數條直線 L_1、L_2、L_3、L_4、…、L_n 連續作對稱作對稱，當$\angle L_1,O,L_2 + \angle L_3,O,L_4 + \cdots + \angle L_{n-1},O,\ L_n = \theta$＝a／b 爲有理數，在 2K＝360xb／(180, a)時，P_{kn} 會和 P_0 重合。

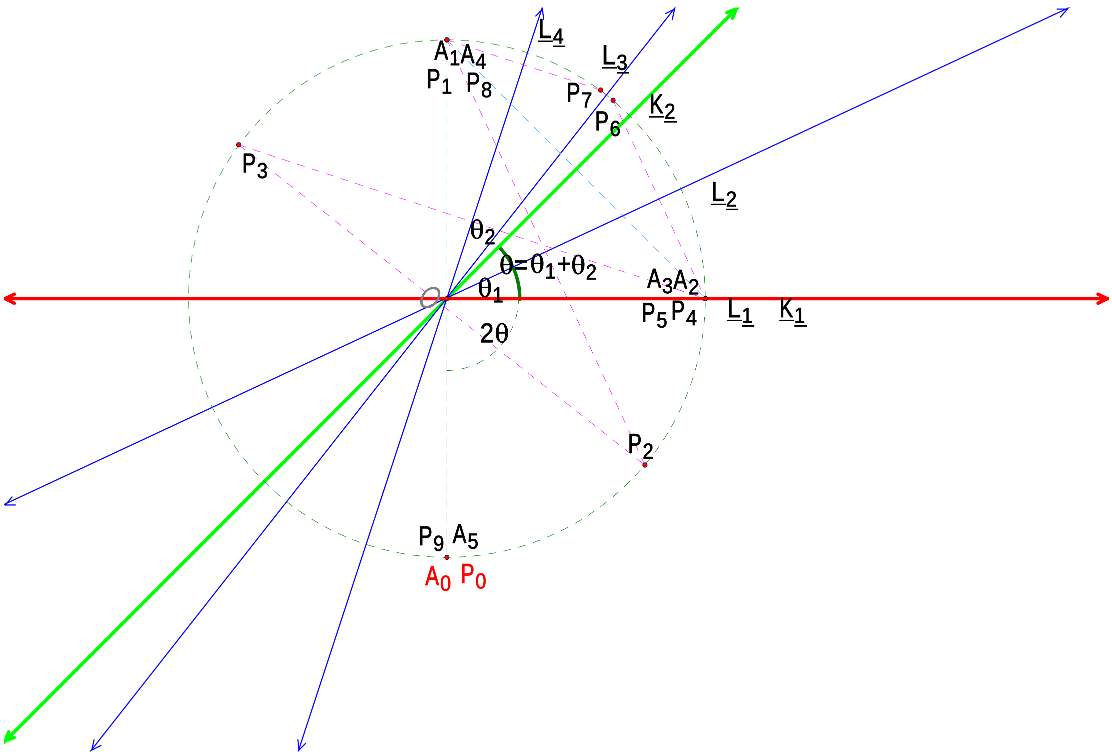
下圖以 6 條直線 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6 爲例，簡化成對二條直線 K_1、K_2 作對稱，其中 $\angle L_1,O,L_2 + \angle L_3,O,L_4 + \angle L_5,O,\ L_6 = \theta$＝60 度。2K＝360x1／(180, 60)＝6，$P_{18} = P_0$。



由於連續對二直線K_1、K_2作對稱，當$\angle A_0,O,K_1 = x = (k-1)\theta$時，則$A_{2k-1}$會和$A_0$重合。
因此，連續對偶數條直線L_1、L_2、L_3、L_4、⋯、L_n連續作對稱作對稱，適當選取起始點P_0，

滿足$\angle P_0,O,L_1 = x = (k-1)\theta$時，則$P_{(k-1)n+1}$會和$P_0$重合。

下圖是以$\angle P_0,O,L_1 = (3-1)\theta = 2\theta$爲例，m=(3-1)x4+1=9，$P_9 = P_0$。



(二).偶數條不共交於一點

由於連續對四條直線作對稱，可以簡化成對二條直線作對稱。因此分析偶數條直線也可以化簡成對二條直線作分析。設點 $P_0 = A_0$ 對此偶數條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、…、 L_n 連續作對稱點 $P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，簡化成對二條直線 K_1 、 K_2 作對稱 $A_2 = K_2\ K_1(A_0)$，$P_n = A_2$ 。我們可以先分析二條直線的情形，再回覆到一般偶數條直線的情形。

討論二個不同起始點 B_0 、 C_0 及所產生的二組對應點 $B_1 = K_1(B_0)$、 $B_2 = K_2(B_1)$、 $C_1 = K_1(C_0)$、 $C_2 = K_2(C_1)$。

1.若二條直線平行，$K_1 // K_2$ ，則 $\overline{B_0B_2}$ 的中垂線 L_B 和 $\overline{C_0C_2}$ 的中垂線 L_C 會平行，$L_B // L_C$ ，而在此情形下，任意起始點 A_0 對此二直線 K_1 、K_2 作對稱 $A_2 = K_2\ K_1(A_0)$都不會回到起始點 A_0 ，亦即 $A_2 \neq A_0$ 。

2.若二條直線相交於 O 點，則 $\overline{B_0B_2}$ 的中垂線 L_B 和 $\overline{C_0C_2}$ 的中垂線 L_C 也會交於 O 點。而在此情形下，若選取起始點 A_0 =O，對此二直線 K_1 、 K_2 作對稱 $A_2 = K_2\ K_1(A_0) = A_0$ =O。
相同的方法應用到一般偶數條直線的情形，選取二相異的起始點 B_0 、 C_0 連續對偶數條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、…、 L_n 作對稱點 $B_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(B_0)$，$C_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(C_0)$後，在做 $\overline{B_0B_n}$ 的中垂線 L_B 和 $\overline{C_0C_n}$ 的中垂線 L_C 。如果此二中垂線相交，則可以選取此交點作爲起始點 P_0 ，連續對 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、…、 L_n 作對稱點 $P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，會回到起始點 P_0 ， $P_n = P_0$ 。使用雙重測試法，以便測出適當的起始點，使得第 n 點會跳回起始點。

二、奇數條直線的情形

分成共交於一點及不共交於一點的情形討論。

(一).奇數條共交於一點

設相交於 O 點的奇數條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、…、 L_n ，n=2m+1，$P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，表示點 P_0 作關於 L_1 的對稱點 P_1 。P_1 又作關於 L_2 的對稱點 P_2 ，P_2 又作關於 L_3 的對稱點 P_3 ，…，P_{n-1} 又作關於 L_n 的對稱點 P_n 。點 P_0 對此奇數條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、…、 L_n 連續作對稱點可簡化成對三條直線 K_1 、 K_2 、 K_3 ，其中 $K_1 = L_1$ ， $K_3 = L_n$ 。

令 $A_0 = P_0$ ， $K_1(A_0)=A_1$ ， $K_2(A_1)=A_2$ ， $K_3(A_2)=A_3$ ， $K_1(A_3)=A_4$ ， $K_2(A_4)=A_5$ ， $K_3(A_5)=A_6$ ，…， $K_1(A_{3k})=A_{3k+1}$ ， $K_2(A_{3k+1})=A_{3k+2}$ ， $K_3(A_{3k+2})=A_{3k+3}$ 。

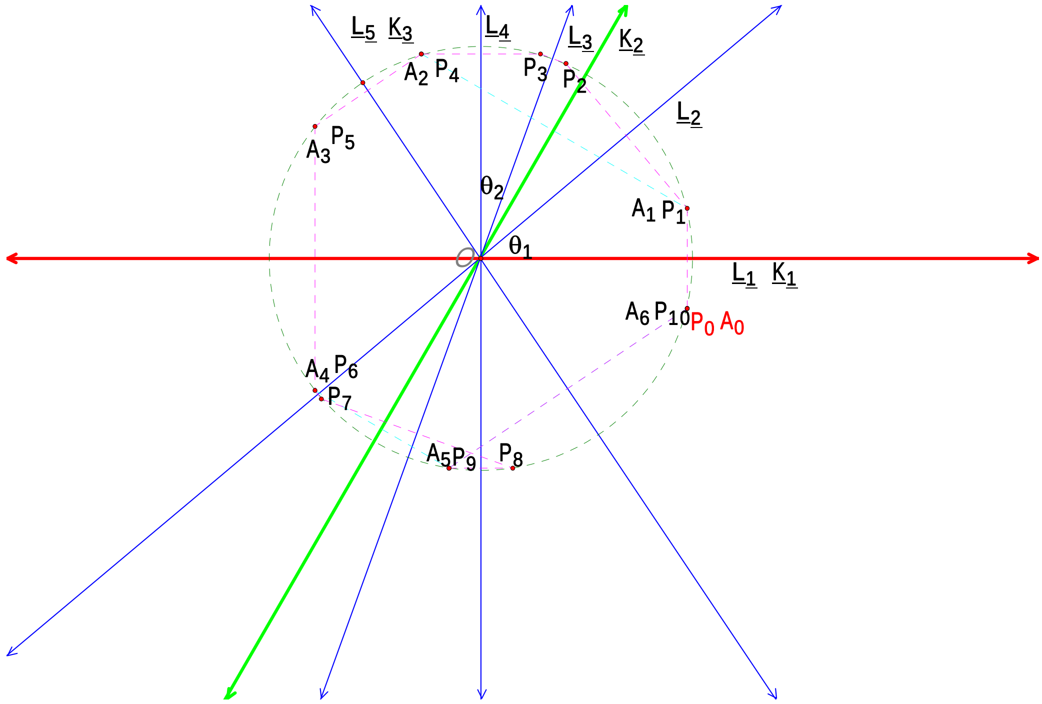
令 $L_1(P_0)=P_1$ ， $L_2(P_1)=P_2$ ， $L_3(P_2)=P_3$ ，…， $L_n(P_{n-1})=P_n$ ， $L_1(P_n)=P_{n+1}$ ， $L_2(P_{n+1})=P_{n+2}$ ， $L_3(P_{n+2})=P_{n+3}$ ，…， $L_n(P_{2n-1})=P_{2n}$ ，…， $L_1(P_{kn})=P_{kn+1}$ ，…。

則可得到對應關係： $A_0 = P_0$ ， $A_1 = P_1$ ， $A_2 = P_{n-1}$ ， $A_3 = P_n$ ， $A_4 = P_{n+1}$ ， $A_5 = P_{n+(n-1)} = P_{2n-1}$ ，

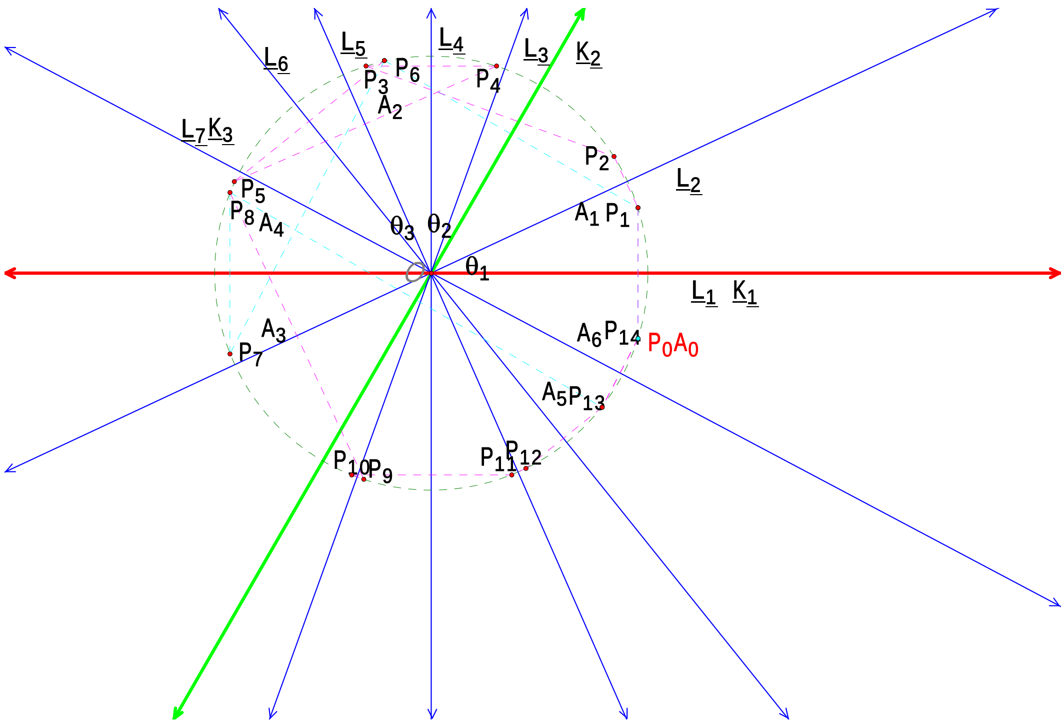
$A_6 = P_{2n}$ ， $A_7 = P_{2n+1}$ ， $A_8 = P_{2n+(n-1)} = P_{3n-1}$ ， $A_9 = P_{3n}$ ，…， $A_{3t} = P_{tn}$ ， $A_{3t+1} = P_{tn+1}$ ， $A_{3t+2} =$

$P_{tn+(n-1)} = P_{(t+1)n-1}$ 。

由於連續對對三條直線 K_1 、 K_2 、 K_3 作對稱，第 6 次會跳回原位， $A_6 = A_0$ 。
因此，對奇數條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、⋯、 L_n ，n＝2m+1，連續作對稱， P_{2n} 會和 P_0 重合。
例如：當連續對 5 條直線作對稱，n＝5，則 $P_{10} = P_0$ 。



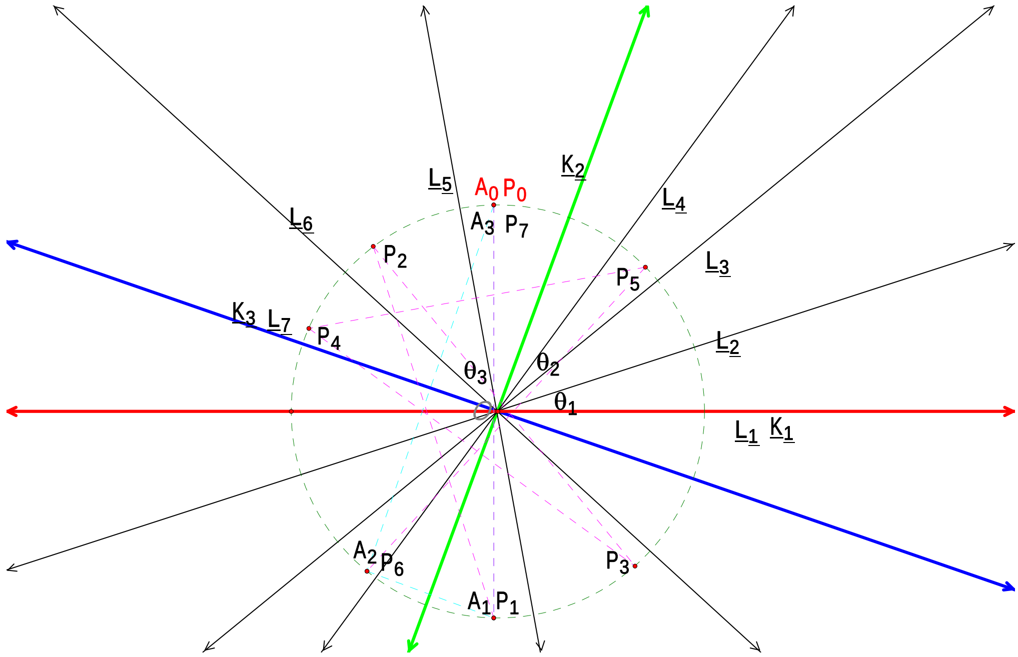
當連續對 7 條直線作對稱，n＝7，則 $P_{14} = P_0$ 。



由於連續對三條直線 K_1 、 K_2 、 K_3 作對稱，當∠ A_0,O,K_1 ＝x＝180－ α 時， α ＝∠ K_2,O,K_3 ， A_3 會和 A_0 重合。

因此，連續對偶數條直線 L_1 、L_2 、L_3 、L_4 、⋯、 L_n 連續作對稱作對稱，適當選取起始點 P_0 ，滿足∠ P_0,O,L_1 ＝x＝180－ α 時，或∠ $L_1,O,P_0=\alpha$ ，則 P_n 會和 P_0 重合。

例如：當連續對 7 條直線作對稱，n=7，選取起始點 P_0 使得∠ $L_1,O,P_0=\alpha=$ ∠ K_2,O,K_3 ，則 $P_7=P_0$ 。



(二).奇數條直線不共交於一點的情形

由於連續對四條直線作對稱，可以簡化成對二條直線作對稱。因此分析奇數條直線也可以化簡成對三條直線作分析。設點 $P_0=A_0$ 對此奇數條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、⋯、 L_n 連續作對稱點 $P_n=L_n\cdots L_3\,L_2\,L_1(P_0)$，簡化成對三條直線 K_1 、 K_2 、 K_3 作對稱 $A_3=K_3\,K_2\,K_1(A_0)$， $P_n=A_3$ 。如同偶數條直線的情形，我們可以用雙重測試法先分析三條直線的情形，再回覆到一般奇數條直線的情形。

雙重測試法：

1. 三條直線再化簡成一直線 K_1 的情形

若 $K_1(B_0)=B_1$ ， $K_1(C_0)=C_1$ ，則 $\overline{B_0B_1}\,//\,\overline{C_0C_1}$ 且 $\overline{B_0B_1}$ 的中垂線 L_B 和 $\overline{C_0C_1}$ 的中垂線 L_C 會重合， $L_B=L_C$ 。因此，任取相異二點 P_0 、 Q_0 分別做起始點，連續對奇數條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、⋯、 L_n 作對稱後， $P_n=L_n\cdots L_3\,L_2\,L_1(P_0)$， $Q_n=L_n\cdots L_3\,L_2\,L_1(Q_0)$，若 $\overline{P_0P_n}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_n}$ 的中垂線 L_Q 重合($L_P=L_Q=K_1$)，則選取起始點 P_0 在中垂線 L_P 上連續對 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、⋯、 L_n 作對稱，會回到起始點 $P_0=P_n=L_n\cdots L_3\,L_2\,L_1(P_0)$。

2. 三直線 K_1 、 K_2 、 K_3 ，其中 $K_2\,//\,K_3$ 而 K_1 和 K_2 不平行的情形

設 B_0 是任一起始點， $K_1(B_0)=B_1$ ， $K_2(B_1)=B_2$ ， $K_3(B_2)=B_3$ 。由於 $\overline{B_0B_1}\perp K_1$ 而 $\overline{B_1B_3}\perp$

K_2，所以 B_3 不會和 B_0 重合，$B_0 \neq B_3$。因此，任取相異二點 P_0、Q_0 分別做起始點，連續連續對奇數條直線 L_1、L_2、L_3、L_4、…、L_n 作對稱後，$P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，$Q_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(Q_0)$，若 $\overline{P_0P_n}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_n}$ 的中垂線 L_Q 不重合，$L_P \neq L_Q$，則任一起始點 P_0 連續對 L_1、L_2、L_3、L_4、…、L_n 作對稱後的對稱點 P_m，都不會和起點重合，$P_m \neq P_0$。

柒、討論

由於連續對 n 條直線 L_1、L_2、L_3、L_4、…、L_n 作線對稱可依 n 為偶數或奇數化簡成對 2 條或 3 條直線作線對稱。當分析任意一點 P 連續對 n 條直線作線對稱，在什麼條件下，會重合到起始點時，可以化簡成 2 條或 3 條直線的情形討論。我們將所分析的性質，整理成下列結果。

一. 設二個不同起始點 P_0、Q_0 連續對二直線 L_1、L_2 作對稱所產生的二組對應點 $P_1 = L_1(P_0)$，$P_2 = L_2(P_1)$，$Q_1 = L_1(Q_0)$，$Q_2 = L_2(Q_1)$。

(一).若 P_0 和 P_2 重合（$P_0 = P_2$）且 Q_0 和 Q_2 重合（$Q_0 = Q_2$），則此二條直線重疊($L_1 = L_2$)。

(二).若 $\overline{P_0P_2}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_2}$ 的中垂線 L_Q 平行，$L_P // L_Q$，則此二條直線平行($L_1 // L_2$)。

(三).若 $\overline{P_0P_2}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_2}$ 的中垂線 L_Q 交於 O 點，則此二條直線也交於 O 點。

二. 設點 P_0 連續對二直線 L_1、L_2 作對稱的第 m 次的對稱點為 $P_m = L_j \cdots L_2\ L_1\ L_2\ L_1(P_0)$，j＝1,2。

(一).若 L_1、L_2 重疊（$L_1 = L_2$），則對任意一點 P_0，P_2 會與 P_0 重合，$P_2 = L_2\ L_1(P_0) = P_0$。

(二).若 L_1、L_2 平行（$L_1 // L_2$），則對任意一點 P_0，P_2 不會與 P_0 重合，$P_2 = L_2\ L_1(P_0) \neq P_0$。

(三).若 L_1、L_2 相交於點 O，夾角 $\angle L_1, O, L_2 = \theta$，$0 < \theta < 180$，則

1.若 P_0＝O，恆有 $P_2 = L_2\ L_1(P_0) = P_0$，

2.若 L_1 和 L_2 的夾角 $\angle L_1, O, L_2 = \theta$ 為有理數，θ＝a／b，a∈Z，b∈Z，(a,b)＝1，
則當 m＝360×b／(180, a) 時，P_m 會與 P_0 重合，$P_m = P_0$。

3.若選取起始點 P_0 和直線 L_1 的夾角 $\angle P_0, O, L_1 = (k-1)\theta$，
則當 m＝2k－1，P_m 會與 P_0 重合，$P_{2K-1} = P_0$。

三. 設二個不同起始點 P_0、Q_0 連續對二直線 L_1、L_2、L_3 作對稱所產生的二組對應點 $P_1 = L_1(P_0)$，$P_2 = L_2(P_1)$，$P_3 = L_3(P_1)$，$Q_1 = L_1(Q_0)$，$Q_2 = L_2(Q_1)$，$Q_3 = L_3(Q_2)$。

(一).若 $\overline{P_0P_3}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_3}$ 的中垂線 L_Q 重合($L_P = L_Q$)，則連續對 L_1、L_2、L_3 作對稱，

可簡化成對一直線 K_1 作對稱且此直線 K_1 就是 $\overline{P_0P_3}$ 的中垂線 L_P。

(二).若 $\overline{P_0P_3}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_3}$ 的中垂線 L_Q 不重合，$L_P \neq L_Q$，則存在三直線 K_1、K_2、K_3，

其中$K_2 // K_3$而K_1和K_2不平行，使得$P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_3\ K_2\ K_1(P_0)$。

四. 設點P_0連續對二直線L_1、L_2、L_3作對稱的第 m 次的對稱點爲

$P_m = L_j \cdots L_3\ L_2\ L_1\ L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，j＝1,2,3。

(一).若存在一直線K_1，使得$P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0)$，則任一起點$P_0$，連續對$L_1$、$L_2$、$L_3$作對稱，第六點$P_6$一定會和起點$P_0$重合($P_6 = P_0$)。如果起點$P_0$選在直線$K_1$上，則第三點$P_3$和起點$P_0$重合。

(二).若存在三直線K_1、K_2、K_3，其中$K_2 // K_3$而K_1和K_2不平行，使得$P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_3\ K_2\ K_1(P_0)$，則任一起點$P_0$，連續對$L_1$、$L_2$、$L_3$作對稱，都不會和起點$P_0$重合。

五. 任意一點點P_0，連續對L_1、L_2、L_3、L_4作對稱，可以化簡成連續對二條直線K_1、K_2作對稱，亦即$L_4\ L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_2\ K_1(P_0)$。

六. 設點P_0對偶數條直線L_1、L_2、L_3、L_4、…、L_n連續作對稱點，則可簡化成對二條直線K_1、K_2作對稱。若$A_0 = P_0$，$K_1(A_0)=A_1$，$K_2(A_1)=A_2$，$K_1(A_2)=A_3$，$K_2(A_3)=A_4$，…，$K_1(A_{2k-2})=A_{2k-1}$，$K_2\ (A_{2k-1})=A_{2k}$，則可得到對應關係：$A_0 = P_0$，$A_1 = P_1$，$A_2 = P_n$，$A_3 = P_{n+1}$，$A_4 = P_{2n}$，$A_5 = P_{2n+1}$，$A_6 = P_{3n}$，$A_7 = P_{3n+1}$，$A_8 = P_{4n}$，…，$A_{2t} = P_{tn}$，$A_{2t+1} = P_{tn+1}$。

七. 設二個不同起始點P_0、Q_0連續對偶數條直線L_1、L_2、L_3、L_4、…、L_n連續作對稱所產生的二組對應點，$P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，$Q_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(Q_0)$。

(一).若P_0和P_n重合（$P_0 = P_n$）且Q_0和Q_n重合（$Q_0 = Q_n$），則可化簡爲二條重疊直線K_1、$K_2(K_1 = K_2)$，使得$P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_2\ K_1(P_0)$。

(二).若$\overline{P_0P_n}$的中垂線L_P和$\overline{Q_0Q_n}$的中垂線L_Q平行，$L_P // L_Q$，則可化簡爲二條平行直線K_1、$K_2(K_1 // K_2)$，使得$P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_2\ K_1(P_0)$。

(三).若$\overline{P_0P_n}$的中垂線L_P和$\overline{Q_0Q_n}$的中垂線L_Q交於 O 點，則可化簡爲交於 O 二條點直線K_1、K_2，使得$P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_2\ K_1(P_0)$。

八. 設點P_0連續對偶數條直線L_1、L_2、L_3、L_4、…、L_n作對稱，化簡成對二條直線K_1、K_2作對稱，使得$P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_2\ K_1(P_0)$。

(一).若K_1、K_2重疊（$K_1 = K_2$），則對任意起點P_0，P_n會與P_0重合，$P_n = P_0$。

(二).若K_1、K_2平行（$K_1 // K_2$），則對任意一點P_0，P_n不會與P_0重合，$P_n \neq P_0$。

(三).若K_1、K_2相交於點 O，夾角$\angle K_1, O, K_2 = \theta$，$0 < \theta < 180$，則

1.若P_0＝O，恆有$P_n = P_0$，

2.若K_1和K_2的夾角$\angle K_1, O, K_2 = \theta$爲有理數，$\theta$＝a／b，a∈Z，b∈Z，(a,b)＝1，
則當 2K＝360×b／(180, a) 時，P_{kn}會與P_0重合，$P_{kn} = P_0$。

3.若選取起始點P_0和直線K_1的夾角$\angle P_0, O, K_1$＝(k－1)θ，

則當 m＝(k－1)n＋1，P_m 會與 P_0 重合，$P_{(k-1)n+1} = P_0$ 。

九. 設二個不同起始點 P_0、Q_0 連續對奇數條直線 L_1、L_2、L_3、L_4、⋯、L_n 連續作對稱所產生的二組對應點，$P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，$Q_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(Q_0)$。

(一).若 $\overline{P_0P_n}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_n}$ 的中垂線 L_Q 重合，$L_P = L_Q$，則可化簡爲對一條直線 K_1（K_1 $= L_P = L_Q$）作對稱，使得 $P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0)$。

(二).若 $\overline{P_0P_n}$ 的中垂線 L_P 和 $\overline{Q_0Q_n}$ 的中垂線 L_Q 不重合，$L_P \neq L_Q$，則可化簡爲對三條直線 K_1、K_2、K_3 作對稱，其中 $K_2 // K_3$ 而 K_1 和 K_2 不平行，使得 $P_3 = L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_3\ K_2\ K_1(P_0)$。

十. 設點 P_0 連續對奇數條直線 L_1、L_2、L_3、L_4、⋯、L_n 作對稱的第 m 次的對稱點爲

$P_m = L_j \cdots L_3\ L_2\ L_1\ L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0)$，j＝1,2,3⋯,n。

(一).若存在一直線 K_1，使得 $P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0) = K_1(P_0)$，則任一起點 P_0，連續對 L_1、L_2、L_3 、L_4、⋯、L_n 作對稱，第 2n 點 P_{2n} 一定會和起點 P_0 重合($P_{2n} = P_0$)。如果起點 P_0 選在直 線 K_1 上，則第 n 點 P_n 和起點 P_0 重合($P_n = P_0$)。

(二).若存在三直線 K_1、K_2、K_3，其中 $K_2 // K_3$ 而 K_1 和 K_2 不平行，使得 $P_n = L_n \cdots L_3\ L_2\ L_1(P_0)$ $= K_3\ K_2\ K_1(P_0)$，則任一起點 P_0，連續對 L_1、L_2、L_3、L_4、⋯、L_n 作對稱，都不會和起點 P_0 重合，$P_n \neq P_0$ 。

捌、結論

我們研究的主題主要在探討在一個平面上給定 n 條直線 L_1、L_2、$L_3 \cdots L_n$，若有一點 P_0，作關於 L_1 的對稱點 P_1。P_1 又作關於 L_2 的對稱點 P_2，P_2 又作關於 L_3 的對稱點 P_3，⋯，P_{n-1} 又作關於 L_n 的對稱點 P_n，P_n 又作關於 L_1 的對稱點 P_{n+1}，如此反覆對直線 L_1、L_2、$L_3 \cdots L_n$ 對稱點 P_1、P_2、$P_3 \cdots$，P_m，在什麼條件下 P_m 會和 P_0 重合。這個問題在第 42 屆全國科展中作品「點的對稱」只討論兩條相交的直線 L_1、L_2 的情形。我們先從二條、三條、四條直線的情形開始研究，再逐步推展到一般的 n 條直線的情形。

在研究過程中，從線對稱性質，分析四條直線情形，發現任一點依序對四條直線作線對稱，可以簡化成依序對二條直線作線對稱。這個重要性質，對 n 條直線連續作線對稱可依 n 爲偶數或奇數化簡成對 2 條或 3 條直線作線對稱。當分析任意一點 P 連續對 n 條直線作線對稱，在什麼條件下，會重合到起始點時，可以化簡成 2 條或 3 條直線的情形討論。

分析 2 條以及 3 條直線的情形後，發展出一種雙重起始點測試法，對給定 n 條直線，會重合到起始點的的條件以及作圖法。

玖、參考資料及其他

1.

1. 南一版高中數學第一冊 4-4 線對稱、平移。
2. 南一版數學甲（上）3-2 直線的旋轉基本概念。
3. 中華民國第四十二屆全國科展作品「點的對稱」。

040404

1.

2.