壹、 摘要

針對三角形ΔABC，以其三邊為底，同時向外或向內作三個相似等腰三角形$\Delta A'BC$、$\Delta AB'C$、$\Delta ABC'$，我們發現$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線交於一點——「第六個心」。其實，第六個心並非由ΔABC所決定唯一的一點，乃是隨等腰三角形$\Delta A'BC$、$\Delta AB'C$、$\Delta ABC'$的變動而有所不同。

隨等腰三角形$\Delta A'BC$、$\Delta AB'C$、$\Delta ABC'$的變動，第六個心在平面上形成的軌跡為等軸雙曲線〔漸近線互相垂直〕，並且通過ΔABC的三頂點、重心以及垂心。我們研究的範圍包括：雙曲線的無窮遠點、$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$交於無窮遠點的判別條件、尤拉線的推廣等。

為了研究以上主題，我們引進了一些額外的數學工具，如投影平面、barycentric coordinate。藉由這些工具的使用，我們得以發掘定理背後的數學結構，並且簡化計算過程，增加文章的可讀性。

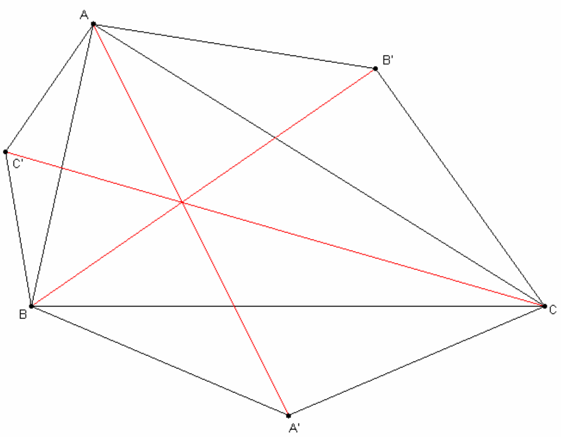
貳、 研究動機

幾何學有許多命題簡單、直觀足以理解的問題，而三角形的諸多性質經常做為中學幾何的入門教材，特別是關於外心、內心、重心、垂心、旁心的各種定理經常出現在課程中。因此我們決定以三角形「五心」以外的「心」做為研究題材，並將「五心」的一些幾何性質推廣至較一般的情況。

近來由於電腦繪圖工具的發展，許多古典幾何的命題可以用具體的圖像來呈現，增進了我們對這些命題的了解。從大量繪製的電腦圖像我們也可能看見一些數學現象，如何適當地闡述並嚴格地證明這些現象，是我們主要的研究方向。

參、 研究目的

一、以給定三角形ΔABC的三邊為底邊向外〔或向內〕作相似等腰三角形$\Delta A'BC$、$\Delta AB'C$、$\Delta ABC'$證明$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$共點的猜想，如下圖。



二、研究相似等腰三角形$\Delta A'BC$、$\Delta AB'C$、$\Delta ABC'$底角變動時$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線交點在平面上形成的軌跡。

肆、 研究方法

一、經由觀察特例（如：等腰直角三角形、角度 30°,60°,90°的直角三角形、邊長 3:4:5 的直角三角形）提出猜想。

二、利用 GSP 大量作圖，檢驗猜想是否合理。

三、運用幾何的常用定理（如：孟氏定理、西瓦定理）以及解析幾何、向量、矩陣等工具證明提出的猜想。

伍、 研究結果

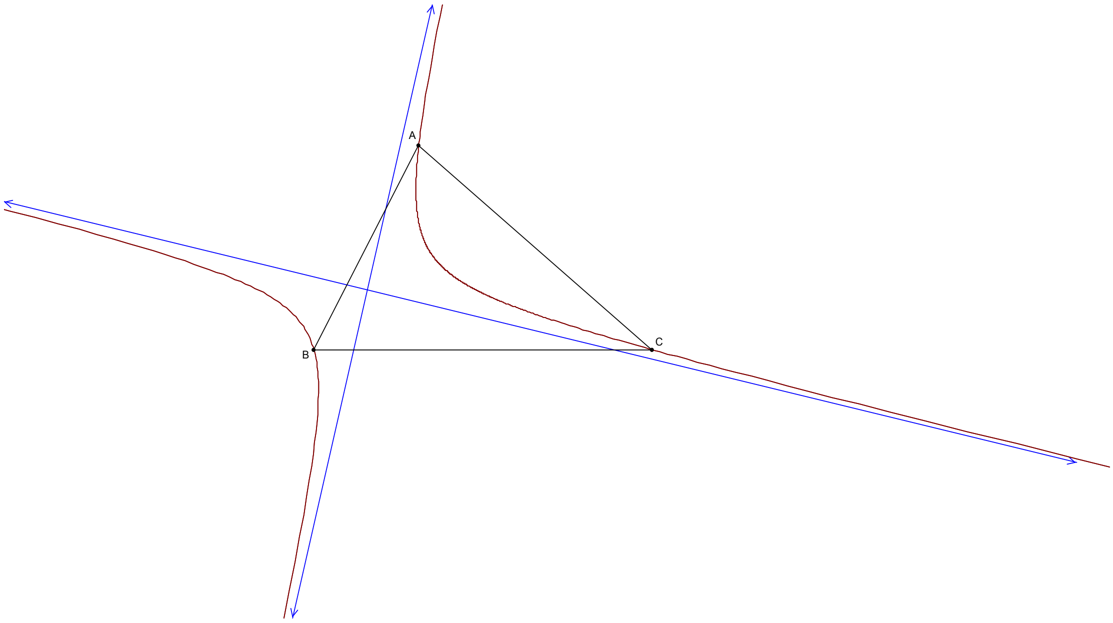
一、以給定三角形ΔABC的三邊爲底邊、並以θ〔$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$〕爲底角作相似等腰三角形$\Delta A'BC$、$\Delta AB'C$、$\Delta ABC'$，則$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線共點或平行〔交於無窮遠點〕。其中$\theta>0$代表等腰三角形向外，$\theta<0$代表等腰三角形向內，$\theta=0$時等腰三角形的頂點在$\Delta ABC$上，$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$時等腰三角形的頂點在無窮遠。$\Delta ABC$的重心和垂心是我們結果的特例。

二、$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線平行的充要條件爲

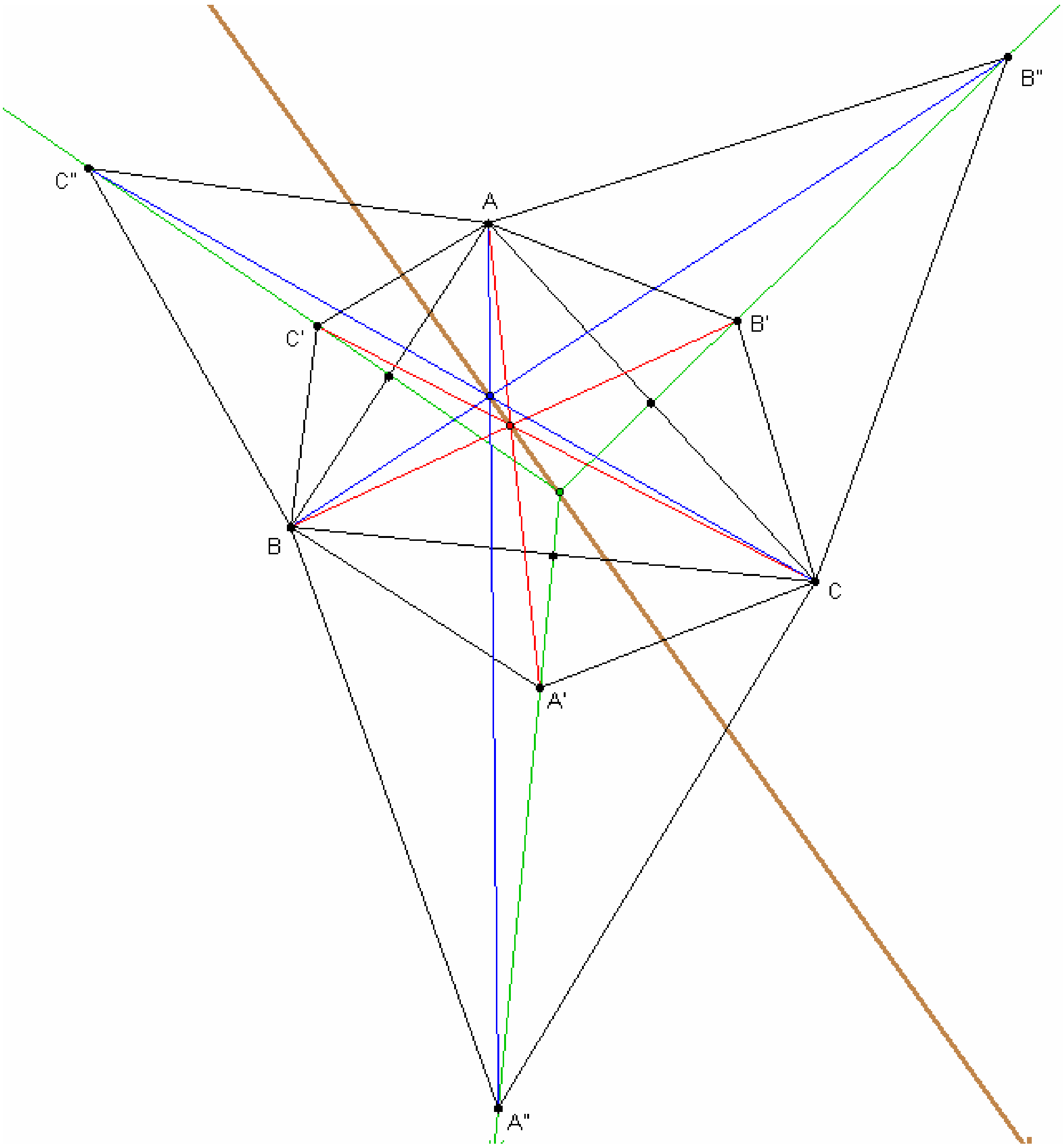
$$\tan\theta=\frac{-\left(a^2+b^2+c^2\right)\pm\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-48{S_\Delta}^2}}{4S_\Delta}$$

其中a、b、c分別爲$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$線段長，S_Δ爲ΔABC面積。

三、假設ΔABC不是等腰三角形，隨θ變動，$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線交點在平面上的軌跡爲一等軸雙曲線〔如下頁圖〕。



四、令等腰三角形$\Delta A'BC$、$\Delta AB'C$、$\Delta ABC'$底角爲θ時，$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$的交點爲P_θ，則ΔABC外心與相異兩點P_{θ_1}、P_{θ_2}共線的充要條件爲$\theta_1+\theta_2=\pm\dfrac{\pi}{2}$〔如下頁圖〕。當$\theta_1=0$且$\theta_2=\pm\dfrac{\pi}{2}$時，$P_{\theta_1}$〔重心〕、$P_{\theta_2}$〔垂心〕與外心共線，此特例即爲尤拉線。



陸、 討論

文章中$\Re$代表實數形成的集合。我們將用命題一和引理一證明$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線共點或平行。

命題一

D、E、F分別為ΔABC三邊延長線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的點，若$0 \neq r_1, r_2, r_3 \in \Re$且$\overrightarrow{BD} = r_1 \overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{CE} = r_2 \overrightarrow{EA}$、$\overrightarrow{AF} = r_3 \overrightarrow{FB}$，則以下敘述成立。

1. *廣義西瓦定理*

$\overleftrightarrow{AD}$ 、$\overleftrightarrow{BE}$ 、$\overleftrightarrow{CF}$ *共點或平行之充要條件爲* $r_1r_2r_3=1$

2. *廣義孟氏定理*

D 、E 、F *共線之充要條件爲* $r_1r_2r_3=-1$

3. $\overleftrightarrow{AD}$ 、$\overleftrightarrow{BE}$ 、$\overleftrightarrow{CF}$ *互相平行之充要條件爲* $r_1r_2r_3=1$ *且* $r_2r_3+r_2+1=0$

原西瓦及孟氏定理的敘述中，D 、E 、F 必須在 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$ 線段上，

但此二定理可推廣爲允許 D 、E 、F 落在 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{AC}$ 、$\overleftrightarrow{AB}$ 直線上，其證明方法與原定理略同，在此省略。此命題第三個敘述 $r_2r_3+r_2+1=0$ 的條件表面看來 r_1 ，r_2 ，r_3 地位好像不等，但在 $r_1r_2r_3=1$ 成立的條件下，

$r_1r_2+r_1+1=0$

$r_3r_1+r_3+1=0$

$r_2r_3+r_2+1=0$

三式實爲等價。譬如可將第一式乘以 r_3

得 $r_1r_2r_3+r_1r_3+r_3=0$

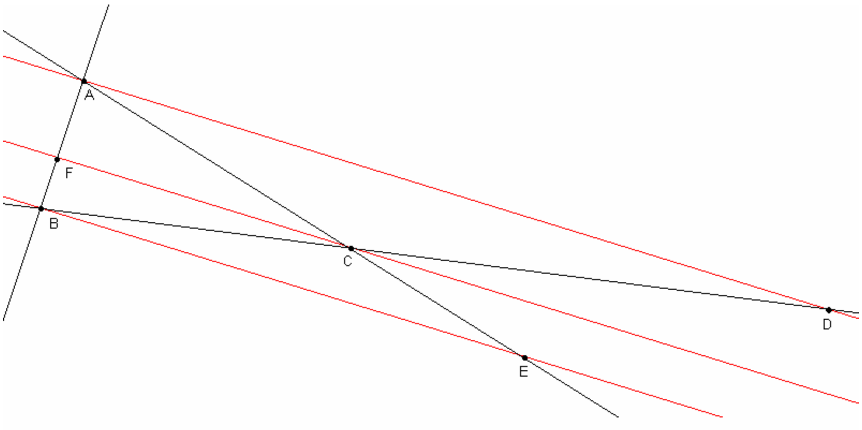
$\because r_1r_2r_3=1$

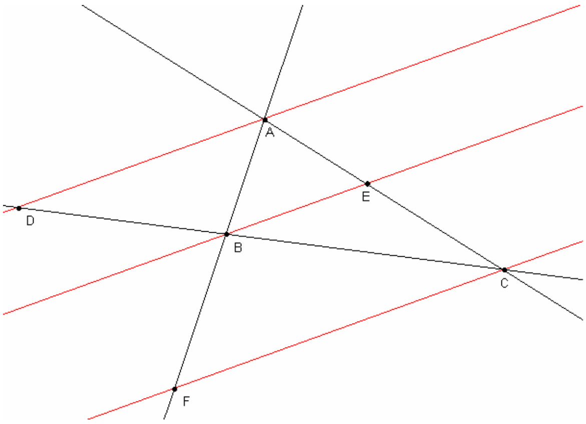
$\therefore r_3r_1+r_3+1=0$

同理，若第二式成立則第三式成立，第三式成立則第一式成立。

命題一證明

首先，假設 $\overleftrightarrow{AD}$ 、$\overleftrightarrow{BE}$ 、$\overleftrightarrow{CF}$ 三線平行〔如下頁兩圖，F 分別在 $\overline{AB}$ 線段上或線段外〕，我們將證明兩個等式成立。證明中用到的 $\overrightarrow{FB}\neq 0$ 可從 $\overrightarrow{AF}=r_3\overrightarrow{FB}$ 得到。





根據假設$\overrightarrow{CE}=r_2\overrightarrow{EA}$且$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$平行

$\overrightarrow{FB}=r_2\overrightarrow{BA}$　　　(1)

同理，根據$\overrightarrow{BD}=r_1\overrightarrow{DC}$且$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$平行

$\overrightarrow{BA}=r_1\overrightarrow{AF}$　　　(2)

將(2)代入(1)

得$\overrightarrow{FB}=r_2\overrightarrow{BA}=r_1r_2\overrightarrow{AF}$

又根據假設$\overrightarrow{AF}=r_3\overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{FB}=r_1r_2\overrightarrow{AF}=r_1r_2r_3\overrightarrow{FB}$

因此第一個等式$r_1r_2r_3=1$成立。

接著我們證明第二個等式。

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}$

$$= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE}$$
$$= \overrightarrow{AE} - r_2\overrightarrow{EA}$$
$$= \left(r_2 + 1\right)\overrightarrow{AE} \qquad (3)$$

根據(3)式且 $\overleftrightarrow{BE}$ 、 $\overleftrightarrow{CF}$ 平行

$$\overrightarrow{AF} = \left(r_2 + 1\right)\overrightarrow{AB}$$
$$= \left(r_2 + 1\right)\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}\right)$$
$$= \left(r_2 + 1\right)\left(r_3\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FB}\right)$$
$$= \left(r_2 + 1\right)\left(r_3 + 1\right)\overrightarrow{FB}$$

又根據 $\overrightarrow{AF} = r_3\overrightarrow{FB}$

$$r_3\overrightarrow{FB}$$
$$= \overrightarrow{AF}$$
$$= \left(r_2 + 1\right)\left(r_3 + 1\right)\overrightarrow{FB}$$
$$\therefore r_3 = \left(r_2 + 1\right)\left(r_3 + 1\right) = r_2r_3 + r_2 + r_3 + 1$$

因此第二個等式 $r_2r_3 + r_2 + 1 = 0$ 成立。

現在假設兩個等式 $r_1r_2r_3 = 1$ 、 $r_2r_3 + r_2 + 1 = 0$ 成立，我們將證明三線平行。

由 $r_2r_3 + r_2 + 1 = 0$

得知

$$r_2 + 1 = -r_2r_3$$

代入(3)式，得

$$\overrightarrow{AC} = -r_2r_3\overrightarrow{AE} \qquad (4)$$

由 $r_3r_1 + r_3 + 1 = 0$

得知

$$1 + \frac{1}{r_3} = -r_1$$

因此

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} = \left(1 + \frac{1}{r_3}\right)\overrightarrow{AF} = -r_1\overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{r_1}\overrightarrow{AB} = -r_2r_3\overrightarrow{AB} \qquad (5)$$

(4)、(5)兩式相減，得

$\overrightarrow{CF} = -r_2 r_3 \overrightarrow{EB}$

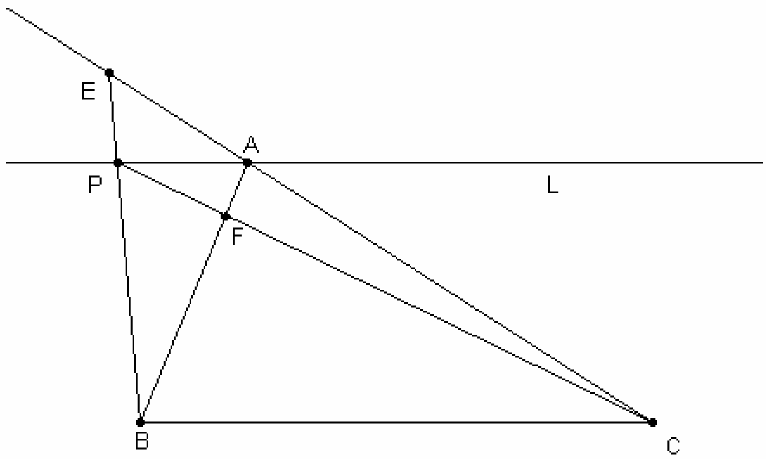
$\therefore \overleftrightarrow{BE} \,//\, \overleftrightarrow{CF}$

同理 $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BE}$

因此 $\overleftrightarrow{AD}$ 、 $\overleftrightarrow{BE}$ 、 $\overleftrightarrow{CF}$ 互相平行。

引理一

給定三角形 ΔABC 以及過 A 平行 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線 L ，E 、 F 分別爲 $\overleftrightarrow{AC}$ 、 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的點，滿足 $\overrightarrow{CE} = r_2 \overrightarrow{EA}$ 、 $\overrightarrow{AF} = r_3 \overrightarrow{FB}$ ，其中 $0 \neq r_2, r_3 \in \Re$ 。若 $r_2 r_3 = -1$ ，則 $\overleftrightarrow{BE}$ 、 $\overleftrightarrow{CF}$ 、 L 三線共點。



證明

設 P 爲 $\overleftrightarrow{BE}$ 與 L 的交點〔若 $\overleftrightarrow{BE} \,//\, L$ ，則 $\overleftrightarrow{BE} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$ 、 C, E 重合、

$\vec{0} = \overrightarrow{CE} = r_2 \overrightarrow{EA} = r_2 \overrightarrow{CA}$ ， $r_2 = 0$ ，與假設 $r_2 \neq 0$ 矛盾，故 $\overleftrightarrow{BE}$ 與 L 不平行〕

根據 $\overrightarrow{CE} = r_2 \overrightarrow{EA}$ 及 $\overleftrightarrow{BC} \,//\, L$

$\overrightarrow{BE} = r_2 \overrightarrow{EP}$

根據上式

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EP} = (r_2 + 1)\overrightarrow{EP} = -(r_2 + 1)\overrightarrow{PE}$ (1)

根據$\overrightarrow{CE} = r_2 \overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{EC} = r_2 \overrightarrow{AE} = r_2\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}\right)$

因此$(r_2 + 1)\overrightarrow{EC} = r_2 \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EC} = -\dfrac{r_2}{r_2 + 1}\overrightarrow{CA}$ (2)

$\triangle ABE$ 三邊延長線上的點P 、 F 、 C 滿足(1)(2)式以及$\overrightarrow{AF} = r_3 \overrightarrow{FB}$ ，

因爲$\left[-(r_2 + 1)\right]\left[-\left(\dfrac{r_2}{r_2 + 1}\right)\right] r_3 = r_2 r_3 = -1$ ，

根據命題一的廣義孟氏定理，P 、 F 、 C 共線，換句話說$\overleftrightarrow{CF}$ 也過P點。

定理一

以給定三角形ΔABC的三邊爲底邊、並以θ（$-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$）爲底角作相似等腰三角形$\Delta A'BC$ 、$\Delta AB'C$ 、$\Delta ABC'$ ，則$\overleftrightarrow{AA'}$ 、$\overleftrightarrow{BB'}$ 、$\overleftrightarrow{CC'}$三線共點或平行。

證明

若ΔABC爲等腰三角形，根據其對稱性，不難證明$\overleftrightarrow{AA'}$ 、 $\overleftrightarrow{BB'}$ 、 $\overleftrightarrow{CC'}$三線共點，所以我們可以假設ΔABC不是等腰三角形。

如下頁圖，$\overleftrightarrow{AA'}$ $\overleftrightarrow{BC}$交點爲D

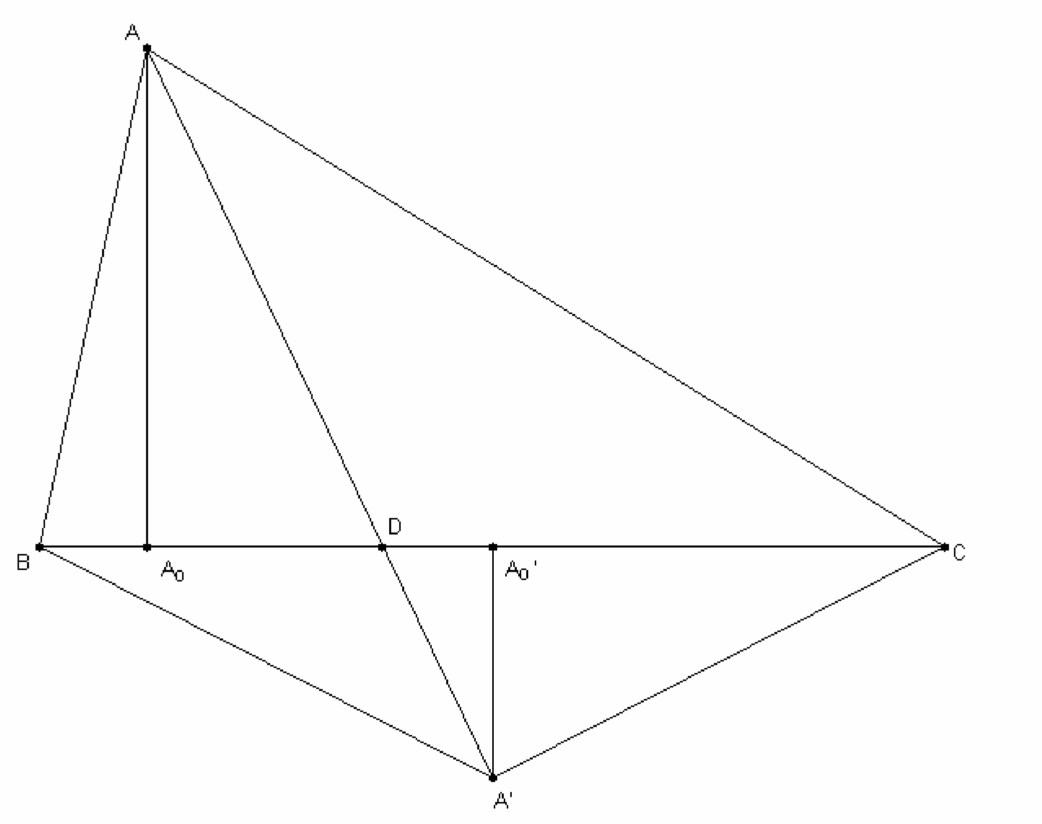
$\angle A'CA_0' = \angle A'BA_0' = \theta$

A 、 A'在$\overleftrightarrow{BC}$的投影點分別爲A_0 、 A_0'

$\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$

$$\overrightarrow{A_0D} = x\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$\overrightarrow{DA_0'} = y\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$



我們先處理一些特殊的情況：若$\theta = -\angle B$，則A'落在直線$\overleftrightarrow{AB}$上且C'落在直線$\overleftrightarrow{BC}$上，此時$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線交於B點。$\theta = -\angle A$或$\theta = -\angle C$時，同樣$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線交於一點。所以我們可以進一步假設$\theta \neq -\angle A$、$\theta \neq -\angle B$、$\theta \neq -\angle C$，在這些假設下

$2S_\Delta + ab\cos C\tan\theta \neq 0$

$2S_\Delta + bc\cos A\tan\theta \neq 0$

$2S_\Delta + ac\cos B\tan\theta \neq 0$

其中S_Δ爲ΔABC面積。

我們先處理$a\tan\theta + 2c\sin B \neq 0$，$b\tan\theta + 2a\sin C \neq 0$，$c\tan\theta + 2b\sin A \neq 0$的情況。

解方程式

$$x+y=\frac{a}{2}-c\cos B$$

$$\frac{a}{2}x\tan\theta=yc\sin B$$

得 $y=\dfrac{a\tan\theta\left(a-2c\cos B\right)}{2a\tan\theta+4c\sin B}$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA_0}'+\overrightarrow{A_0}'C=y\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}+\frac{a}{2}\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left(y+\frac{a}{2}\right)\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left[\frac{a\left(2c\sin B+a\tan\theta\right)}{4c\sin B+2a\tan\theta}+\frac{a\tan\theta\left(a-2c\cos B\right)}{4c\sin B+2a\tan\theta}\right]\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left(\frac{2ac\sin B+\tan\theta\left(2a^2-2ac\cos B\right)}{4c\sin B+2a\tan\theta}\right)\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left(\frac{2ac\sin B+\tan\theta\left(2a^2-a^2+b^2-c^2\right)}{4c\sin B+2a\tan\theta}\right)\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left(\frac{2ac\sin B+\tan\theta\left(a^2+b^2-c^2\right)}{4c\sin B+2a\tan\theta}\right)\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left(\frac{2ac\sin B+2ab\cos C\tan\theta}{2a\tan\theta+4c\sin B}\right)\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left(\frac{2S_\Delta+ab\cos C\tan\theta}{a\tan\theta+2c\sin B}\right)\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}\qquad(1)$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA_0}'+\overrightarrow{A_0}'D=\overrightarrow{BA_0}'-\overrightarrow{DA_0}'=\frac{a}{2}\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}-y\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left(\frac{a}{2}-y\right)\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\left[\frac{a\left(a\tan\theta+2c\sin B\right)}{2a\tan\theta+4c\sin B}-\frac{a\tan\theta\left(a-2c\cos B\right)}{2a\tan\theta+4c\sin B}\right]\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left(\frac{2ac\sin B+2ac\cos B\tan\theta}{2a\tan\theta+4c\sin B}\right)\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$=\left(\frac{2S_{\Delta}+ac\cos B\tan\theta}{a\tan\theta+2c\sin B}\right)\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} \qquad (2)$$

設 $\overrightarrow{BD}=r_1\overrightarrow{DC}$ 、 $\overrightarrow{CE}=r_2\overrightarrow{EA}$ 、 $\overrightarrow{AF}=r_3\overrightarrow{FB}$ ，根據(1)、(2)式

$$r_1=\frac{2S_{\Delta}+ac\cos B\tan\theta}{2S_{\Delta}+ab\cos C\tan\theta} \qquad (3)$$

同理 $r_2=\dfrac{2S_{\Delta}+ab\cos C\tan\theta}{2S_{\Delta}+bc\cos A\tan\theta}$

$$r_3=\frac{2S_{\Delta}+bc\cos A\tan\theta}{2S_{\Delta}+ac\cos B\tan\theta}$$

$$\therefore r_1r_2r_3=1$$

所以，根據廣義西瓦定理，$\overleftrightarrow{AA'}$ $\overleftrightarrow{BB'}$ $\overleftrightarrow{CC'}$ 共點或平行。

我們接著處理 $a\tan\theta+2c\sin B=0$ 的情況。此時 $b\tan\theta+2a\sin C\neq 0$ ，若 $b\tan\theta+2a\sin C=0$ ，將 $a\tan\theta+2c\sin B=0$ 、 $b\tan\theta+2a\sin C=0$ 二式分別乘以 a 、 b ，得

$$a^2\tan\theta+4S_{\Delta}=0$$

$$b^2\tan\theta+4S_{\Delta}=0$$

由以上二式可知 $a=b$ ，然而 ΔABC 不為等腰，因此 $b\tan\theta+2a\sin C\neq 0$ ，同理 $c\tan\theta+2b\sin A\neq 0$ 。

在 $b\tan\theta+2a\sin C\neq 0$ 以及 $c\tan\theta+2b\sin A\neq 0$ 的條件下，可仿照先前計算 r_1 的方法，算出 $r_2=\dfrac{2S_{\Delta}+ab\cos C\tan\theta}{2S_{\Delta}+bc\cos A\tan\theta}$ 、 $r_3=\dfrac{2S_{\Delta}+bc\cos A\tan\theta}{2S_{\Delta}+ac\cos B\tan\theta}$ 。

$$r_2r_3=\frac{2S_{\Delta}+ab\cos C\tan\theta}{2S_{\Delta}+bc\cos A\tan\theta}\cdot\frac{2S_{\Delta}+bc\cos A\tan\theta}{2S_{\Delta}+ac\cos B\tan\theta}=\frac{2S_{\Delta}+ab\cos C\tan\theta}{2S_{\Delta}+ac\cos B\tan\theta}$$

將 $a\tan\theta=-2c\sin B$ 代入上式，得

$$r_2r_3=\frac{2S_{\Delta}-2bc\cos C\sin B}{2S_{\Delta}-2c^2\cos B\sin B}=\frac{ac\sin B-2bc\cos C\sin B}{ac\sin B-2c^2\cos B\sin B}$$

$$=\frac{a-2b\cos C}{a-2c\cos B}=\frac{b\cos C+c\cos B-2b\cos C}{b\cos C+c\cos B-2c\cos B}=-1$$

由於$r_2r_3=-1$，且$\frac{a}{2}\tan\theta=-c\sin B$的幾何意義爲$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BC}$平行，根據引理一，$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線共點。同理，$b\tan\theta+2a\sin C=0$或$c\tan\theta+2b\sin A=0$的情況，$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線也共點。

$\boxed{\text{定理二}}$

$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線平行的充要條件爲

$$\tan\theta=\frac{-\left(a^2+b^2+c^2\right)\pm\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-48{S_\Delta}^2}}{4S_\Delta}$$

$\boxed{\text{證明}}$

令$\alpha=bc\cos A=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$、$\beta=ac\cos B=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}$、$\gamma=ab\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$、$t=\tan\theta$、$r_1,r_2,r_3$爲滿足$\overline{BD}=r_1\overline{DC}$、$\overline{CE}=r_2\overline{EA}$、$\overline{AF}=r_3\overline{FB}$的非零實數

根據命題一及定理一，$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$三線平行的充要條件爲

$r_1r_2+r_1+1=0$

以$r_1=\frac{2S_\Delta+\beta t}{2S_\Delta+\gamma t}$、$r_2=\frac{2S_\Delta+\gamma t}{2S_\Delta+\alpha t}$、$r_3=\frac{2S_\Delta+\alpha t}{2S_\Delta+\beta t}$代入上式

得$\frac{2S_\Delta+\beta t}{2S_\Delta+\gamma t}\cdot\frac{2S_\Delta+\gamma t}{2S_\Delta+\alpha t}+\frac{2S_\Delta+\beta t}{2S_\Delta+\gamma t}+1=0$

$\frac{2S_\Delta+\beta t}{2S_\Delta+\alpha t}+\frac{2S_\Delta+\beta t}{2S_\Delta+\gamma t}+1=0$

將上式通分，得

$$\frac{\left(2S_\Delta+\beta t\right)\left(2S_\Delta+\gamma t\right)+\left(2S_\Delta+\beta t\right)\left(2S_\Delta+\alpha t\right)+\left(2S_\Delta+\alpha t\right)\left(2S_\Delta+\gamma t\right)}{\left(2S_\Delta+\alpha t\right)\left(2S_\Delta+\gamma t\right)}=0$$

再將其分子展開，得一以t爲變數的二次方程式

$$\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma\right)t^2+4S_\Delta\left(\alpha+\beta+\gamma\right)t+12{S_\Delta}^2=0 \qquad (1)$$

其中三角形面積以海龍公式展開

$$S_\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad , \quad s=\frac{a+b+c}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\frac{a-b+c}{2}\frac{a+b-c}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(b^2+c^2+2bc-a^2\right)\left(a^2-b^2+2bc-c^2\right)}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{(2bc)^2-\left(a^2-b^2-c^2\right)^2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{4b^2c^2-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}}{4}$$

$$S_\Delta=\frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}}{4} \qquad (2)$$

再將t^2項係數中$\alpha\beta$展開

$$\alpha\beta=\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2}\right)$$

$$=\frac{c^4-\left(a^2-b^2\right)^2}{4}$$

$$=\frac{-a^4-b^4+c^4+2a^2b^2}{4}$$

同理$\beta\gamma=\dfrac{a^4-b^4-c^4+2b^2c^2}{4}$ 、 $\alpha\gamma=\dfrac{-a^4+b^4-c^4+2a^2c^2}{4}$

因此t^2項係數$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\dfrac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2}{4}$

根據(2)式，可將$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$以三角形面積表示

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=4{S_\Delta}^2 \qquad (3)$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{a^2-b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \qquad (4)$$

根據(3)(4)式，將(1)式改寫爲

$4S_{\Delta}{}^2t^2+2S_{\Delta}\left(a^2+b^2+c^2\right)t+12S_{\Delta}{}^2=0$

由於三角形面積不爲零，可將上式除以 $2S_{\Delta}$

得 $2S_{\Delta}t^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)t+6S_{\Delta}=0$ (5)

解方程式 $t=\dfrac{-\left(a^2+b^2+c^2\right)\pm\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-48S_{\Delta}{}^2}}{4S_{\Delta}}$

將 $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-48S_{\Delta}{}^2$ 展開

得 $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-48S_{\Delta}{}^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2$

$+3\left(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\right)$

$=2\left(2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2\right)$

$=2\left[\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(a^2-c^2\right)^2\right]$

因此 $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-48S_{\Delta}{}^2=0$ 時，$\triangle ABC$ 爲正三角形。此時(5)式的唯一解爲

$t=\dfrac{-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4S_{\Delta}}=\dfrac{-3a^2}{4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)}=-\sqrt{3}$ ，然而 $\tan\theta=-\sqrt{3}$ 代表 $\triangle A'BC$ 、

$\Delta AB'C$ 、$\Delta ABC'$ 皆在 ΔABC 內且底角爲 $60°$，故 A' 、B' 、C' 分別與正三角形 ΔABC 的三頂點 A 、B 、C 重合，$\overleftrightarrow{AA'}$ 、$\overleftrightarrow{BB'}$ 、$\overleftrightarrow{CC'}$ 無法形成。

由此得到 $\overleftrightarrow{AA'}$ 、$\overleftrightarrow{BB'}$ 、$\overleftrightarrow{CC'}$ 三線平行的充要條件。

我們將用命題二研究三線交點的軌跡。

命題二

設 $x(t)=\dfrac{a_2t^2+a_1t+a_0}{t^2+c_1t+c_0}$ ，$y(t)=\dfrac{b_2t^2+b_1t+b_0}{t^2+c_1t+c_0}$ ，*其中* $a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,c_0,c_1\in\Re$ ，*則集合* $\{(x(t),y(t))\mid t\in\Re,t^2+c_1t+c_0\neq0\}$ *落在一圓錐曲線〔可能退化〕上。〔當 t 趨近於無限大或負無限大時，* $(x(t),y(t))$ *亦*

落在此圓錐曲線上。〕

$\boxed{\text{證明}}$

將(x,y)適當地平移，消去分子的平方項

得$x'=\dfrac{d_1t+d_0}{t^2+c_1t+c_0}$ (1)

$y'=\dfrac{e_1t+e_0}{t^2+c_1t+c_0}$ (2)

再將(1)、(2)兩式相除

$$\frac{x'}{y'}=\frac{d_1t+d_0}{e_1t+e_0}$$

經由交叉相乘並移項可得

$$e_1x't+e_0x'=d_1y't+d_0y'$$

$$t=\frac{-e_0x'+d_0y'}{e_1x'-d_1y'} \qquad (3)$$

將(3)代回(1)

得

$$x'=\frac{d_1\left(\dfrac{-e_0x'+d_0y'}{e_1x'-d_1y'}\right)+d_0}{\left(\dfrac{-e_0x'+d_0y'}{e_1x'-d_1y'}\right)^2+c_1\left(\dfrac{-e_0x'+d_0y'}{e_1x'-d_1y'}\right)+c_0}=\frac{\left(\dfrac{-d_1e_0x'+d_0d_1y'+d_0e_1x'-d_0d_1y'}{e_1x'-d_1y'}\right)}{\left(\dfrac{-e_0x'+d_0y'}{e_1x'-d_1y'}\right)^2+c_1\left(\dfrac{-e_0x'+d_0y'}{e_1x'-d_1y'}\right)+c_0}$$

$$1=\frac{\left(\dfrac{-d_1e_0+d_0e_1}{e_1x'-d_1y'}\right)}{\left(\dfrac{-e_0x'+d_0y'}{e_1x'-d_1y'}\right)^2+c_1\left(\dfrac{-e_0x'+d_0y'}{e_1x'-d_1y'}\right)+c_0}$$

分子及分母同乘以$(e_1x'-d_1y')^2$，得

$$1=\frac{(-d_1e_0+d_0e_1)(e_1x'-d_1y')}{(-e_0x'+d_0y')^2+c_1(-e_0x'+d_0y')(e_1x'-d_1y')+c_0(e_1x'-d_1y')^2}$$

最後，我們發現(x',y')落在以下的圓錐曲線上

$$(-d_1e_0+d_0e_1)(e_1x'-d_1y')=(-e_0x'+d_0y')^2+c_1(-e_0x'+d_0y')(e_1x'-d_1y')+c_0(e_1x'-d_1y')^2$$

由於(x',y')為(x,y)的平移，故(x,y)落在一圓錐曲線上。

引理二

A、B、C、D 爲圓錐曲線上的點，且 D 落在ΔABC 內，則此圓錐曲線爲雙曲線或退化爲兩相交直線。

證明

橢圓、拋物線以及其它退化的圓錐曲線無此性質。

定理三

若ΔABC 不爲等腰，隨θ 變動，$\overleftrightarrow{AA'}$ 、$\overleftrightarrow{BB'}$ 、$\overleftrightarrow{CC'}$ 三線交點P_θ 在平面上的軌跡爲一等軸雙曲線。

證明

設 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 、 $C(x_3,y_3)$ ， 則$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}$ ，

我們可以假設 A 、 B 、 C 依逆時針方向置於平面上。

將 $\overrightarrow{BA}$ 旋轉θ再伸縮$\dfrac{\sec\theta}{2}$

得$\overrightarrow{BC'}=\dfrac{\sec\theta}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\tan\theta}{2} \\ \frac{\tan\theta}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1-x_2)-\frac{\tan\theta}{2}(y_1-y_2) \\ \frac{1}{2}(y_1-y_2)+\frac{\tan\theta}{2}(x_1-x_2) \end{pmatrix}$$

令$t=\tan\theta$

$$\overrightarrow{BC'}=\left(\frac{1}{2}(x_1-x_2)-\frac{t}{2}(y_1-y_2),\frac{1}{2}(y_1-y_2)+\frac{t}{2}(x_1-x_2)\right)$$

$$C'\left(x_2+\frac{1}{2}(x_1-x_2)-\frac{t}{2}(y_1-y_2),y_2+\frac{1}{2}(y_1-y_2)+\frac{t}{2}(x_1-x_2)\right)$$

$$C'\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{t}{2}(y_1-y_2),\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\frac{t}{2}(x_1-x_2)\right) \qquad (1)$$

根據(1)及$C(x_3,y_3)$可得知$\overleftrightarrow{CC'}$斜率爲

$$\frac{\frac{1}{2}(y_1+y_2-2y_3)+\frac{t}{2}(x_1-x_2)}{\frac{1}{2}(x_1+x_2-2x_3)-\frac{t}{2}(y_1-y_2)}=\frac{(y_1+y_2-2y_3)+t(x_1-x_2)}{(x_1+x_2-2x_3)-t(y_1-y_2)}$$

因此$\overleftrightarrow{CC'}$的方程式爲

$$\frac{(y_1+y_2-2y_3)+t(x_1-x_2)}{(x_1+x_2-2x_3)-t(y_1-y_2)}=\frac{y-y_3}{x-x_3}$$

將上式等號左右交叉相乘，改寫爲

$$f_{11}x+f_{12}y=g_1 \qquad (2)$$

同理$\overleftrightarrow{BB'}$的方程式可寫成

$$f_{21}x+f_{22}y=g_2 \qquad (3)$$

其中，f_{11}、f_{12}、f_{21}、f_{22}、g_1、g_2爲t的一次﹝可能退化爲常數或零多項式﹞多項式

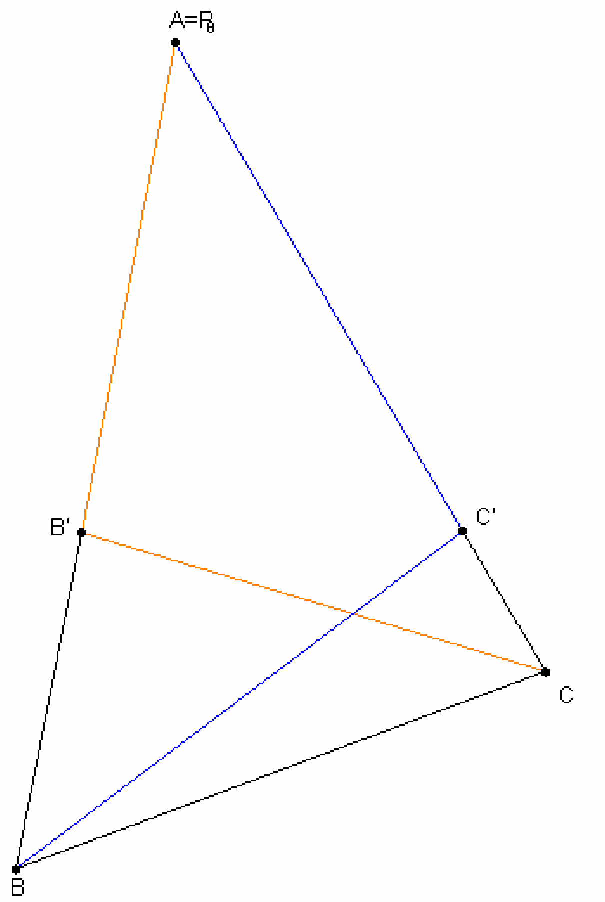
因此$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$的交點P_θ座標爲(2)、(3)方程組的解

$P_\theta\left(\dfrac{\begin{vmatrix} g_1 & f_{12} \\ g_2 & f_{22}\end{vmatrix}}{\det(f_{ij})},\dfrac{\begin{vmatrix} f_{11} & g_1 \\ f_{12} & g_2\end{vmatrix}}{\det(f_{ij})}\right)$，其中$\begin{vmatrix} g_1 & f_{12} \\ g_2 & f_{22}\end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix} f_{11} & g_1 \\ f_{12} & g_2\end{vmatrix}$、$\det(f_{ij})$爲$t$的二次多項式，而且$\det(f_{ij})$在$t^2$的係數$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3\end{vmatrix}\neq 0$，所以$P_\theta$可寫成參數式

$$\mathrm{x}=\frac{a_2t^2+a_1t+a_0}{t^2+c_1t+c_0} \quad \mathrm{y}=\frac{b_2t^2+b_1t+b_0}{t^2+c_1t+c_0}$$

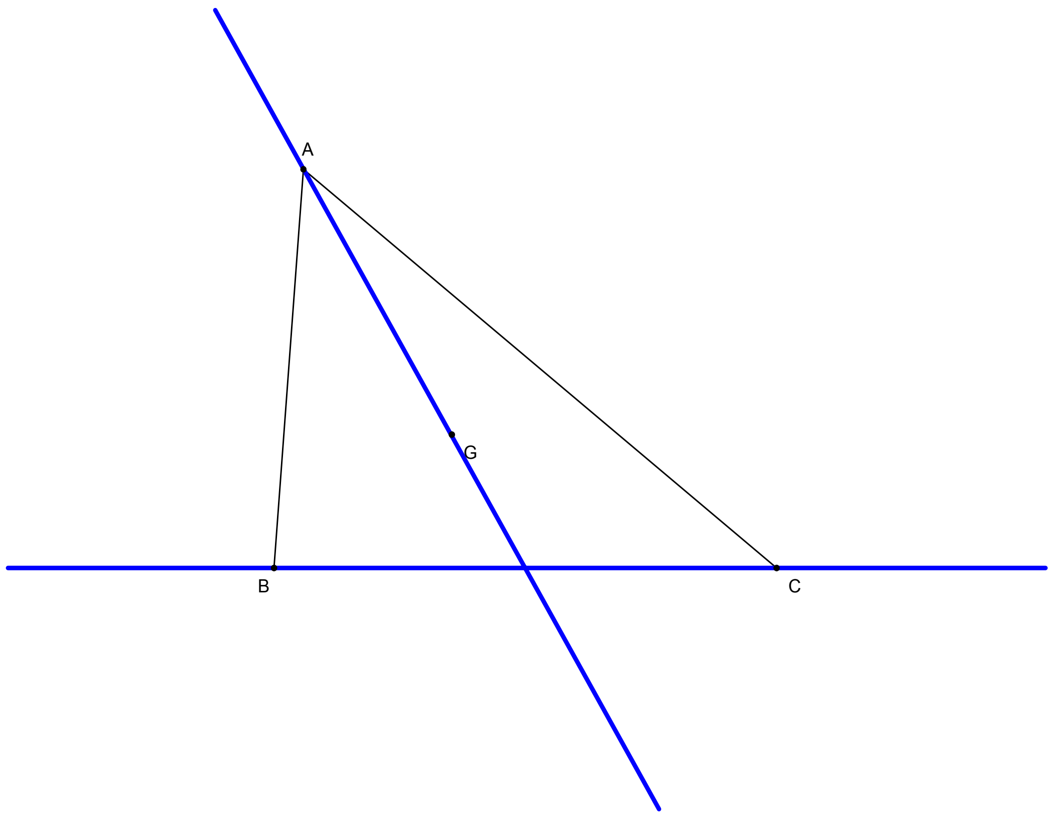
根據命題二，隨θ變動，P_θ在平面上形成一圓錐曲線。

要判別圓錐曲線的種類，我們先證明A、B、C都落在此圓錐曲線上。當$\theta=-\angle A$時B'、C'分別落在$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{AC}$上，如下頁圖。

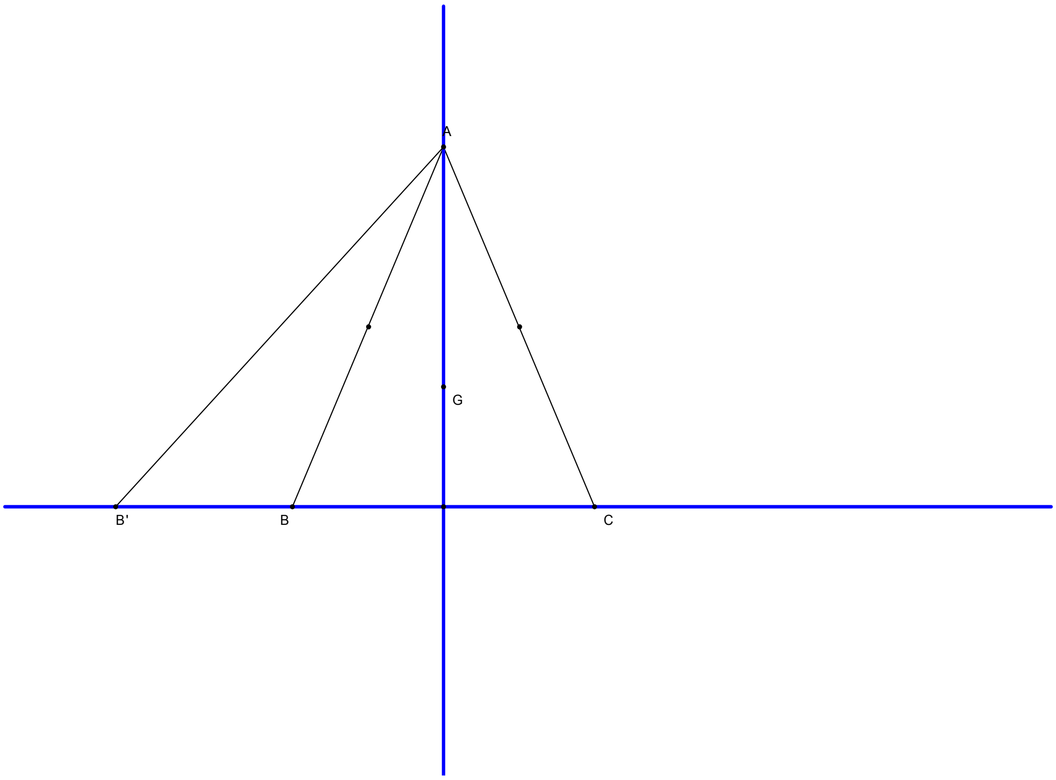


此時$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$的交點P_θ與A重合，因此P_θ的軌跡通過A。同理此軌跡亦通過B、C。當$\theta=0$時，P_θ爲三角形的重心。由於P_θ的軌跡通過三角形的三頂點及其重心，且重心必落在三角形內，所以根據引理二，P_θ的軌跡可能爲雙曲線或兩相交直線，但事實上，我們可以藉由反證法排除此軌跡爲兩相交直線的可能性。

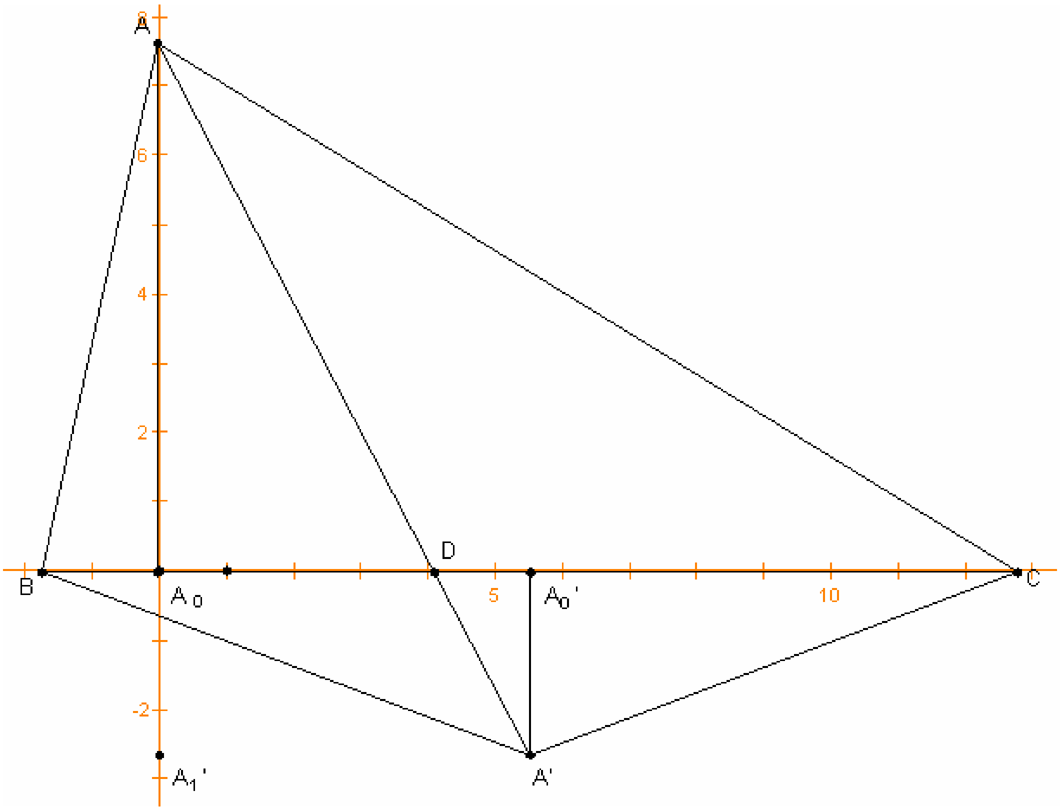
假設P_θ的軌跡爲兩相交直線，因爲A、B、C以及重心G任三點皆不共線，我們不妨假設P_θ的軌跡由$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BC}$所構成〔如下頁圖〕。



令P_ϕ為落在$\overleftrightarrow{BC}$上的點〔P_ϕ、B、C共線(4)〕，由於P_ϕ為$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$的交點，我們可得知P_ϕ落在$\overleftrightarrow{BB'}$上〔P_ϕ、B、B'共線(5)〕。由(4)、(5)可得知B'落在$\overleftrightarrow{BC}$上〔如下頁圖〕，故$\phi = -\angle C$，同理$\phi = -\angle B$。然而，$\angle B = \angle C$與ΔABC不為等腰的假設矛盾，所以P_θ的軌跡不會退化。



接著證明，隨θ變動P_θ形成雙曲線為等軸雙曲線。



A 、 A'在$\overleftrightarrow{BC}$的投影點記為A_0 、 A_0'，將$\triangle ABC$以A_0為原點、$\overline{A_0C}$為 x 軸正

向、$\overline{A_0A}$為 y 軸正向置於座標平面上，並令A_1'為A'在 y 軸上的投影點、

$\overline{A_0A_0'}=\Delta x\dfrac{\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|}$ 、 $\overline{A_1A}=\Delta y\dfrac{\overline{A_0A}}{\left|\overline{A_0A}\right|}$ ，

其中$\Delta x=\dfrac{a}{2}-c\cos B$ 、 $\Delta y=\dfrac{a}{2}\tan\theta+c\sin B$

因此$\overleftrightarrow{AA'}$的斜率為$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a\tan\theta+2c\sin B}{a-2c\cos B}$ (6)

設當$\tan\theta=t_1$或t_2時，$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$平行，而$\tan\theta=t_1$時$\overleftrightarrow{AA'}$的斜率為m_1、

$\tan\theta=t_2$時$\overleftrightarrow{AA'}$的斜率為m_2。

根據(6)式

$$m_1m_2=\left(\frac{at_1+2c\sin B}{a-2c\cos B}\right)\left(\frac{at_2+2c\sin B}{a-2c\cos B}\right)$$

$$=\frac{a^2t_1t_2+2ac\sin B\left(t_1+t_2\right)+4c^2\sin^2 B}{\left(a-2c\cos B\right)^2}$$

由於t_1、t_2為$2S_\Delta t^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)t+6S_\Delta=0$〔見第 15 頁(5)式〕的兩解

所以$t_1t_2=3$ 、 $t_1+t_2=\dfrac{-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2S_\Delta}$

$$m_1m_2=\frac{a^2t_1t_2+2ac\sin B\left(t_1+t_2\right)+4c^2\sin^2 B}{\left(a-2c\cos B\right)^2}$$

$$=\frac{3a^2-2ac\sin B\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2S_\Delta}\right)+4c^2\sin^2 B}{\left(a-2c\cos B\right)^2}$$

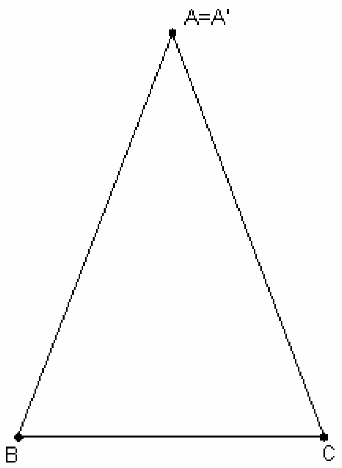
$$=\frac{3a^2-4S_\Delta\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2S_\Delta}\right)+4c^2\left(1-\cos^2 B\right)}{a^2-4ac\cos B+4c^2\cos^2 B}$$

$$=\frac{3a^2-2\left(a^2+b^2+c^2\right)+4c^2\left(1-\cos^2 B\right)}{a^2-2a^2+2b^2-2c^2+4c^2\cos^2 B}$$

$$=\frac{a^2-2b^2+2c^2-4c^2\cos^2 B}{-a^2+2b^2-2c^2+4c^2\cos^2 B}=-1$$

當 $\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$ 平行，這三條平行線和無窮遠線的交點是雙曲線的一個無窮遠點，因爲雙曲線的無窮遠點也是雙曲線的漸近線和無窮遠線的交點，所以有一條漸近線和這三線平行。而當 $\tan\theta=t_1$ 或 t_2 時我們得到兩組平行線，此兩組平行線的方向互相垂直，因此雙曲線的兩條漸近線互相垂直，即雙曲線爲等軸。

當 ΔABC 爲等腰〔不妨假設 $\angle B=\angle C$〕，且 $\theta=-\angle B=-\angle C$ 時，A' 同時落在 $\overleftrightarrow{AB}$ 及 $\overleftrightarrow{AC}$ 上，換句話說 A' 與 A 重合〔如下圖〕，因此 A' 與 A 無法形成直線。此時 P_θ 的軌跡爲等腰 ΔABC 的對稱軸〔ΔABC 爲正三角形時，P_θ 恆爲正三角形中心點〕。



最後我們利用 barycentric coordinate 探討 P_{θ_1}、P_{θ_2} 與 ΔABC 的外心何時共線。相較於笛卡兒座標係使用一組垂直線—x 軸及 y 軸描述平面上的點，barycentric coordinate 則使用三角形的三頂點 A、B、C 描述平面上的點。在 barycentric coordinate 中 $P(t_1,t_2,t_3)$ 代表滿足 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{t_1\overrightarrow{OA}+t_2\overrightarrow{OB}+t_3\overrightarrow{OC}}{t_1+t_2+t_3}$ 的點〔$t_1+t_2+t_3\neq 0$〕。當 $k\neq 0$ 時，(t_1,t_2,t_3) 與 (kt_1,kt_2,kt_3) 在 barycentric coordinate

中代表同一點，以下我們稱 barycentric coordinate 爲齊次座標。

此外，$P(t_1,t_2,t_3)$亦可解釋爲滿足$S_{\Delta BCP}:S_{\Delta ACP}:S_{\Delta ABP}=t_1:t_2:t_3$的點〔參見§13.7[1]〕，其中$S_{\Delta BCP}$、$S_{\Delta ACP}$、$S_{\Delta ABP}$皆爲有向三角形的面積。

在探討P_{θ_1}、P_{θ_2}與ΔABC外心共線的條件之前，我們得先出求P_θ以及外心的齊次座標。

$\boxed{\text{引理三}}$ *P_θ的齊次座標爲*

$$\left(\frac{1}{4S_\Delta+\left(-a^2+b^2+c^2\right)\tan\theta},\frac{1}{4S_\Delta+\left(a^2-b^2+c^2\right)\tan\theta},\frac{1}{4S_\Delta+\left(a^2+b^2-c^2\right)\tan\theta}\right)$$

$\boxed{\text{證明}}$

由於$S_{\Delta ABP_\theta}:S_{\Delta ACP_\theta}=\overrightarrow{BD}:\overrightarrow{DC}=r_1:1=\dfrac{2S_\Delta+ac\cos B\tan\theta}{2S_\Delta+ab\cos C\tan\theta}:1$〔參見第 12 頁(3)式〕，

因此$\left[4S_\Delta+\left(a^2+b^2-c^2\right)\tan\theta\right]S_{\Delta ABP_\theta}=\left[4S_\Delta+\left(a^2-b^2+c^2\right)\tan\theta\right]S_{\Delta ACP_\theta}$，

同理$\left[4S_\Delta+\left(a^2-b^2+c^2\right)\tan\theta\right]S_{\Delta ACP_\theta}=\left[4S_\Delta+\left(-a^2+b^2+c^2\right)\tan\theta\right]S_{\Delta BCP_\theta}$，

由此可知$S_{\Delta BCP_\theta}:S_{\Delta ACP_\theta}:S_{\Delta ABP_\theta}$

$$=\frac{1}{4S_\Delta+\left(-a^2+b^2+c^2\right)\tan\theta}:\frac{1}{4S_\Delta+\left(a^2-b^2+c^2\right)\tan\theta}:\frac{1}{4S_\Delta+\left(a^2+b^2-c^2\right)\tan\theta}$$

故P_θ的座標爲

$$\left(\frac{1}{4S_\Delta+\left(-a^2+b^2+c^2\right)\tan\theta},\frac{1}{4S_\Delta+\left(a^2-b^2+c^2\right)\tan\theta},\frac{1}{4S_\Delta+\left(a^2+b^2-c^2\right)\tan\theta}\right)$$

$\boxed{\text{引理四}}$ *ΔABC外心的齊次座標爲*

$$O\left(a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right),b^2\left(a^2-b^2+c^2\right),c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right)$$

$\boxed{\text{證明}}$

設ΔABC的外接圓半徑爲R，則

$$S_{\Delta BCO}=\frac{1}{2}a\left(R\cos\frac{1}{2}\angle BOC\right)=\frac{1}{2}a\left(R\cos A\right)=\frac{1}{2}aR\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$=\left(\dfrac{R}{4abc}\right)a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)$，同理$S_{\Delta ACO}=\left(\dfrac{R}{4abc}\right)b^2\left(a^2-b^2+c^2\right)$、

$S_{\Delta ABO}=\left(\dfrac{R}{4abc}\right)c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)$。由於 barycentric coordinate 爲齊次，將$S_{\Delta BCO}$、

$S_{\Delta ACO}$、$S_{\Delta ABO}$同除以$\dfrac{R}{4abc}$，得ΔABC的外心座標爲

$O\left(a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right),b^2\left(a^2-b^2+c^2\right),c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right)$。

三點共線的條件很容易用齊次座標來表達，以下引理爲利用行列式判別三點共線的方法〔證明參見§13.7[1]〕。

$\boxed{\text{引理五}}$ (s_1,s_2,s_3)、(t_1,t_2,t_3)、(u_1,u_2,u_3) *共線的充要條件爲* $\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}=0$

$\boxed{\text{定理四}}$ ΔABC *外心與相異的* P_{θ_1}、P_{θ_2} *共線的充要條件爲* $\theta_1+\theta_2=\pm\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{證明}}$

由於$\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2=1$與$\theta_1+\theta_2=\pm\dfrac{\pi}{2}$爲等價，我們先假設$\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2=1$並證明此時$P_{\theta_1}$、$P_{\theta_2}$與外心$O$共線。若$P_{\theta_1}$、$P_{\theta_2}$、$O$三點座標分別爲$(s_1,s_2,s_3)$、$(t_1,t_2,t_3)$、$(u_1,u_2,u_3)$，根據引理四，我們已知$P_{\theta_1}$、$P_{\theta_2}$、$O$共線的充要條件爲$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}=0$，所以，只要能找到一組$\alpha$、$\beta$使得

$\alpha s_i+\beta t_i=u_i\ \forall\ 1\le i\le 3$，就可以證明此三點共線。由於 barycentric coordinate 爲齊次，因此我們可將P_{θ_1}座標的各項同乘以

$$\left[4S_\Delta+\left(-a^2+b^2+c^2\right)\tan\theta_1\right]\left[4S_\Delta+\left(a^2-b^2+c^2\right)\tan\theta_1\right]\left[4S_\Delta+\left(a^2+b^2-c^2\right)\tan\theta_1\right]$$

得其第一項爲

$$s_1=\left[4S_\Delta+\left(a^2-b^2+c^2\right)\tan\theta_1\right]\left[4S_\Delta+\left(a^2+b^2-c^2\right)\tan\theta_1\right]$$

$$=\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\tan^2\theta_1+8a^2S_\Delta\tan\theta_1+16S_\Delta{}^2$$

$$=\left(a^4-b^4-c^4+2b^2c^2\right)\tan^2\theta_1+8a^2S_\Delta\tan\theta_1+\left(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\right)$$

以同樣方法可得 P_{θ_2} 座標的第一項爲

$$t_1=\left(a^4-b^4-c^4+2b^2c^2\right)\tan^2\theta_2+8a^2S_\Delta\tan\theta_2+\left(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\right)$$

再將 s_1 與 t_1 適當地線性合成

$$\tan\theta_2\cdot s_1-\tan\theta_1\cdot t_1=\Big[\left(a^4-b^4-c^4+2b^2c^2\right)\tan\theta_1+8S_\Delta a^2$$

$$+\left(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\right)\tan\theta_2\Big]-\Big[\left(a^4-b^4-c^4+2b^2c^2\right)\tan\theta_2+8S_\Delta a^2$$

$$+\left(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\right)\tan\theta_1\Big]=2\left(\tan\theta_1-\tan\theta_2\right)\left(a^4-a^2b^2-a^2c^2\right)$$

$$=2\left(\tan\theta_2-\tan\theta_1\right)a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)=2\left(\tan\theta_2-\tan\theta_1\right)u_1$$

我們發現 $\dfrac{\tan\theta_2}{2\left(\tan\theta_2-\tan\theta_1\right)}\cdot s_1-\dfrac{\tan\theta_1}{2\left(\tan\theta_2-\tan\theta_1\right)}\cdot t_1=u_1$

同理

$$\frac{\tan\theta_2}{2\left(\tan\theta_2-\tan\theta_1\right)}\cdot s_2-\frac{\tan\theta_1}{2\left(\tan\theta_2-\tan\theta_1\right)}\cdot t_2=u_2$$

$$\frac{\tan\theta_2}{2\left(\tan\theta_2-\tan\theta_1\right)}\cdot s_3-\frac{\tan\theta_1}{2\left(\tan\theta_2-\tan\theta_1\right)}\cdot t_3=u_3$$

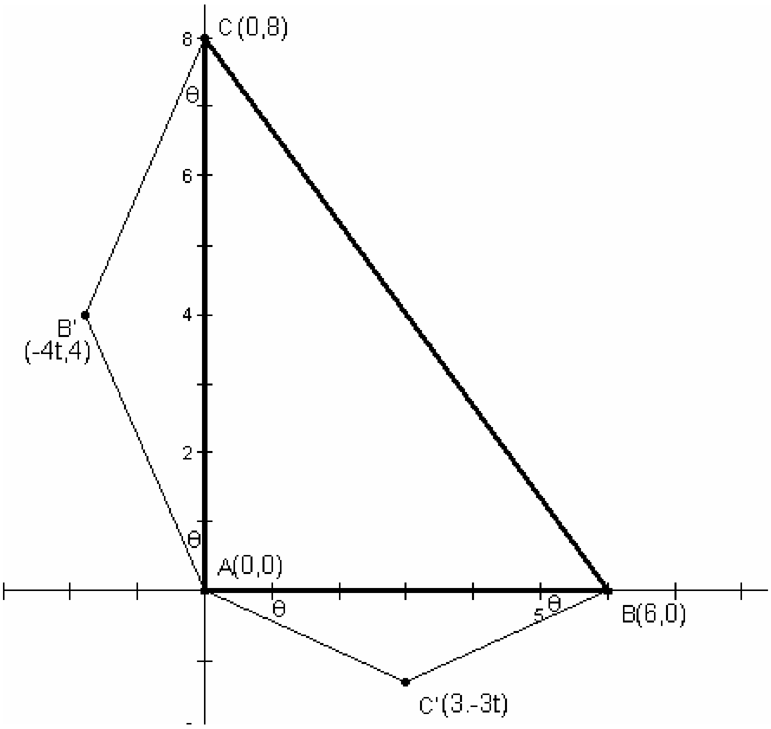
因此 $\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}=0$ ，P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 、 O 共線。

接著，我們假設 O 與相異的 P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 共線並證明 $\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2=1$ 。令 θ_2' 滿足 $\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2'=1$ 且 $\theta_2'\neq\theta_1$，由先前證明的結果可知，P_{θ_1}、$P_{\theta_2'}$、O 共線；又根據假設 P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 、 O 共線，故 $\overleftrightarrow{OP_{\theta_1}}$ 通過 P_{θ_1} 、 P_{θ_2} 、 $P_{\theta_2'}$。因爲 $\theta_2'\neq\theta_1$ 、 P_{θ_1} 與 P_{θ_2} 爲相異兩點、且 $\overleftrightarrow{OP_{\theta_1}}$ 最多能交 P_θ 的軌跡〔雙曲線〕於兩點，故 P_{θ_2}

與$P_{\theta_2'}$重合，$\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2=\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2'=1$，因此$\theta_1+\theta_2=\pm\dfrac{\pi}{2}$。

最後，我們藉由以下特例來檢視研究結果：

在此特例，設ΔABC的頂點為$A(0,0)$、$B(6,0)$、$C(0,8)$，我們可得B'、C'的座標分別為$B'(-4t,4)$、$C'(3,-3t)$〔如下圖〕，其中$t=\tan\theta$。



首先，我們計算出$\overleftrightarrow{BB'}$與$\overleftrightarrow{CC'}$的方程式。

$\overleftrightarrow{BB'}$：$\dfrac{0-4}{6-(-4t)}=\dfrac{y-0}{x-6}\ \Rightarrow\ 2x+(2t+3)y=12$

$\overleftrightarrow{CC'}$：$\dfrac{8-(-3t)}{0-3}=\dfrac{y-8}{x-0}\ \Rightarrow\ (3t+8)x+3y=24$

解聯立方程式，得P_θ的軌跡參數式為

$$x=\frac{12(4t+3)}{6t^2+25t+18}\qquad(1)$$

$$y=\frac{12(3t+4)}{6t^2+25t+18}\qquad(2)$$

將x、y相除並將得到的等式交叉相乘，我們得以用x、y來表示t。

$$\frac{x}{y}=\frac{4t+3}{3t+4}$$

$$\Rightarrow\ 4yt+3y=3xt+4x$$

$$\Rightarrow\ t=\frac{-4x+3y}{3x-4y} \qquad (3)$$

將(3)代回(1)〔亦可代回(2)〕

$$x=\frac{12\left[4\left(\frac{-4x+3y}{3x-4y}\right)+3\right]}{6\left(\frac{-4x+3y}{3x-4y}\right)^2+25\left(\frac{-4x+3y}{3x-4y}\right)+18}=\frac{12\left(\frac{-16x+12y+9x-12y}{3x-4y}\right)}{6\left(\frac{-4x+3y}{3x-4y}\right)^2+25\left(\frac{-4x+3y}{3x-4y}\right)+18}$$

$$=\frac{12\left(\frac{-7x}{3x-4y}\right)}{6\left(\frac{-4x+3y}{3x-4y}\right)^2+25\left(\frac{-4x+3y}{3x-4y}\right)+18}$$

將等式除以 x 並將等號右側之分子與分母同乘以 $(3x-4y)^2$

$$1=\frac{12\left[-7(3x-4y)\right]}{6(-4x+3y)^2+25(-4x+3y)(3x-4y)+18(3x-4y)^2}$$

經化簡可得

$$6x^2-7xy-6y^2-36x+48y=0 \qquad (4)$$

此圓錐曲線即為 P_θ 的軌跡。由於判別式 B^2-4AC

$=(-7)^2-4\times6\times(-6)=193>0$，且 $A+C=6+(-6)=0$，故此圓錐曲線為等軸雙曲線，符合定理三的結果。

接著，我們分別將 ΔABC 的頂點 $A(0,0)$、$B(6,0)$、$C(0,8)$、重心 $G\left(2,\frac{8}{3}\right)$ 及垂心〔與 $A(0,0)$ 重合〕的座標代入(4)式，以檢驗是否落在 P_θ 的軌跡上。

$$6\times0^2-7\times0\times0-6\times0^2-36\times0+48\times0=0$$

$$6\times6^2-7\times6\times0-6\times0^2-36\times6+48\times0=0$$

$$6\times0^2-7\times0\times8-6\times8^2-36\times0+48\times8=0$$

$$6\times2^2-7\times2\times\frac{8}{3}-6\times\left(\frac{8}{3}\right)^2-36\times2+48\times\frac{8}{3}=0$$

我們發現ΔABC的頂點、重心及垂心皆落在P_θ的軌跡上。

最後，我們從P_θ軌跡的參數式，求$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$平行的條件。$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$平行即$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$交於無窮遠點，此時(1)、(2)兩式的共同分母$6t^2+25t+18$爲零，故$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$平行的條件爲$t=\dfrac{-25\pm\sqrt{193}}{12}$。若根據定理二，$\overleftrightarrow{AA'}$、$\overleftrightarrow{BB'}$、$\overleftrightarrow{CC'}$平行的條件爲

$$t=\frac{-\left(a^2+b^2+c^2\right)\pm\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-48{S_\Delta}^2}}{4S_\Delta}$$

$$=\frac{-\left(10^2+8^2+6^2\right)\pm\sqrt{\left(10^2+8^2+6^2\right)^2-48\left(24\right)^2}}{96}=\frac{-200\pm\sqrt{200^2-48\left(24\right)^2}}{96}$$

$$=\frac{-25\pm\sqrt{25^2-48\left(3\right)^2}}{12}=\frac{-25\pm\sqrt{193}}{12}$$，兩者數值吻合。

柒、 結論

三角形的三頂點、重心和垂心五個點決定一條圓錐曲線，我們証明除了退化情形，這條圓錐曲線爲等軸雙曲線，並且闡述這條雙曲線相關於給定三角形的幾何意義。這條雙曲線可表示成一些等腰三角形的參數式，上面的點推廣了三角形的重心和垂心。我們還具體計算出這條雙曲線上無窮遠點對應的參數。研究過程中，有時需要處理無窮遠點的特殊情況，而投影幾何是適於描述這些結果的架構。

從一些特例，我們觀察到P_{θ_1}、P_{θ_2}與外心共線的條件爲$\theta_1+\theta_2=\pm\dfrac{\pi}{2}$。在地區比賽之後，老師建議用 barycentric coordinate，我們才證明出這三點共線的判別條件，並且知道 barycentric coordinate 是處理三角形幾何問題的其中一個適當工具。

由老師提供的文獻，我們進一步了解三角形幾何雖然歷史悠久，卻仍有新的發現，也可以用其它數學工具〔如 cross ratio〕處理。

我們參展的作品，由電腦作圖看到的現象出發，在證明中我們引進了預期之外的數學觀念〔如投影平面〕，最後在文獻中找到古典處理的方法。雖然對高中生而言，找到未曾被發現過的新結果是相當地困難，但我們覺得尋找問題以及解決問題的過程是最大的收穫。

捌、 參考資料

1. H. S. M. Coxeter. *Introduction to Geometry*, 2nd ed. New York, John Wiley & Sons, 1969.

040407

1.

2. Coxeter

3.