中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040408

城堡保衛

學校名稱：　臺北市立建國高級中學

作者：	指導老師：
高一　陳冠霖	徐健策
高一　劉彥廷	

壹、 摘要

我們試著尋找所需最小的城堡個數以看守整個$a \times b \times c\ (a,b,c \in N)$的長方體。在$a=b=c$及$a=b<c$的情況下我們分別有$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2$和$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor k$的結果，而在$a=b>c$與$a>b>c$情形下我們得到了上界，其中$a=b>c$我們更發明了區塊分割法來快速求解，此外我們運用clique polynomial的x多項式來描述$a \times b \times c$ 城堡數刪去的過程中完全圖分佈的變化，直到最後求出clique polynomial只有常數項的解。

貳、 研究動機

當我們在觀察一些有關西洋棋中城堡的移動問題時，發現如果棋盤格數為$m \times n\ (m \ge n)$時，只需要n 個城堡就可以吃到這個棋盤上所有的棋子（或者說是可以看守到這個棋盤的所有格子）。當我們再把這個題目延伸到三度空間中時，那結果會是如何呢？於是就開始了我們的研究。我們的研究中涵蓋了本學年數學課本中排列組合的排容原理以及數論的模運算。

參、 研究目的

我們要試著找出在$a \times b \times c\ (a,b,c \in N)$的長方體中最少需要多少個城堡才能完全看守這個長方體。我們將 a、b、c 三邊長分成以下四種情形來討論：

$a=b=c$

$a=b<c$

$a=b>c$

$a>b>c$

肆、 研究設備器材

紙張、筆、Dev-C++ 4.9.9.2、電腦

伍、 研究過程及方法

一、符號定義

（一） 在我們以下的討論中所有變數若不特別指定，則都是正整數，而空間也是有限的正整數空間(也就是我們所研究的長方體空間)，這些變數也都是定義在此有限正整數空間內。

（二） 當我們在正整數空間中放下一個城堡(棋子，以下依此類推)，令我們放置城堡的位置是(x,y,z) ，則很明顯的可以看出(x,y,t)、(x,t,z)、(t,y,z) (t是任何不超出邊界的正整數)都是這個城堡可以看守的位置。我們的目標就是找出最少的城堡個數，使得這些城堡可以看守整個長方體的所有位置。

（三） 若有一組的城堡，其涵蓋的範圍包含了所要看守的長方體範圍，我們就稱這一組城堡為**一組可靠的城堡**。我們用一個集合S來表示這組可靠的城堡，而$|S|$代表這組可靠的城堡的個數。我們定義函數$f(a,b,c)=\min\{|S|\}$。

二、　$a=b=c=n$

引理一

$x_1+x_2+\ldots+x_{s-1}+x_s=n$,　$x_i\in N$

當所有$|x_i-x_j|\le 1, i\ne j$

會使得$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{s-1}^2+x_s^2$有最小值

證明：

考慮以下的式子

$x_i-x_j>1,\quad x_i^2+x_j^2>(x_i-1)^2+(x_j+1)^2$

$x_i-x_j=1,\quad x_i^2+x_j^2=(x_i-1)^2+(x_j+1)^2$

$x_i-x_j<1,\quad x_i^2+x_j^2<(x_i-1)^2+(x_j+1)^2$

若$x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s$有兩數$x_i$和$x_j$的差大於 1時，我們就將其中較大的減 1、較小的加 1，使其總和仍然是n，但其平方和會減少。重複動作直到任意兩數的差都不大於1 爲止，此即爲平方和最小的情況。

定理一

當$a=b=c=n$時，$f(n,n,n)=\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor^2$

以下利用x_i來代表第i層的城堡個數。

證明：

（一）　當邊長$n=2k$，只用$\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor^2-1=2k^2-1$個不能完全看守正方體

利用排容原理，由於每放一個城堡就可以看守$3n-2=6k-2$個，再因爲有$x_i(x_i-1)$被重複計算 3 次，所以必須扣除 2 次。利用引理一可以得到：

$$
\begin{aligned}
\text{總覆蓋數} &= (3n-2)\sum_{i=1}^{n}x_i-2\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-1)\\
&=(6k-2)(2k^2-1)-2\left[(k-1)^2+(2k-1)k^2-(2k^2-1)\right]\\
&=8k^3-2k-2<8k^3
\end{aligned}
$$

（二）　當邊長 $n=2k$ ，只用 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 = 2k^2$ 個可以完全看守正方體

同上，可以得到：

$$\begin{aligned}
&\text{總覆蓋數} = (3n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1) \\
&= (6k-2)2k^2 - 2(2k\cdot k^2 - 2k^2) \\
&= 8k^3
\end{aligned}$$

（三）　當邊長 $n=2k+1$，只用 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 - 1 = 2k^2 + 2k$ 個不能完全看守正方體

同上，可以得到：

$$\begin{aligned}
&\text{總覆蓋數} = (3n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1) \\
&= (6k+1)(2k^2+2k) - 2[k(k+1)^2 + (k+1)k^2 - (2k^2+2k)] \\
&= 8k^3 + 12k^2 + 4k < 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = (2k+1)^3
\end{aligned}$$

（四）　當邊長 $n=2k+1$，只用 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 = 2k^2 + 2k + 1$ 個可以完全看守正方體

同上，可以得到：

$$\begin{aligned}
&\text{總覆蓋數} = (3n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1) \\
&= (6k+1)(2k^2+2k+1) - 2[(k+1)^2 + 2k\cdot k^2 - (2k^2+2k+1)] \\
&= 8k^3 + 16k^2 + 8k + 1 > 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = (2k+1)^3
\end{aligned}$$

那麼我們如何在邊長為 n 的正方體，佈置 r^2 個城堡使其能看守所有格子？方法如下

設 $s = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，$t = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$，且選取 $1,2,3,\ldots,s$ 為模 s 下的一組剩餘系，選取 $s+1, s+2, s+3, \ldots, n$ 為模 t 下的一組剩餘系，很明顯得知集合A={(i, j, m) | $1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq j \leqq s$, $m \equiv i+j-1 \pmod{s}$ }及集合B={$(n-i, n-j, m)$ | $0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq j \leqq n-1$, $m \equiv n-i-j \pmod{t}$}，A∪B可以做為 $n\times n\times n$ 正方體中的一組可靠的城堡。像A集合中的城堡的分佈方式，我們稱為轉格。

三、 $a = b < c$

定理二
$f(n,n,n+k) = \min\{s^2 + t^2 + sk \mid s + t = n, t \geq s \geq 0, s,t \in N \cup \{0\}, k \in N\}$
當 $k \geq 2n-2$ ，也就是當 $c \geq 3a-2$ 時， $f(n,n,c) = n^2$ 。

證明：

以 n=6 舉例說明：

一個邊長 6 的正方體，可分成左下角 s^2 和右上角 t^2 的兩個正方體，則數對(s, t)的可能有 3 種：(3,3)、(2,4)、(1,5)。表 1 就是對這三種可能，隨著 k 的增加，把 $s^2 + t^2 + sk$ 的值算出來。有底色的部份就是三種可能中較小的，也就是我們所定義的 $f(n, n, n+k)$。廣義來說(0,6)也可以看成第 4 種，只是(0,6)的這一組，不管 k 的值是多少，$s^2 + t^2 + sk$ 的值都是 36。也就是當 k 大於等於 10 時，我們只要擺 36 個城堡就好。

圖 1 向上延伸 k 層

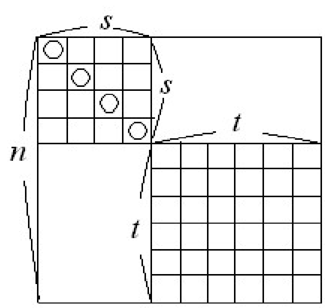


圖 2 邊長分別爲 s 和 t 的正方體

表 1 n=6 的情形

	(s, t)=(3,3)	(s, t)=(2,4)	(s, t)=(1,5)
k=0	3^2+3^2=18	2^2+4^2=20	1^2+5^2=26
k=1	18+3=21	20+2=22	26+1=27
k=2	21+3=24	22+2=24	27+1=28
k=3	24+3=27	24+2=26	28+1=29
k=4		26+2=28	29+1=30
k=5		28+2=30	30+1=31
k=6		30+2=32	31+1=32
k=7		32+2=34	32+1=33
k=8			33+1=34
k=9			34+1=35
k=10			35+1=36
k=11			36

這個例子，可以約略的看出我們如何構造解。因此我們先說明如何構造解 S，再說明解 S 的大小不可再減少，接下來就是要證明定理二是對的。

證明:

（一）構造解

從定理 1 我們知道，當 $s+t=n$，一個 $n\times n\times n$ 的正方體，可分成左下角 s^2 和右上角 t^2 的兩個正方體(這邊我們假設 $s\le t$)。而這個正方體往某一方向多了 k 層變成 $n\times n\times(n+k)$ 的長方體。原先兩個正方體的城堡的延伸線也會延長。如圖 10 所展現的是兩個邊長分別爲 3 的正方體的組合，往 z 方向延伸一層後，可以看到共有 18 條線也跟著延伸一層。留下尚未覆蓋的部分，每一層只需再放 3 個城堡，就可以覆蓋因爲延伸而剩下的空格。一般的情況就是一層只需 s 個城堡，故 k 層只需 $s\times k$ 個城堡，即可覆蓋 $n\times n\times(n+k)$ 之長方體。

（二）找出解的下界以及證明解個數不會更少

設 $n\times n\times(n+k)$之解爲 S，$f(n, n, n+k)=|S|=m$。

1. 設第一層有最少的城堡，有 s 個。令 $t=n-s$，則該層至少有一邊長爲 t 之正方形，也就是有 t^2 個正方體需靠別層上下覆蓋。如圖 1。

2. D 區爲 $t\times t\times(n+k)$ 之長方體，已完全被覆蓋。現計算還需放幾個城堡，使得 B、C 各層(第 2 至 $n+k$ 層)得可完全被覆蓋。B、C 兩區未覆蓋的正方體數爲 $2st\,(n+k-1)-2st^2=2st(s+k-1)$。每多猜測一次，也就是多放一個城堡在 A 區，至多能在 B、C 兩區多覆蓋 $2t$ 個或 $s+t-1$ 個正方體，但因 $t>s$ ($s\le\frac{n}{2}\le t$)，故多猜測一次至多能再有效會多蓋 $2t$ 個正方體，可推得至少要再猜 $\frac{2st\,(s+k-1)}{2t}=s\,(s+k-1)$ 次。由 1、2 知，$|S|\ge s+t^2+s^2+sk-s=s^2+t^2+sk$。

3. 將$t=n-s$代入上式可得

$$|S| \geq s^2+(n-s)^2+sk=2s^2-s(2n-k)+n^2$$

(也就是當 k 固定時，$|S|$的最小值時也是 s 的二次函數)，配方後得

$$=2(s-\frac{(2n-k)}{4})2+\frac{4n^2+4nk-k^2}{8}$$

為了得到函數的最小值，且s是正整數，因此s是最接近$\frac{2n-k}{4}$的整數。這也是為什麼當k=2n－2 時，s取 0 或 1 得到的函數值是一樣，都是n^2。而當k≧2n－2 時，因為s必需是正整數的原因，所以取s＝0，會得到$|S|=n^2$。

四、 $a=b>c$

定理三
$f(n+1,n+1,k) \leq f(n,n,k)+k$

證明：

若 $f(n,n,k)=m$，表示 m 個城堡就可以看守 n×n×k 的長方體，如圖 3 這樣在 n×n×k 的長方體外面再放一個 k 個城堡組成的 1×1×k 的長方柱，如此$(n+1)\times(n+1)\times k$ 的長方體完全被看守了。所以$(n+1)^2\times k$ 的解，至多只要 $f(n,n,k)+k$ 個就好了。

圖 3 外加一柱的情形

定理四
當$n\geq 2$， $f(n,n,2)=2(n-1)$

只用 2n－3 個城堡不能保證完全看守$n\times n\times 2$的長方體。

證明：

因$\left\lfloor\frac{2n-3}{2}\right\rfloor=n-2$，也就是說較少那層最多只有 n－2 個城堡，則這一層還有 4 格需另一層看守。此時只剩下 n－5 個城堡可放在第二層，這$n-5$個城堡可縱向(或橫向)看守$n-5$行(或列)，這時還有 3 行(或列)需要看守，考慮第一層 n－2 個城堡的上下看守，及第二層的橫向看守 n－5 個，總共最多還蓋不滿 2 行，故用$n-5$個蓋不滿$(n-2)\times(n-2)$的正方形。如此證明了也就是 $f(n,n,2)>2n-3$。

定理五
$f(4,4,3)=8$ ， $f(5,5,3)=10$
當 $n\ge 6$ ， $f(n,n,3)=3n-6$

定理五的證明跟定理四的證明很類似，也是用鴿籠原理加上一些仔細的計數，就可以完成證明。

在我們進行計算之後，發現以下的結果：

當 $n\ge 2$ ， $f(n,n,2)=2(n-1)$

當 $n\ge 6$ ， $f(n,n,3)=3(n-2)$

當 $n\ge 12$ ， $f(n,n,4)=4(n-3)$

當 $n\ge 20$ ， $f(n,n,5)=5(n-4)$

根據以上的結果，我們可以提出以下的猜想：

猜想一
當 $n\ge c(c-1)$ 時， $f(n,n,c)=c(n-c+1)$

區塊分割法 －－ 針對 $n\le c(c-1)$

使用這個方法找到的可靠的城堡並不能確定是最少的情況，但已經對城堡的個數給一個上界。也就是我們知道最佳解不會超過我們所給的值。

我們把長方體切成 c 層，每一層都是邊長 n 正方形。如圖 4，把這邊長為 n 的正方形切成 s 個小正方形(區塊)，設這些小正方形的邊長分別是 x_1 、 x_2 、 … 、 x_s ， $x_i\in\boldsymbol{N}$ 一個邊長 x_i 的區塊如完全靠上下看守，則需要 x_i^2 個城堡。我們只需要照著轉格的方式排列，在每一層都放置 x_i 個城堡。

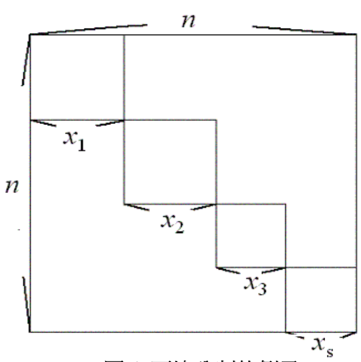


圖 4 區塊分割的例子

除了這 x_i 層之外的 $c-x_i$ 層，各層在這邊長 x_i 的區塊都不需要有城堡，而在其它的正方形都有跟邊長一樣數量的城堡，也就是需要 $n-x_i$ 個城堡，那就可以完全

看守這些層。如此，每一層在一個區塊可以缺席一次，故我們計算在 $x_1, x_2, ...x_{s-1}$ 這幾個區塊中，累計的缺席的層數 $t = c - x_1 + c - x_2 + .. + c - x_{s-1}$，也是最後一個區塊 x_s 中，有 t 層必須各層都有 x_s 個城堡。

已知 $x_1 + x_2 + ... + x_{s-1} + x_s = n$，並假設 $x_1 \ge x_2 \ge ...... \ge x_s$，若 $c - x_1 + c - x_2 + .. + c - x_{s-1} \le c$。則定義

$f(n,n,c) = \min\{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{s-1}^2 + t\,x_s \mid x_1 + x_2 + ... + x_s = n$， $x_1 \ge x_2 \ge ...... \ge x_s$，

$t = c - x_1 + c - x_2 + .. + c - x_{s-1}$， $x_i \in \boldsymbol{N}\}$。

若 $a = tc (t \in N)$，則我們說 $a \times a \times c$ 是第 t 個分段點，而 $a \times a \times c$ 到 $(tc + c) \times (tc + c) \times c$ 叫第 t 個區段。已經知道，在第 t 分段點做區塊分割時是(t+1)等分的。如表 2 就是 $c = 10$ 的例子。

表 2　c = 10 區塊分割分段點的排列

a		a		c		區塊數	區塊分割
10	×	10	×	10		2	$5^2 + 5^2$
20	×	20	×	10		3	$7^2 + 7^2 + 6^2$
30	×	30	×	10		4	$8^2 + 8^2 + 7^2 + 7^2$
40	×	40	×	10		5	$8^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2$
50	×	50	×	10		6	$9^2 + 9^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2$
60	×	60	×	10		7	$9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2$
70	×	70	×	10		8	$9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 8^2 + 8^2$
80	×	80	×	10		9	$9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 8^2$
90	×	90	×	10		10	$9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2$

我們說第t個分段點會被 $t+1$ 等分，是因為他不能被t等分，這樣會被分成t個邊長c的區塊，如此所需的城堡數tc^2，會比原先的 $(t+1)\left\lceil \frac{tc}{t+1} \right\rceil^2$ 還來得大。也不能被t＋2等分，若分成t＋2個區塊，缺席的總層數會超過c層，這時就不只 x_{t+2} 的係數是c，還有其它更多區塊不能只用邊長的平方計算，而都要去乘上長方體的高c，如此一來，所需的城堡數會比分成t＋1塊來的多。

而對於第 t 區段之間的 a，也就是 $tc < a < (t+1)c$ 時，$a \times a \times c$ 做區塊分割時是分成 $t+2$ 區塊，而前 t 塊的邊長 x_1、x_2、…、x_{t+1}，這些數彼此的差也都不大於 1，x_{t+2} 則是介於 1 到 $\left\lfloor \frac{n}{t+1} \right\rfloor$ 的整數。第 t 個分段點可以看出來，在每一個區段之間，$f(n+1,n+1,c) - f(n,n,c)$ 是相當有規律的。利用這個規律，可以很容易用程式把 $f(n,n,c)$ 的值算出來。這個規律我們透過下面表 3 這個例子來說明。

表 3　區塊分割法遞增的規律

a		a		c		區塊數	區塊分割	城堡數	差	
10	×	10	×	10		2	5^2+5^2	50		
11	×	11	×	10		2	$5^2+5^2+10\times1$	60	10	2 次 10
12	×	12	×	10		2	$5^2+5^2+10\times2$ $6^2+5^2+9\times1$	70	10	
13	×	13	×	10		2	$6^2+5^2+9\times2$	79	9	
14	×	14	×	10		2	$6^2+5^2+9\times3$ $6^2+6^2+8\times2$	88	9	2 次 9
15	×	15	×	10		2	$6^2+6^2+8\times3$	96	8	
16	×	16	×	10		2	$6^2+6^2+8\times4$	104	8	
17	×	17	×	10		2	$6^2+6^2+8\times5$	112	8	
18	×	18	×	10		2	$6^2+6^2+8\times6$ $7^2+6^2+7\times5$	120	8	4 次 8
19	×	19	×	10		2	$7^2+6^2+7\times6$	127	7	
20	×	20	×	10		3	$7^2+6^2+7\times7$	134	7	

在每一區段的最一開始，$f(n+1,n+1,10) - f(n,n,10)$ 都會是 10，如此加 10 出現 2 次，這個 2＝2×6－10 (5 平方要變成 6 平方)，再來因為也是 5 進位成 6，所以是增加 2 次 9，再來是第一個 6 平方進位成 7 平方，所以會加 4 次 8。

一般來說，從第 t 個分斷點開始增加的數由 c 遞減，每次減 1。而同樣數字重覆的次數是：c 有 $2\times(x_t+1)-c$ 次；接下來如果都是要讓 x_t 進位成 x_t+1 次，則都是 2 次；一直到第一個要從 x_t+1 進位成 x_t+2，才會是 4 次；之後的 x_t+1 進位成 x_t+2，又會到 2 次。如此完成一個區段。

關於$2\times(x_t+1)-c$

這邊透過簡單的計算就可以輕易證明這個算式，如下：

假設所需 $x^2+x^2+...+x^2+tc$ 個城堡，

當第一個 x^2 進位成 $(x+1)^2$ 時，也就是 $(x+1)^2+x^2+...+x^2+(t-1)(c-1)$ ，

將兩式相等時，得到 $2(x+1)-c-t=0$ ，即 $t=2(x+1)-c$

五、 $a>b>c$

> 定理六
> 令 $g(x)=2x^2-(a+3b-2c)x+b(a+b-c)$ ，
> 當 $x=\text{round}(\dfrac{a+3b-2c}{4})$ 時，
> $f(a,b,c)\le g(x) \quad (a>b>c)$

D區的城堡數：

我們是把 $a\times b\times c$ 的長方體分成 c 層，每一層都是 $a\times b$ 的長方體。設第一層有最少的城堡，只有 x 個城堡 $(0\le x\le b)$，則第一層還有$(a-x)(b-x)$個正方體需要上下看守，也就是在 D 區至少要有$(a-x)(b-x)$個城堡。如圖 5 這些城堡如果平均分配到 $b-x$ 層，每層有 $a-x$ 個。

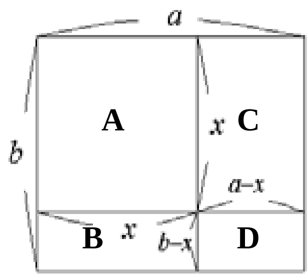


圖 5 第一層的情形

A區的城堡數

照前一段，則共有 $c-(b-x)$層在 D 區是沒有城堡(包括第一層)，這些層在 A 區都要 x 個城堡，共需$(c+x-b)\ x$個城堡。因爲至少有第一層在 D 區是沒有城堡，且 $b>c$，因此我們知道 $0<(c+x-b)<x$。

D 區有城堡的層數是 $b-x$ 層，考慮這些層在 A 區的情況。因爲 A 區有 x 個城堡的已經有$(c+x-b)$層了，這些在 A 區的城堡至少能形成一個邊長$(c+x-b)$的正方形，如此 $b-x$ 層中，每層只需要 $x-(c+x-b)$個城堡。因此需要$(b-x)(b-c)$個城堡。

城堡總數

把這三類加起來得到城堡數有

$2x^2 - (a + 3b - 2c)x + b(a + b - c)$…………….(1)

這是一個二次函數。當 x 是在 $0 \le x \le b$ 這範圍中離 $\dfrac{a+3b-2c}{4}$ 最近的整數時，城堡數有最少。我們只要把給定的 a、b、c 代進去算出 x，再把 x 代到(1)的二次函數中，就可以知道需要嘗試的次數了。

而當 $x = b$ 時，此時 $\dfrac{a+3b-2c}{4} \ge b - \dfrac{1}{2}$，即 $a \ge b + 2c - 2$ 時，函數值會等於 bc。這跟 $b = c$ 的情況，$a \ge 2c - 2$ 時只要試 c^2 次就好的結果是一致的。

但當 $a = b$ 時，這個方法得到的城堡數會比用區塊分割法得到的城堡數還多，這個部分是個不錯的問題日後可再深入研究。

六、 Clique polynomial 的分析

首先是名詞解釋，clique 在圖論上是指完全圖，而 polynomial 是多項式，所以 clique polynomial 意思就是將可能的完全圖用 x 多項式來展開。我們透過 clique polynomial 來幫助我們來表示解的狀況。當每個點完全變成孤立點，則此組城堡爲一組可靠的城堡。

表 4　$a=b=c=4$ 的 $G(E,V)$ clique 多項式分布 $E=edge$　$V=vertex$

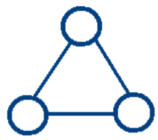
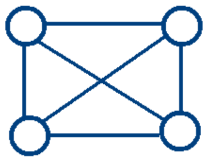
	0　　　$V(G)=1$　$E(G)=0$ 因爲通通都有連接，所以並沒有孤立點
	$288x$　　　$V(G)=2$　$E(G)=1$ 每 1 個 x^3 包含了 6 個 x，所以 $48\times 6=288$
	$192x^2$　　　$V(G)=3$　$E(G)=3$ 每 1 個 x^3 包含了 4 個 x^2，所以 $48\times 4=192$
	$48x^3$　　　$V(G)=4$　$E(G)=6$ 1 個長條恰會形成 1 個 x^3 的完全圖，所以總共有 $4\times 4\times 3=48$
$y=48x^3+192x^2+288x+0$	

表 5　$a=b=c=4$ 的 $G(E,V)$ clique 多項式分布　城堡在 $(0,0,0)$ 後的情形

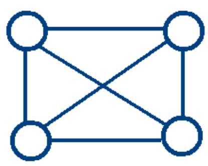
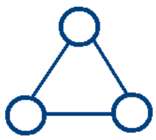
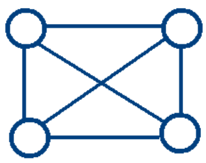
	10　　　$V(G)=1$　$E(G)=0$ 被看守到的點對外連線將被完全切斷而成爲孤立點，故 $4\times 3-2=10$
	$216x$　　　$V(G)=2$　$E(G)=1$ 共有 $2\times 3\times 3\times 3+6\times 3=72$ 個 x 被破壞，所以 $288-72=216$
	$126x^2$　　　$V(G)=3$　$E(G)=3$ 共有 $2\times 3\times 3\times 3+4\times 3=66$ 個 x^2 被破壞，所以 $192-66=126$
	$27x^3$　　　$V(G)=4$　$E(G)=6$ 共有 $2\times 3\times 3+3=21$ 個 x^3 被破壞，所以 $48-21=27$
$y=27x^3+126x^2+216x+10$	

表 6　$a=b=c=4$ 的 $G(E,V)$ clique 多項式分布　繼 $(0,0,0)$ 城堡在 $(3,3,0)$ 後的情形

	18　$V(G)=1$　$E(G)=0$ 原來 10 個扣掉重複 2 個還有 8 個，故 $10+8=18$
	$216x$　$V(G)=2$　$E(G)=1$ 共有 $2\times6\times3+6=72$ 個 x 被破壞，所以 $288-72=216$
	$126x^2$　$V(G)=3$　$E(G)=3$ 共有 $2\times6\times3+4=40$ 個 x^2 被破壞，所以 $126-40=86$
	$16x^3$　$V(G)=4$　$E(G)=6$ 共有 $21-3\times2-1\times4=11$ 個 x^3 被破壞，所以 $27-11=16$
$y=16x^3+86x^2+166x+18$	

最後我們將 8 個點的結果合併起來。

表 7　$a=b=c=4$ 的一組解

原始	$48x^3+192x^2+288x+0$
(0,0,0)	$27x^3+126x^2+216x+10$
(3,3,0)	$16x^3+86x^2+166x+18$
(1,1,1)	$5x^3+x^2+216x+10$
(2,2,1)	$20x^2+68x+36$
(1,2,2)	$11x^2+43x+43$
(2,1,2)	$6x^2+22x+50$
(0,3,3)	$3x^2+9x+57$
(3,0,3)	64

將其函數變化作圖後如下圖：

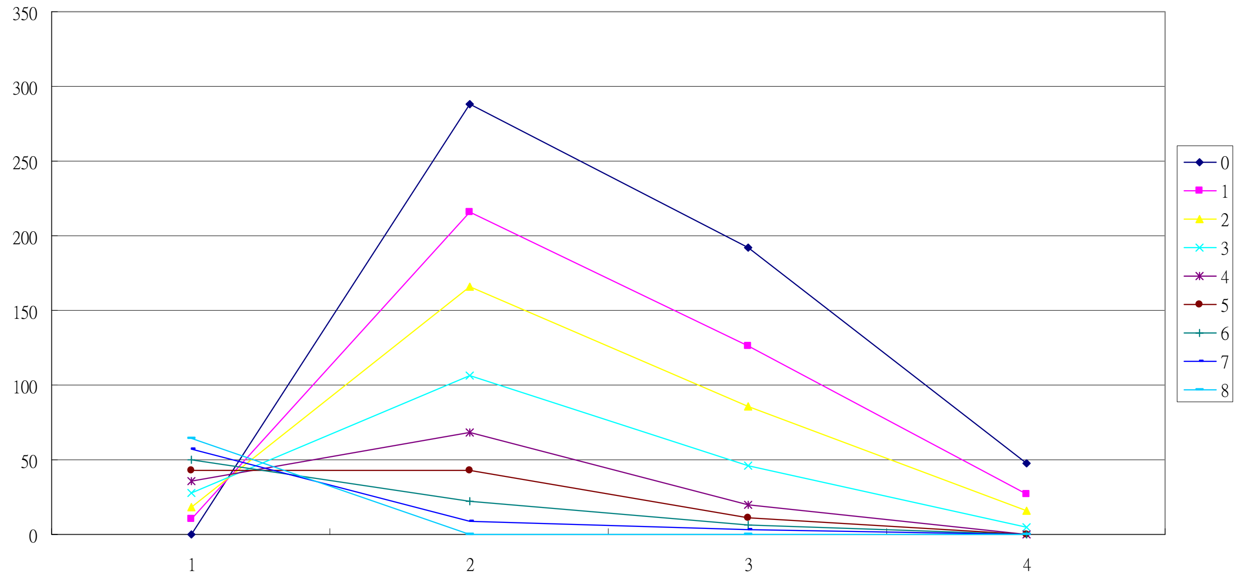


圖 6　$a=b=c=4$ 的一組解的作圖

我們可以嘗試另外一種擺法。

表 8　$a=b=c=4$ 的另一組解

原始	$48x^3+192x^2+288x+0$
(0,0,0)	$27x^3+126x^2+216x+10$
(1,1,0)	$16x^3+86x^2+166x+18$
(1,0,1)	$12x^3+63x^2+129x+25$
(0,1,1)	$12x^3+48x^2+96x+32$
(2,2,2)	$3x^3+18x^2+48x+42$
(3,3,2)	$6x^2+22x+50$
(3,2,3)	$3x^2+9x+57$
(2,3,3)	64

其作圖如下：

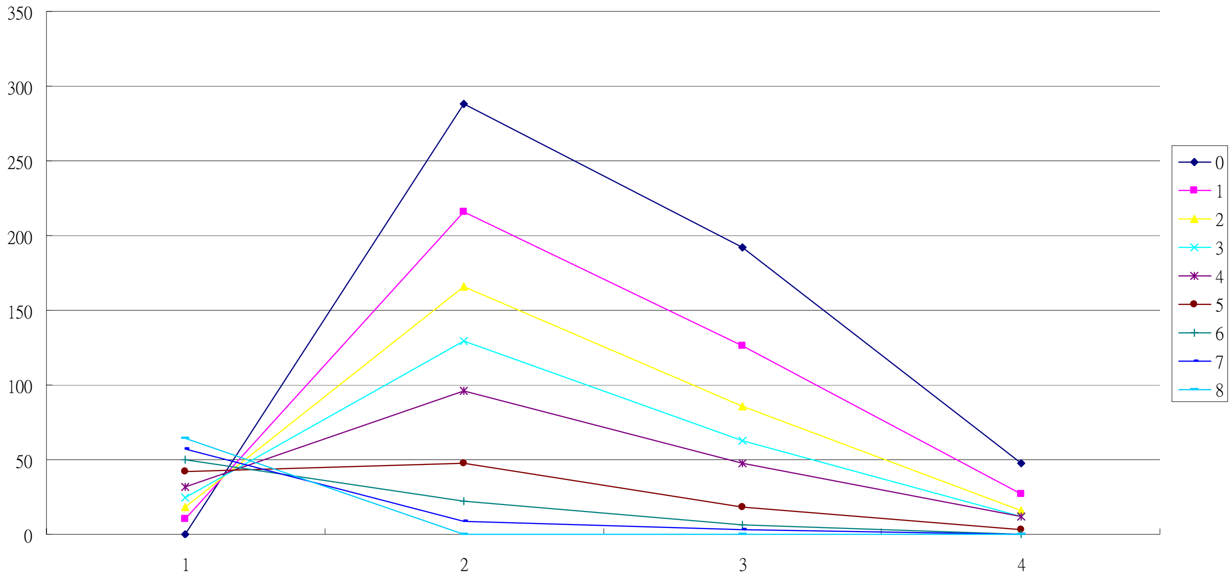


圖 7　$a=b=c=4$ 的另一組解(表 5)的作圖

我們再以二維的方式來架構三維的 clique 多項式分佈。透過簡易的計算，我們可以得知二維 clique 多項式分佈。我們以 4×4 爲例，其 clique 多項式爲 $8x^3+32x^2+48x+0$，接下來我們也可以算出再刪除幾個點後(刪除的點必須不在同行且不在同列)的 clique 多項式，列表如下。

表 9　平面 clique 多項式的變化

原始	$8x^3+32x^2+48x+0$
刪除 1 個點	$6x^2+18x+7$
刪除 2 個點	$4x+12$
刪除 3 個點	16

接著我們可以利用以上的結果來運算刪除 (0,0,0) 的 clique 多項式。我們令 $A_4=8x^3+32x^2+48x+0$，刪除(0,0,0)後與刪除之前的差之 clique 多項式爲 $3\left(A_4+\sum_{i=0}^{4}C_{n-i}^{4}\right)$，於是可以得到刪除後的 clique 多項式爲 $27x^3+126x^2+216x+10$。

陸、 研究結果

引理一

$x_1+x_2+...+x_{s-1}+x_s=n$， $x_i\in N$

$\forall\,|x_i-x_j|\le 1 \quad\Rightarrow\quad x_1^2+x_2^2+...+x_{s-1}^2+x_s^2$有最小值

定理一

當$a=b=c=n$時， $f(n,n,n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2$

定理二

當$a=b=n<c=n+k$時， $f(n,n,n+k)\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor k$ 。

特別是$k\ge n-2$， $f(n,n,n+k)=n^2$ 。

定理三

$f(n+1,n+1,k)\le f(n,n,k)+k$

定理四

當$n\ge 2$， $f(n,n,2)=2(n-1)$

定理五

$f(4,4,3)=8$， $f(5,5,3)=10$

當$n\ge 6$， $f(n,n,3)=3n-6$

猜想一

當$n\ge c(c-1)$時， $f(n,n,c)=c(n-c+1)$

定理六

令$g(x)=2x^2-(a+3b-2c)x+b(a+b-c)$ ，

當$x=\text{round}(\frac{a+3b-2c}{4})$時，

$f(a,b,c)\le g(x) \quad (a>b>c)$

柒、 討論

我們在$a=b=c=n$ 、 $a=b<c$的部分已經完成。我們接下來要繼續做下去的是把當$a=b>c$時的猜想驗證是否爲真並試著把它證出來，並且在$a>b>c$的個數計算的配方法找出其與區塊分割法偏差的原因。

捌、 結論

一塊長寬高分別爲 a、b、c 長方體，交給數個城堡看守，則達成可靠的城堡所需的個數爲：

一、當$a=b=c=n$時，一組可靠的城堡所需的最少個數爲$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2$。

二、當$a=b<c$時，一組可靠的城堡所需的最少個數爲
$\min\left\{s^2+t^2+s(c-a) \mid s+t=a, t\ge s\ge 0, s,t\in N\right\}$，特別當$c\ge 2n-2$時，只要$a^2$。

三、當$a=b>c$時，利用區塊分割法能夠算出一組可靠的城堡所需個數的上界。並且在固定c的情況下，隨著a遞增的，需要的個數也是呈現規則性的遞增。

四、當 $a > b > c$ 時，令$x=\mathrm{round}\left(\frac{a+3b-2c}{4}\right)$，一組可靠的城堡所需的個數最多只要$2x^2-(a+3b-2c)x+b(a+b-c)$個。

玖、 參考資料及其他

一、張康、張茂盛、阮夙姿，離散數學，東華書局，2002 年出版

二、單墫、胡大同，數學奧林匹亞第 28、29 界國際數學經賽預選題，九章出版社

三、Stanley B. Lippman, Josée Lajoie,，譯者 侯捷，C++ Primer 中文版，台灣培生教育出版股份有限公司、碁峰資訊股份有限公司，2001 年出版

高中組 數學科

040408　城堡保衛

1. 看不出 Dev-C++ 4.9.9.2 對於本研究有任何深入的關係。

2. 報告過程缺乏視覺表達。

3. 引入 Clique Polynomial 概念。有進行結構性的分析。