040417

Ramsey

『矩』棋不定

壹、摘要：

從黑白棋遊戲中訂定新的規則，延伸創造出新的遊戲；從兩人對奕推廣到 n 人遊戲，並找出此類兩人博奕遊戲的『必勝法則』，並且發現與特定『Ramsey 數』模型的關係。

貳、研究動機：

高一上學期討論集合個數時，老師曾經問到：『有一首流行歌曲是這樣唱的：十個男人七個傻、八個呆、九個壞，還有一個人人愛。試問，這十個男人中至少有幾個又呆又傻又壞？』同學對這個問題相當感興趣，就做出了坊間參考書也找不到的解答(討論四)。於是老師介紹一本課外讀物《拼圖拼字拼數學》作爲延伸閱讀的題材。這本書中提到了一個『嬉皮遊戲』，規則如下：在 $n\times n$ 的棋盤中，甲、乙兩人以黑白棋輪流下子博奕，先獲得正方形者爲勝。這個問題在 1960 年被提出，並且被證明了 6×6 的棋盤是和局的最大階數，換句話說，在 7×7 的棋盤中是不可能出現和局，一定可以分出勝負的，於是在班上掀起了一股圍棋熱潮。我們將規則中的『正方形』改爲矩形，作爲我們研究的題材，並且作延伸與推廣。

參、研究目的：

一、在 $n\times n$ 的棋盤中，二人對奕，最大的和局階數。

二、在 $n\times n$ 的棋盤中，k 人對奕，最大的和局階數。

三、在 $n\times n$ 的棋盤中，二人對奕，必勝法則。

四、在 $n\times m$ ($n<m$)的棋盤中，k 人對奕，最大的和局階數。

五、在公差爲 1 的等差 n 階棋盤中，二人對奕，最大的和局階數。

六、在公差爲 1 的等差 n 階棋盤中，二人對奕，必勝法則。

七、在公差爲 1 的等差 n 階棋盤中，3 人對奕，最大的和局階數。

肆、研究器材：

筆、紙、圍棋。

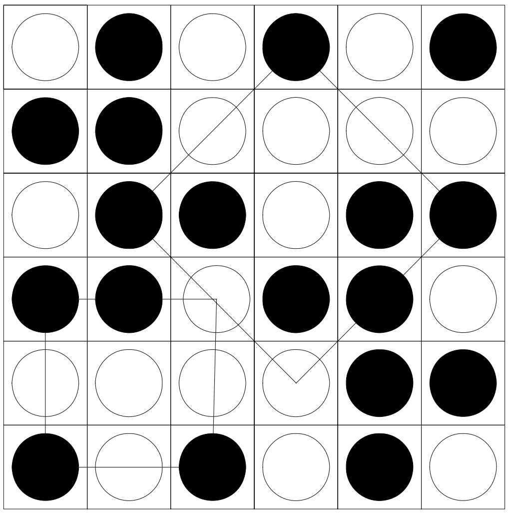
伍、研究過程與內容：

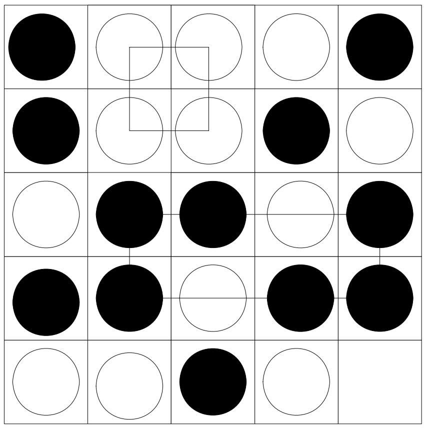
我們先說明『嬉皮遊戲』及其更改後的規則：

(一)、『嬉皮遊戲』：參賽者分別各執 18 個黑棋、白棋在 6×6 的棋盤上輪流下子，每次在棋盤任何空格擺一個棋子，但必須避免讓任意四個棋子構成正方形的四個角；這種正方形不限大小，傾斜任意角度都算(圖一)。如果對手的棋子形成『正方形』那你便贏得這場棋局。

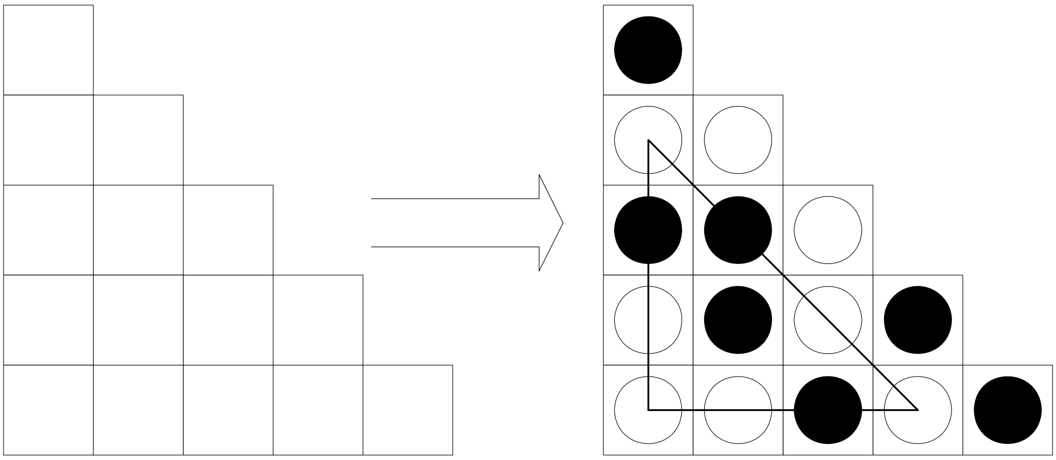
(二)、『矩棋遊戲』：在 $n\times n$ 的棋盤中，二人對奕，以黑白棋輪流下子，先獲得一矩形四個角均爲同色者爲勝(圖二)。

(三)、『三角棋遊戲』在棋盤的一角依次畫出 1、2、3、…..、n 個，二人對奕，以黑白棋輪流下子，先獲得一與原棋盤相似的三角均爲同色者爲勝(圖三)。





(圖一)　　(圖二)

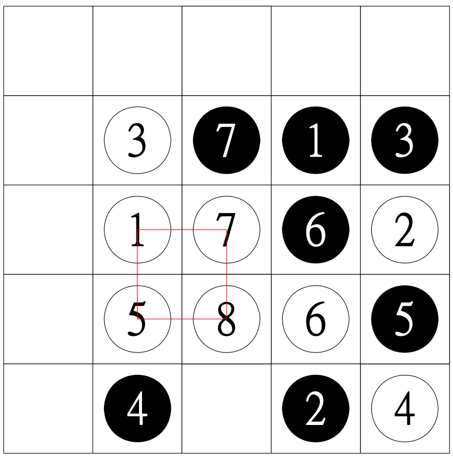


(圖三)

一、在 $n \times n$ 的棋盤中，二人對奕，最大的和局階數為 4，即 5× 5 的棋盤必可分勝負。

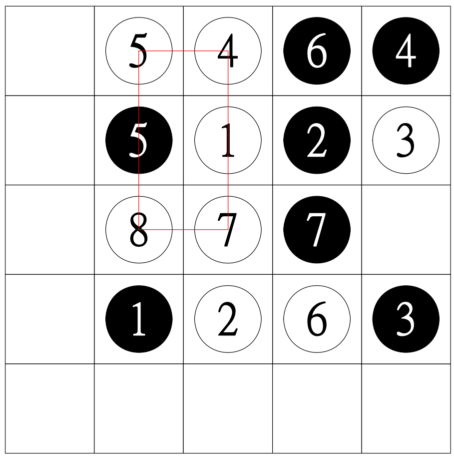
以下(圖四)是我們實驗的紀錄，5×5 的棋盤必可分勝負。

1



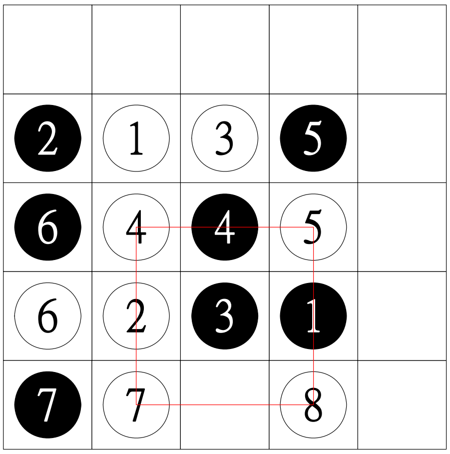
白: 先(勝)
黑: 後

2



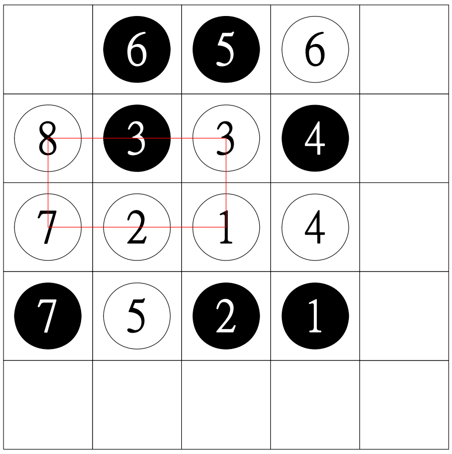
白: 先(勝)
黑: 後

3



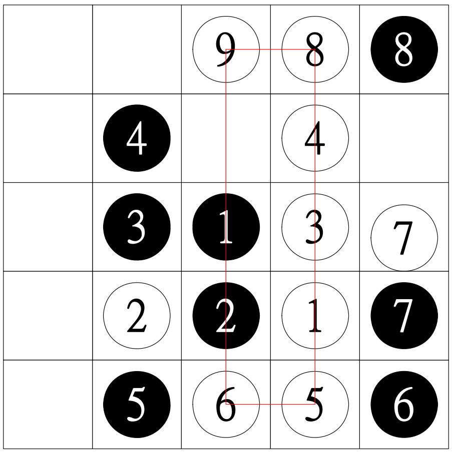
白: 先(勝)
黑: 後

4



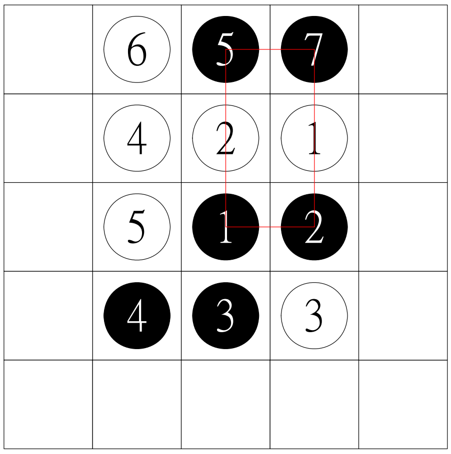
白: 先(勝)
黑: 後

5



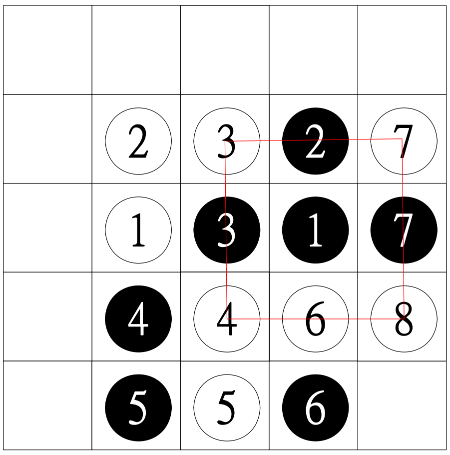
白: 先(勝)
黑: 後

6



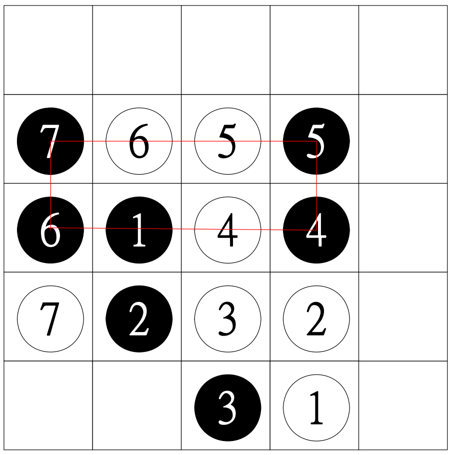
白: 先(勝)
黑: 後

7



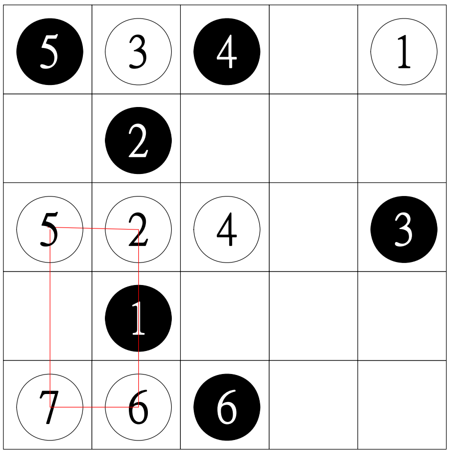
白: 先(勝)
黑: 後

8



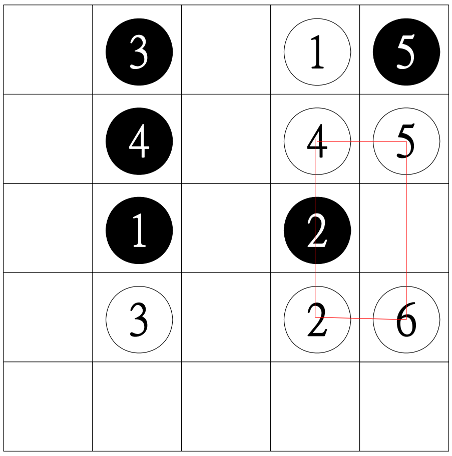
白: 先(勝)
黑: 後

9



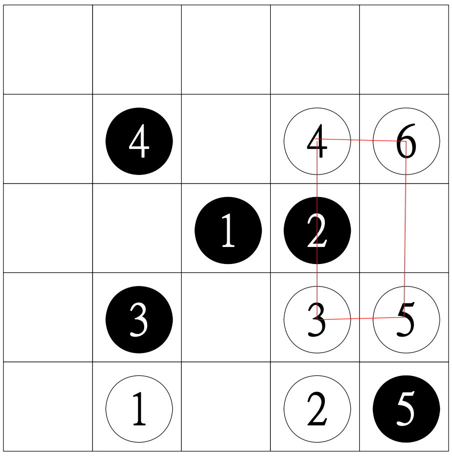
白: 先(勝)
黑: 後

10



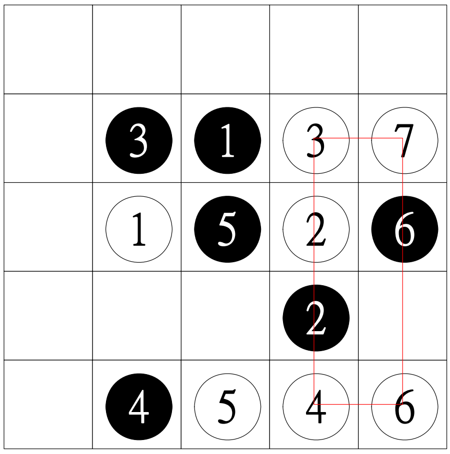
白: 先(勝)
黑: 後

11



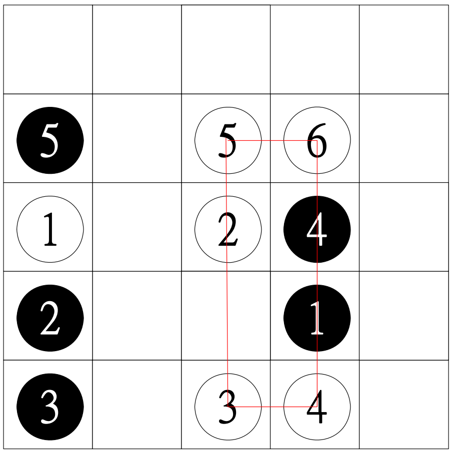
白: 先(勝)
黑: 後

12



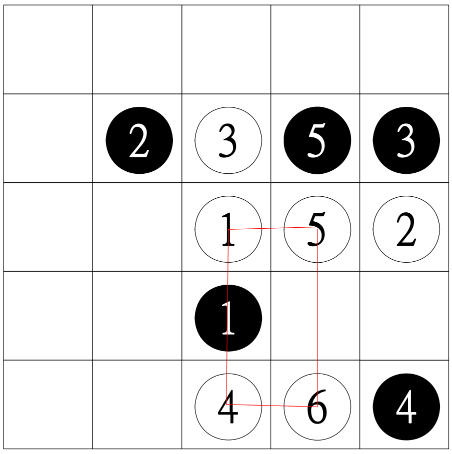
白: 先(勝)
黑: 後

13



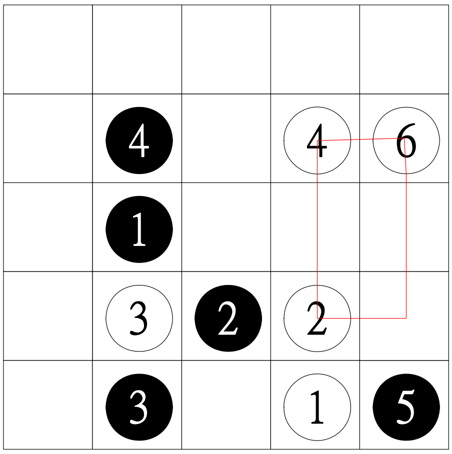
白: 先(勝)
黑: 後

14



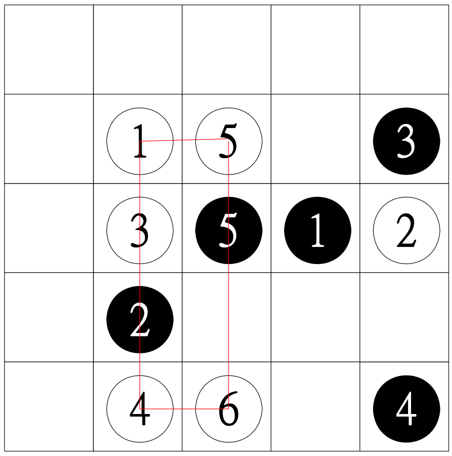
白: 先(勝)
黑: 後

15



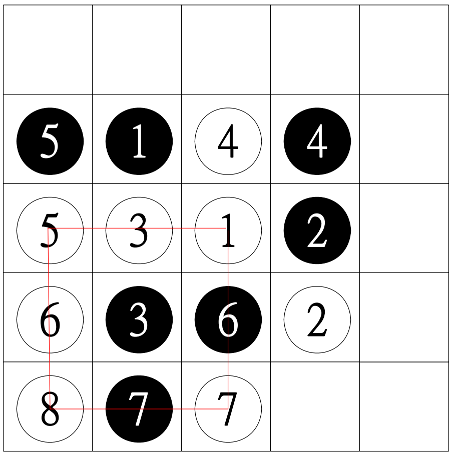
白: 先(勝)
黑: 後

16



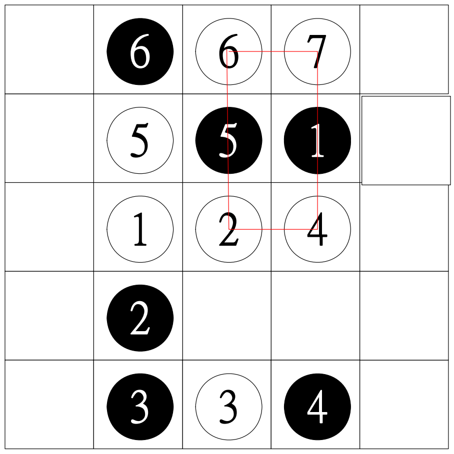
白: 先(勝)
黑: 後

17



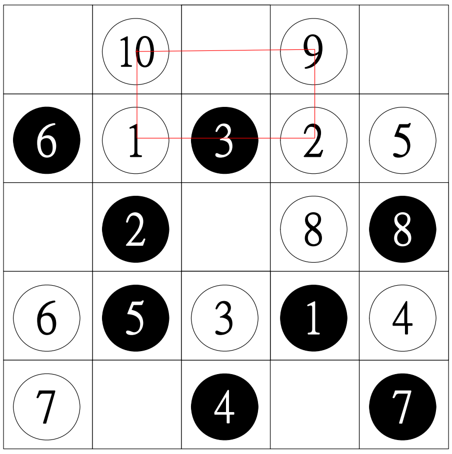
白: 先(勝)
黑: 後

18



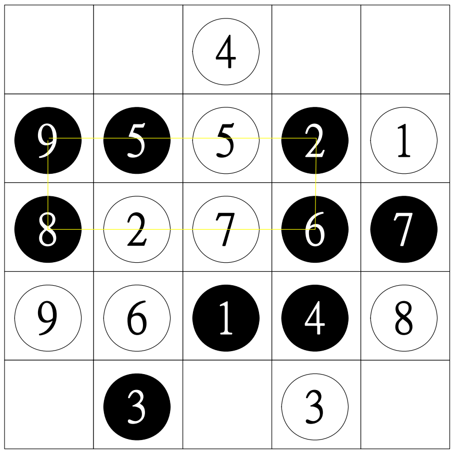
白: 先(勝)
白: 後

19



白: 先(勝)
黑: 後

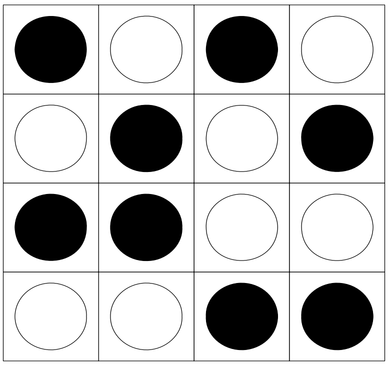
20



白: 先
黑: 後(勝)

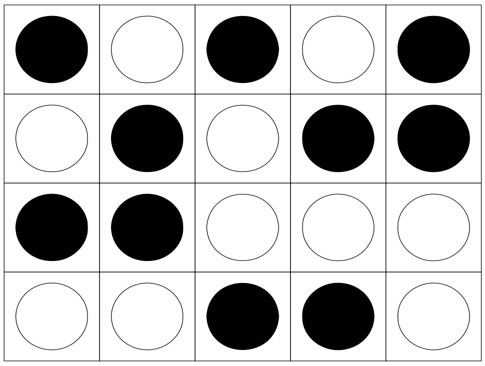
(圖四)

由以上的實驗結果，我們**猜測**在 5×5 的棋盤上可以讓兩人對奕，分出勝負。



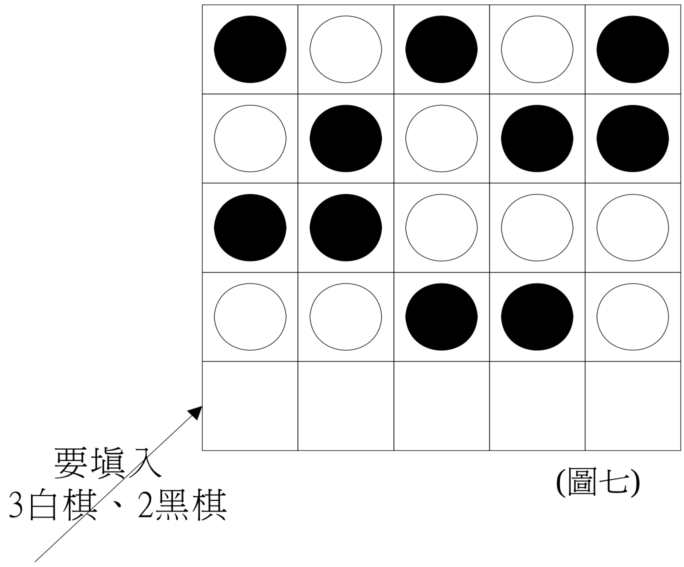
(4×4)

(圖五)



(4×5)

(圖六)



(5×5)

(圖七)

證法 1：

集合的元素計算

我們可以很輕易地作出 4× 4 和局的情況(圖五)，若再加一行變成 4×5 的棋盤則其中恰好有兩列中的白棋爲 3 個(圖六)，否則將出現四角同色的矩形。

最後一列加入五個棋子爲 3 白棋 2 黑棋(因爲白棋較黑棋多 1 顆) (圖七)，故這個問題就變成了：

5 3 3 3 5

若有 2 人共同有兩種以上的缺點，則會形成一個四角均爲白棋的矩形。

我們令這 5 個男人爲宇集 U、3 個傻男人爲集合 A、3 個呆男人爲集合 B、3 個壞男人爲集合 C，這個問題轉換爲：

設 $n(U)=5$ 、 $n(A)=3$ 、 $n(B)=3$ 、 $n(C)=3$ ，又在不失一般姓的情況下，設 $n(A\cap B)\geq n(A\cap C)\geq n(B\cap C)$ ，求 $n(A\cap B)$ 的最小值爲何？

已知：$3 \le n(A \cup B \cup C) \le 5$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow 3 \cdot n(A \cap B) \ge n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B \cup C)$$

情況一：當 $n(A \cup B \cup C)=3$；

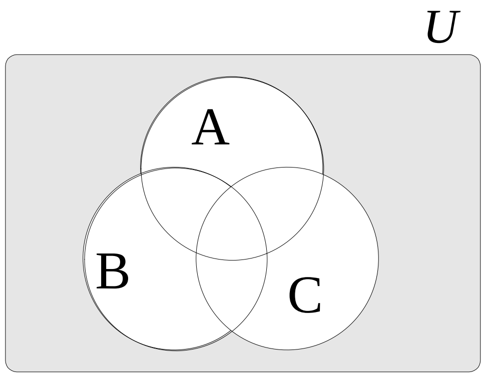
$3 \cdot n(A \cap B) \ge 3+3+3-3 = 6 \Rightarrow n(A \cap B) \ge 2$

情況二：當 $n(A \cup B \cup C)=4$；

$3 \cdot n(A \cap B) \ge 3+3+3-4 = 5 \Rightarrow n(A \cap B) \ge \frac{5}{3}$

情況三：當 $n(A \cup B \cup C)=5$；

$3 \cdot \mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \ge 3+3+3-5 = 4 \Rightarrow n(A \cap B) \ge \frac{4}{3}$



(圖八)

但 $\mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \in \mathbf{Z}$，

因此， $\mathrm{n}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \ge 2$

證法 2：

樹狀圖討論：

在不失一般性的情況之下我們假設白棋的個數大於黑棋的個數，我們以列的觀點來看，在 $n \times n$ 的棋盤中有以下幾個性質：

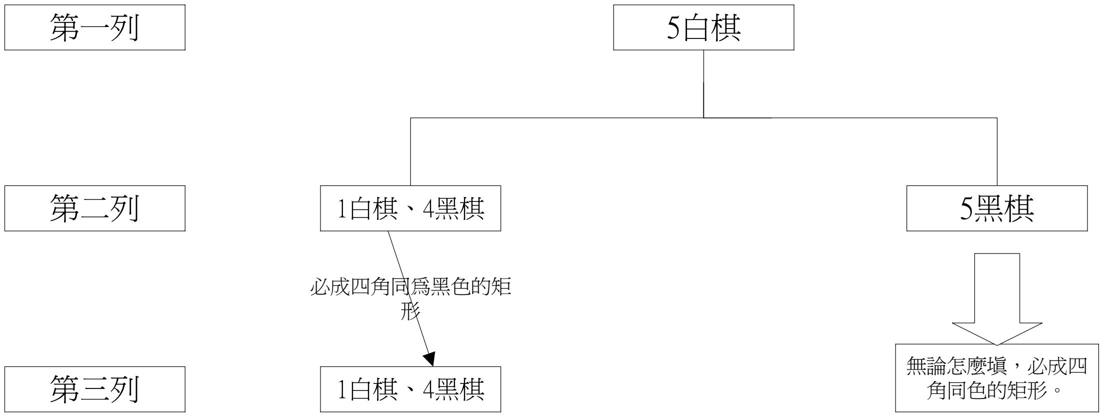
當 n=5 時：

(1)若某一列為『5 白棋』，則其餘列只能是『1 白棋 4 黑棋』或者『5 黑棋』，否則會產生白棋方勝。

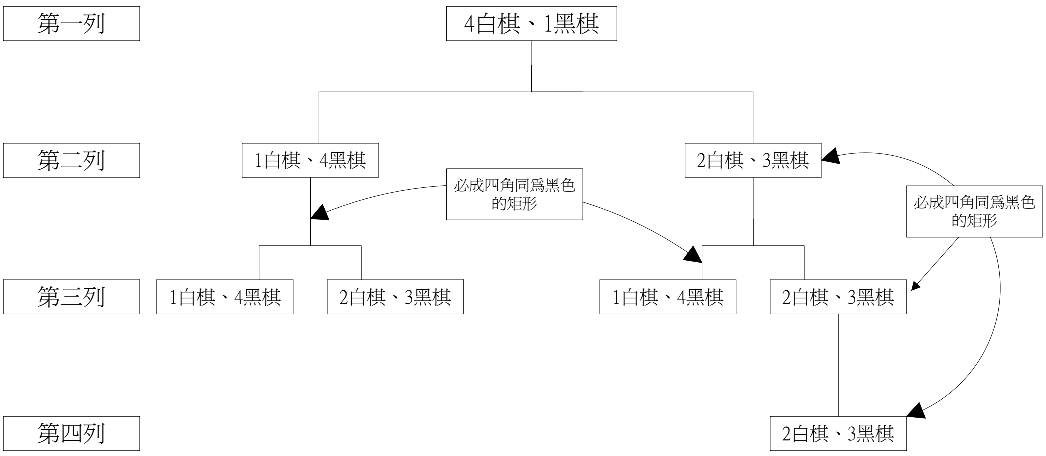
(2)若某一列為 4 白棋 1 黑棋，則其餘列只能是『2 白棋 3 黑棋』、『1 白棋 4 黑棋』或者『5 黑棋』，否則會產生白棋方勝。但由性質(1)知『5 黑棋』不會出現。

(3)若某一列為 3 白棋 2 黑棋，則其餘列只能是『3 白棋 2 黑棋』、『2 白棋 3 黑棋』、『1 白棋 4 黑棋』或者『5 黑棋』，否則會產生白棋方勝。但由性質(1)、(2)知『1 白棋 4 黑棋』以及『5 黑棋』不會出現。

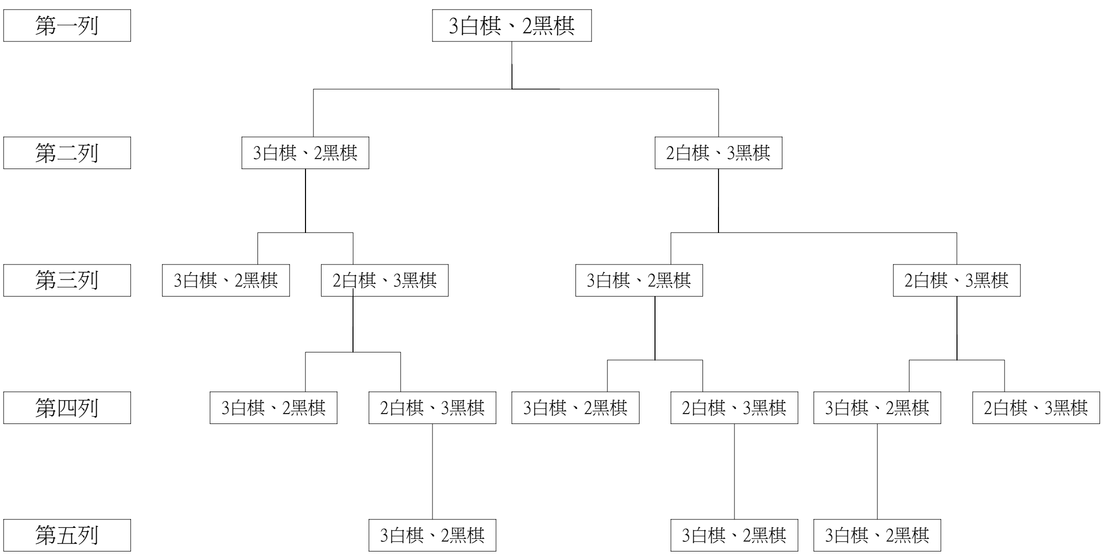
情況一：



情況二：



情況三：



(圖九)

說明：

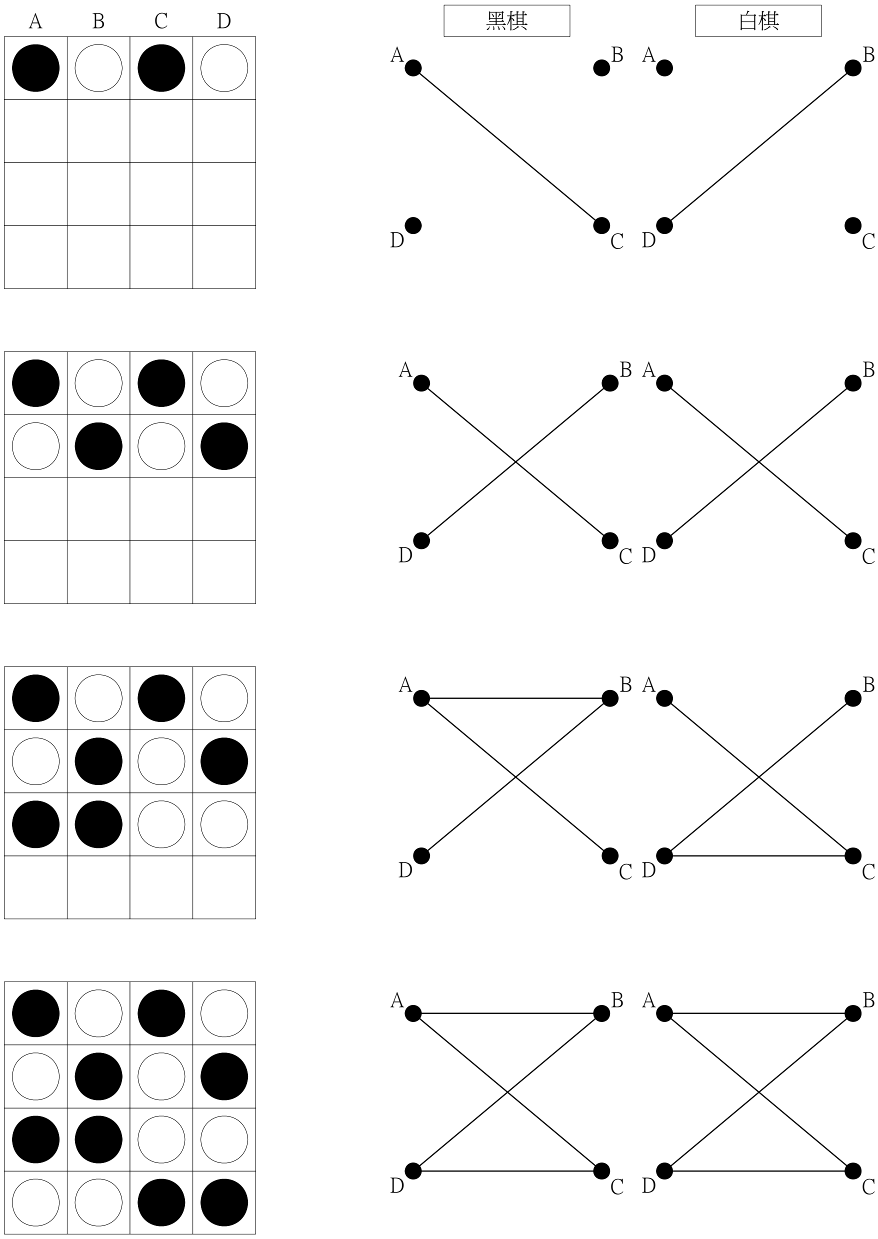
若有三列同爲 3 白、2 黑的棋子，由前證明知：則必有四角同爲白色棋的矩形；同樣地，有三列同爲 2 白、3 黑的棋子，則必有四角同爲黑色棋的矩形

證法 3：

數圖轉換法：

在下(圖十)我們在 4×4 的棋盤上標上 A、B、C、D，並畫出兩個黑白正方形的四個頂點，左邊方格中的每一列『**同色的點**』就在右邊畫上對應的『**對角連線**』，經過計算：左邊方格中同列同色棋的的個數最少爲：

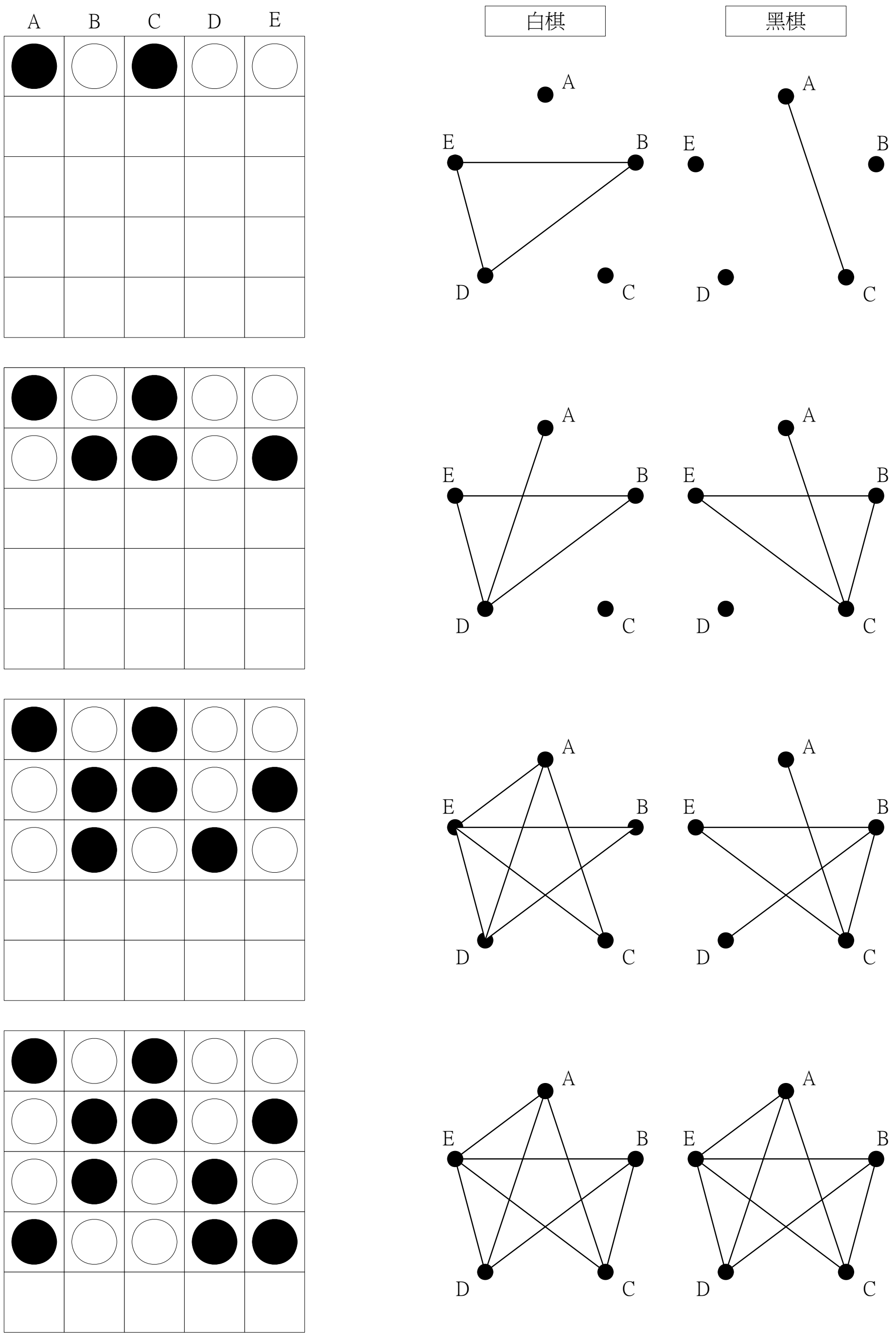
白棋 $C_2^2+C_2^2+C_2^2+C_2^2=4$ ，黑棋 $C_2^2+C_2^2+C_2^2+C_2^2=4$ ，而每一個正方形的對角線有 6 條。明顯，4<6。在右邊四邊形中不會產生對角線重疊的情況，轉換到左邊方格中也就表示不會產生矩形四角同色的情況。(如圖十)



(圖十)

我們同上的手法再討論 5×5 的棋盤，也標上 A、B、C、D、E(如圖十一)，若白棋下子 13 個，則左邊方格中同列同色棋的的個數最少為：

白棋 $C_2^3+C_2^3+C_2^3+C_2^2+C_2^2=11$，黑棋 $C_2^3+C_2^3+C_2^2+C_2^2+C_2^2=9$。明顯，11>10。在右邊五邊形中一定會產生對角線重疊的情況，轉換到左邊方格中也就表示必產生矩形四角同色的情況。



(圖十一)

證法 4：

柯西不等式：

我們將這個問題轉換為 4×4 的棋盤、5×5 的棋盤最多可以填入幾個棋子，使得這些棋子不會是矩形的四個角？

(4×4 的棋盤中)

設第一列有 x_1 個棋子、第二列有 x_2 個棋子、第三列有 x_3 個棋子、第四列有 x_4 個棋子，總共可以填入 $x_1+x_2+x_3+x_4=t$ 個棋子。因為不能形成四角同色的矩形，所以必須滿足：

$$C_2^{x_1}+C_2^{x_2}+C_2^{x_3}+C_2^{x_4}\le C_2^4$$

$$\Rightarrow \frac{x_1(x_1-1)}{2}+\frac{x_2(x_2-1)}{2}+\frac{x_3(x_3-1)}{2}+\frac{x_4(x_4-1)}{2}\le 6$$

$$\Rightarrow {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2-(x_1+x_2+x_3+x_4)\le 12$$

$$\Rightarrow {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2\le 12+t \text{ ……………………………………………………①}$$

又由『柯西不等式』知

$$({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2)\cdot(1^2+1^2+1^2+1^2)\ge(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \text{ ………………….②}$$

由①、②知：

$t^2-4t-48\le 0$

$2-\sqrt{52}\le\ t\ \le 2+\sqrt{52}\le 9.21$

因此，在 4×4 的棋盤中最多可以下 9 個棋子而且不會產生矩形 4 角同色的情況，明顯 $\frac{4\times4}{2}\le 9$，故兩人輪流下子，在 4×4 的棋盤中可以是和局收場的。

(5×5 的棋盤中)

如同上的符號，我們得到：

$$C_2^{x_1}+C_2^{x_2}+C_2^{x_3}+C_2^{x_4}+C_2^{x_5}\le C_2^5 \text{ ……………………………………………………①}$$

$$({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2+{x_5}^2)\cdot(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)\ge(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \text{ ……②}$$

得 $\frac{5-\sqrt{425}}{2}\le\ t\ \le\frac{5+\sqrt{425}}{2}\le 12.80$

因此，在 5×5 的棋盤中最多可以下 12 個棋子而且不會產生矩形 4 角同色的情況，明顯 $\frac{5\times5}{2}\ge 12$，故兩人輪流下子，在 5×5 的棋盤中是不可能以和局收場的，換句話說，必可分出勝負。

二、在 $n\times n$ 的棋盤中，k 人對奕，最大的和局階數為：k^2+k-2

我們先做一個 $k\ge 2$ 的例子：

假設 $k=3$：轉換為甲、乙、丙三人分別以黃、綠、紅三種顏色的棋輪流在 $n\times n$ 的棋盤中下子，n 至少為 11 才能使遊戲必可分出勝負。(不會產生和局)

證法 1：**數圖轉換法**

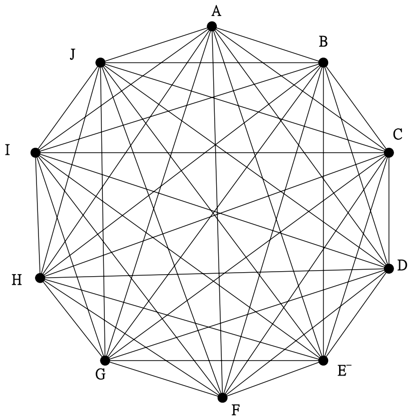
若 n=10，在不失一般性的情況之下，設黃棋先下共下 34 個子。

在 10×10 的方格中同列同色棋的的個數最少爲：

黃棋 $6\cdot C_2^3+4\cdot C_2^4=18+24=42$ 、綠棋 $7\cdot C_2^3+3\cdot C_2^4=21+18=39$ 、

紅棋 $7\cdot C_2^3+3\cdot C_2^4=21+18=39$

明顯 39<42≤$C_2^{10}=45$，在十邊形中中不會產生對角線重疊的情況，轉換到 10×10 的方格中也就表示不會產生矩形四角同色的情況。



(圖十二)

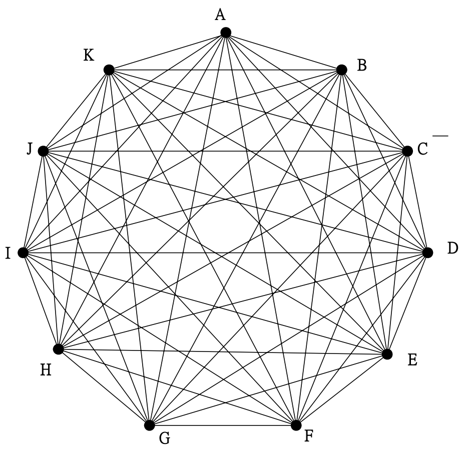
若 n=11，在不失一般性的情況之下，設黃棋先下共下 41 個子。

在 11×11 的方格中同列同色棋的的個數最少爲：

黃棋 $3\cdot C_2^3+8\cdot C_2^4=9+48=57$ 、綠棋 $4\cdot C_2^3+7\cdot C_2^4=12+42=54$ 、

紅棋 $4\cdot C_2^3+7\cdot C_2^4=12+42=54$

明顯 57≥$C_2^{11}=55$ ，在十一邊形中一定會產生對角線重疊的情況，轉換到 11×11 的方格中中也就表示必產生矩形四角同色的情況。



(圖十三)

證法 2：**柯西不等式**

(10×10 的棋盤中)

設第一列有 x_1 個棋子、第二列有 x_2 個棋子、………、第十列有 x_{10} 個棋子，總共可以填入 $x_1+x_2+...+x_{10}=t$ 個棋子。因爲不能形成四角同色的矩形，所以必須滿足：

$$\sum_{i=1}^{10} C_2^{x_i} \le C_2^{10}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} \frac{x_i(x_i-1)}{2} \le 45$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{10} x_i \ \le 90$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^{\,2} \le 90+t \text{ ……………………………………………………①}$$

又由『科西不等式』知

$$(\sum_{i=1}^{10} x_i^{\,2}) \cdot (\sum_{i=1}^{10} 1^2) \ge (\sum_{i=1}^{10} x_i \ )^2 \text{ ………………………………………②}$$

由①、②知：

$t^2 - 10 \cdot t - 900 \le 0$

$5 - \sqrt{925} \le t \ \le 5 + \sqrt{925} \le 35.41$

因此，在 10×10 的棋盤中最多可以下 35 個棋子而且，不會產生矩形４角同色的情況，明顯 $\dfrac{10\times 10}{3} \le 35$ ，故三人輪流下子，在 10×10 的棋盤中可以是和局收場的。

(11×11 的棋盤中)

如同上的符號，我們得到：

$$\sum_{i=1}^{11} C_2^{x_i} \le C_2^{11} \text{ ………………….……………………………①}$$

$$(\sum_{i=1}^{11} x_i^{\,2}) \cdot (\sum_{i=1}^{11} 1^2) \ge (\sum_{i=1}^{11} x_i \ )^2 \text{ ……………….....………………②}$$

得 $\dfrac{11-\sqrt{4961}}{2} \le \ t \ \le \dfrac{11+\sqrt{4961}}{2} \le 40.72$

因此，在 11×11 的棋盤中最多可以下 40 個棋子而且不會產生矩形４角同色的情況，明顯 $\dfrac{11\times 11}{3} \ge 40$，故三人輪流下子，在 11×11 的棋盤中是不可能以和局收場的，換句話說，必可分出勝負。

$k>3$：轉換爲甲、乙、丙………k 個人分別以不同顏色的棋輪流在 $n\times n$ 的棋盤中下子，n 至少爲 k^2+k-1 才能使遊戲必可分出勝負。

我們在(數圖轉換法)中先觀察其規則：

$k=2$ ，在 *5×5* 的棋盤中每一列爲 3 同色、2 同色，記爲(3+2)

$k=3$ ，在 *11×11* 的棋盤中每一列爲 4 同色、4 同色、3 同色，記爲(4+4+3)

我們猜測：

若 $k=4$，則同列同色棋的的個數最少的情況爲每列 5 同色、5 同色、5 同色、4 同色，記爲(5+5+5+4)，故在 19×19 的棋盤中必可分出勝負。

驗證：

在 19×19 的棋盤中，下子最多的顏色有子 15×5+4×4，共可產生對角線：

$15\cdot C_2^5+4\cdot C_2^4=174>171=C_2^{19}\Rightarrow$ 必可分勝負。

在 18×18 的棋盤中，下子最多的顏色有子 9×5+9×4，共可產生對角線：

$9\cdot C_2^5+9\cdot C_2^4=144<153=C_2^{18}\Rightarrow$ 不一定可分勝負。

以上的驗證支持我們的猜測。

$k=2$ ，(3+2) ⇒1×3+2 $\Rightarrow(k-1)\cdot(k+1)+k=k^2+k-1$

$k=3$ ，(4+4+3) ⇒2×4+3 $\Rightarrow(k-1)\cdot(k+1)+k=k^2+k-1$

$k=4$ ，(5+5+5+4) ⇒3×5+4 $\Rightarrow(k-1)\cdot(k+1)+k=k^2+k-1$

設 $k>4$，在 $n\times n$ ($n=k^2+k-1$)的棋盤中，

可產生$(k^2-1)\cdot C_2^{k+1}+k\cdot C_2^k=\dfrac{k^4+2k^3-2k^2-k}{2}$ 條對角線，但 n 邊形($n=k^2+k-1$)有

$C_2^n=C_2^{k^2+k-1}=\dfrac{k^4+2k^3-2k^2-3k+2}{2}$條對角線。

顯然，$(k^2-1)\cdot C_2^{k+1}+k\cdot C_2^k>C_2^n=C_2^{k^2+k-1}$故必可分出勝負。

另外，若 $n=k^2+k-2$

可產生$(k^2-k-3)\cdot C_2^{k+1}+(2k+1)\cdot C_2^k=\dfrac{k^4+2k^3-5k^2-4k}{2}$ 條對角線，但 n 邊形

($n=k^2+k-2$)有$C_2^n=C_2^{k^2+k-2}=\dfrac{k^4+2k^3-4k^2-5k+6}{2}$條對角線。

顯然，$(k^2-k-3)\cdot C_2^{k+1}+(2k+1)\cdot C_2^k<C_2^n=C_2^{k^2+k-2}$故不一定可分出勝負。

我們用『柯西不等式』的方法證明$n=k^2+k-2$是滿足下列三式的最小整數，

$\sum_{i=1}^{n}C_2^{x_i}\le C_2^n$ ……………………..……………….①

$(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n}1^2)\ge(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$ …………………..….②

$\left[\dfrac{n\times n}{k}\right]+1\le\sum_{i=1}^{n}x_i$ ……………………………….③ ([ ]為高斯符號)

證明：

在參考資料〔1〕中已經證明了$n=k^2+k-1$不滿足上列三式。

我們在這裡要證明的是$n=k^2+k-2$滿足上列 3 個式子。

由①、②得$\dfrac{1}{n}\cdot(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)\le n\cdot(n-1)$

令$\sum_{i=1}^{n}x_i=r$ ，則上式為$\dfrac{1}{n}\cdot r^2-r\le n\cdot(n-1)\Rightarrow.r^2-n\cdot r\le n^2\cdot(n-1)$ …….④

又$n=k^2+k-2$ ，因此，$\dfrac{n\times n}{k}=\dfrac{(k^2+k-2)^2}{k}=\dfrac{(k^2+k)^2-4\cdot(k^2+k)+4}{k}$

那麼，$\left[\dfrac{n\times n}{k}\right]=k^3+2k^2+k-4(k+1)=k^3+2k^2-3k-4$

由③知：$\left[\dfrac{n\times n}{k}\right]+1=k^3+2k^2-3k-3\le r$

只要取 $r=k^3+2k^2-3k-3$ 代入④，經計算得：

左式：$r^2-n\cdot r=k^6+3k^5-5k^4+7k^2+15k+3$

右式：$n^2\cdot(n-1)=k^6+3k^5-4k^4-13k^3+9k^2+16k-12$

$n^2\cdot(n-1)-(r^2-n\cdot r)=k^4+2k^3+k^2+k-15\ge k^4-15\ge 0$

三、二人對奕的必勝法則：

在電影《美麗境界》中男主角與其同窗好友在公園下圍棋，男主角最後輸了，但是他卻無法接受這個結果，原因是他先下的爲何會輸？以下我們先說明在兩人對奕的遊戲中，遊戲在有限步驟內完成且有勝負之分，那必定存在著『必勝法則』，我們只是主張存在，但像是象棋、圍棋……等太過複雜的遊戲必勝法則有可能也相當複雜故先下棋者不可能步步都下得精準，而這也是棋藝吸引人的地方。

(引理)：**兩人對奕的遊戲中，遊戲在有限步驟內完成且有勝負之分，那必定存在著『必勝法則』**。

證明：(**數學歸納法**)

我們對於『步數』做數學歸納法：若遊戲進行一步就結束，則先下者爲贏或輸。因此，有『必勝法則』。

若遊戲進行兩步就結束，則進行完第一步後，再下一步則必分勝負。因此，下第一步者必當盡量使其達到必勝的狀況，除非所有情況都導致先下者敗，所以必有『必勝法則』。

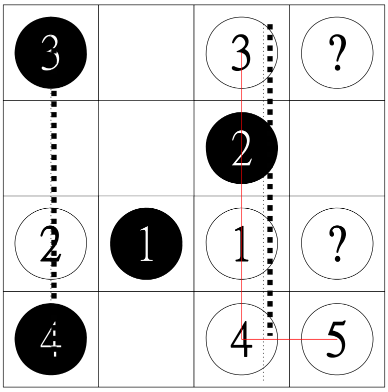
假設遊戲進行 n 步就結束，由前 n=1、2 時，存在著『必勝法則』。

設 $n=k\geqq 2$ 時存在著『必勝法則』，則 $n=k+1$ 時，當先下者下了第一步時，此時，遊戲變成 k 步結束，由前假設必有『必勝法則』，可能是先下者也可能是後下者。若先下者下的第一步可使其達到 $n=k$ 的必勝狀態，則先下者便有『必勝法則』；反之，若先下者在下第一步後無法達到 $n=k$ 的必勝狀態，則後下者有『必勝法則』。則 $n=k+1$ 時確實存在著必勝法則。故由數學歸納法得證。

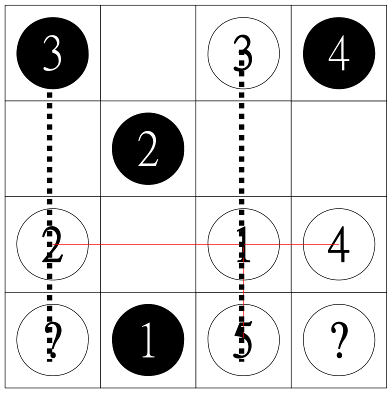
前面已經證明若甲、乙兩人在 5×5 的棋盤中以黑、白棋輪流下子對奕必可分出勝負，在這裡我們將要說明在先下子者不下錯棋的情況之下，只需要在 4×4 的棋盤中就能以『必勝法則』取得勝利。

必勝法則：

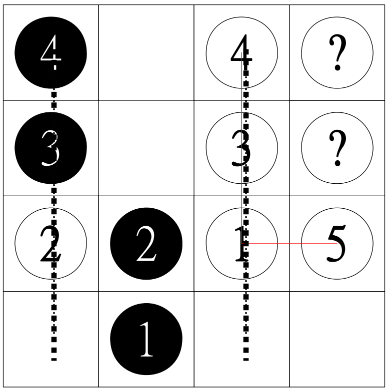
由前的實驗結果，我們歸納出一個必勝法則：『先下者保持攻勢，導致三點共線。』這個策略會造成 T 形、L 形、N 形(T、L 合型)雙死棋的局面(如圖對方無法挽救的情況)。另外，我們稱圖中的虛線爲軌道。



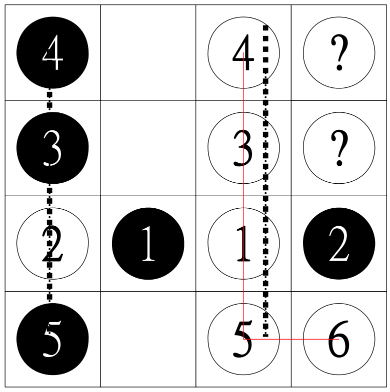
1 2



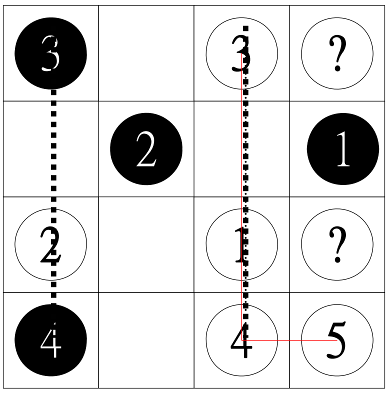
1 2



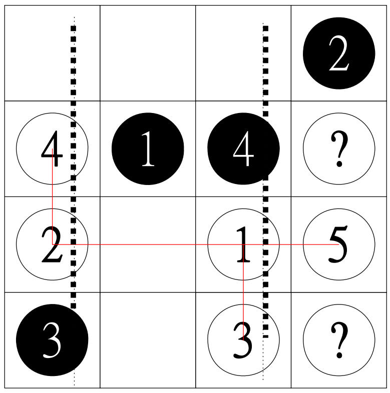
1 2



1 2



1 2

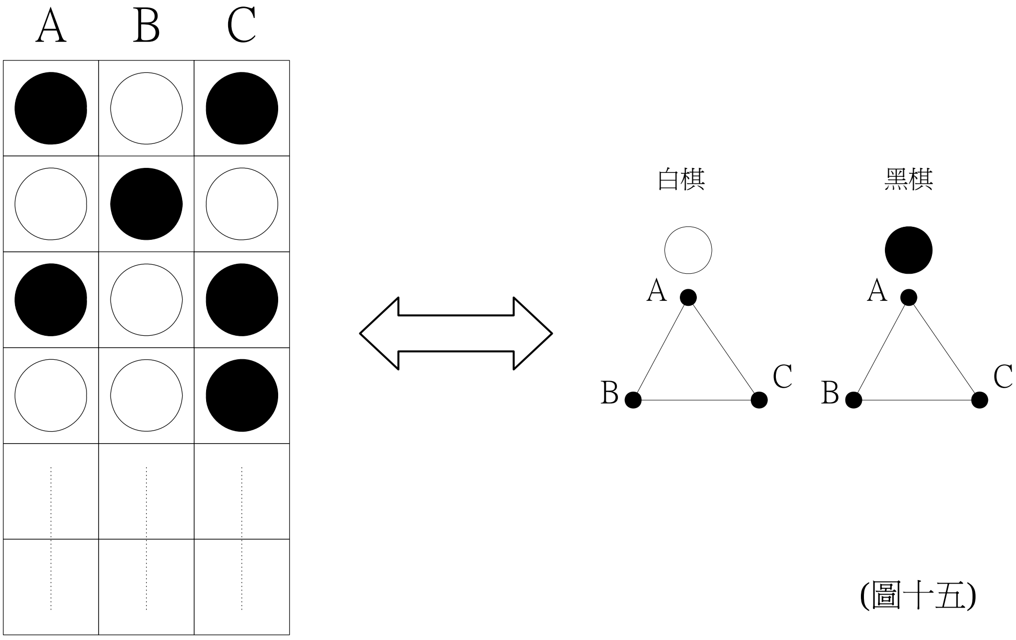


1 2

(圖十四)

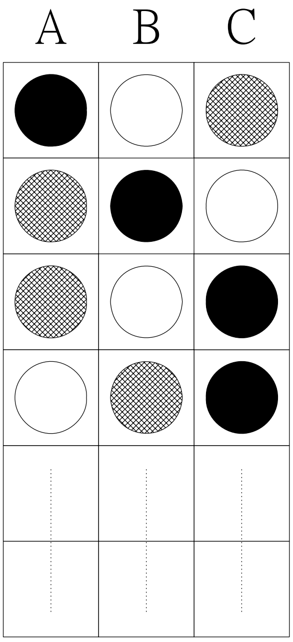
四、在 $n\times m$ ($n< m$)的棋盤中，k 人對奕，最大的和局階數。

(一)、在 $3\times m$ 的棋盤中，若兩人對奕(k =2)，至少爲 7 才一定能分出勝負。我們用『數圖轉換法』很快地知道右邊兩個三角形共 6 條對角線而左邊方格中每列有 3 個，最少產生一個同列同色，即$C_2^2=1$，故至少需要 7 列以上才會使得在右邊三角形的對角線產生重疊的情況。



(圖十五)

在 $3 \times m$ 的棋盤中，若三人對奕($k=3$)是可能無法分出勝負的。



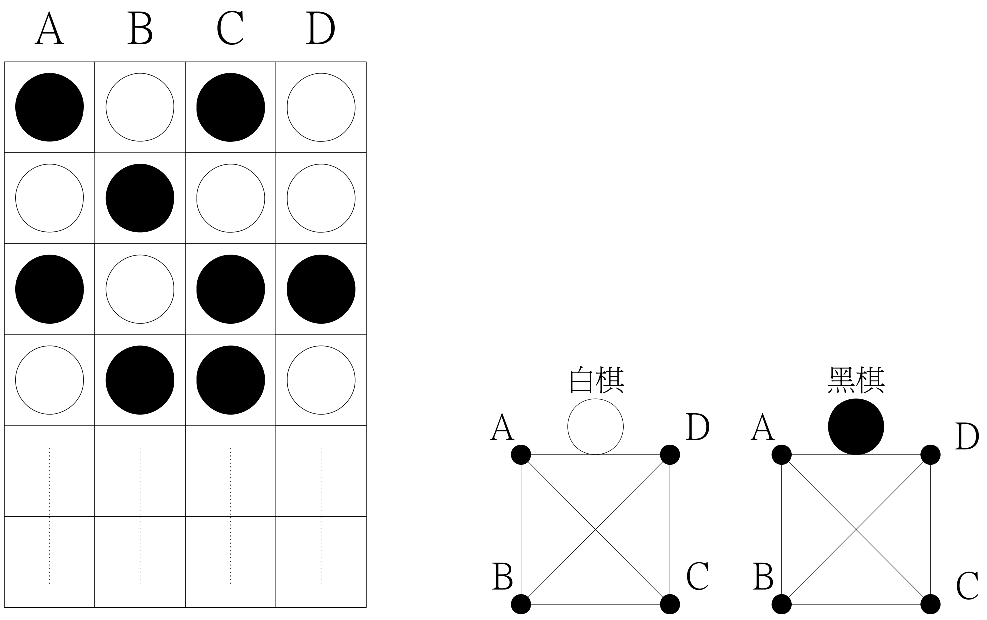
(圖十六)

故我們知道，在 $n\times m$ ($n<m$)的矩形棋盤中，k 人對奕，若要保證能分出勝負，必須滿足條件： $k<n$

我們再舉一個例子：

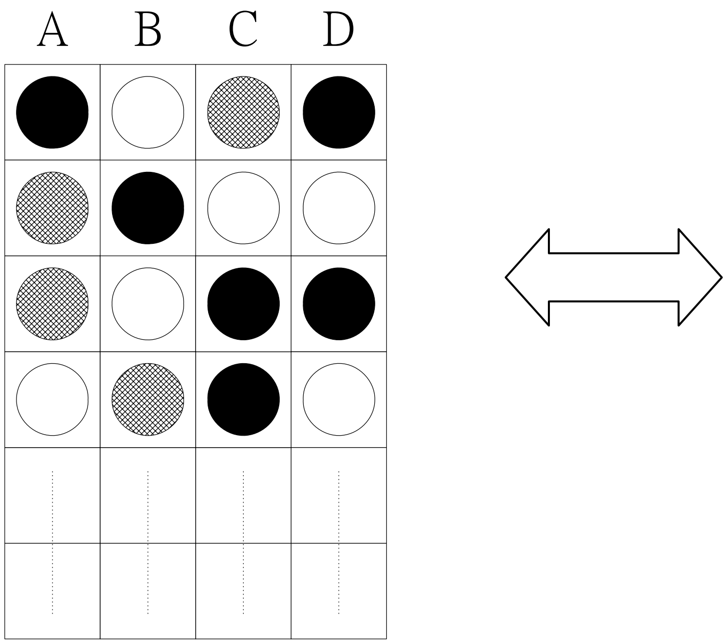
(二)、在 $4\times m$ 的棋盤中，情況又是如何？

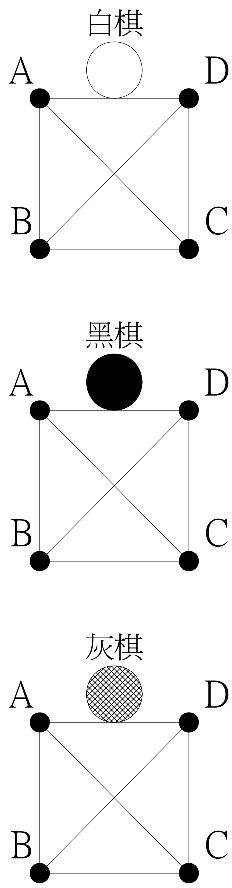
若兩人對奕($k=2$)，則 $m\geq 7$；若三人對奕($k=3$)，則 $m\geq 19$



(圖十七)

因爲黑、白棋同列同色列最少的情況分別爲$C_2^2=1$及$C_2^2=1$，而四邊形共有$C_2^4=6$條對角線。因此，必須 7 列才能保證必可『分勝負』。



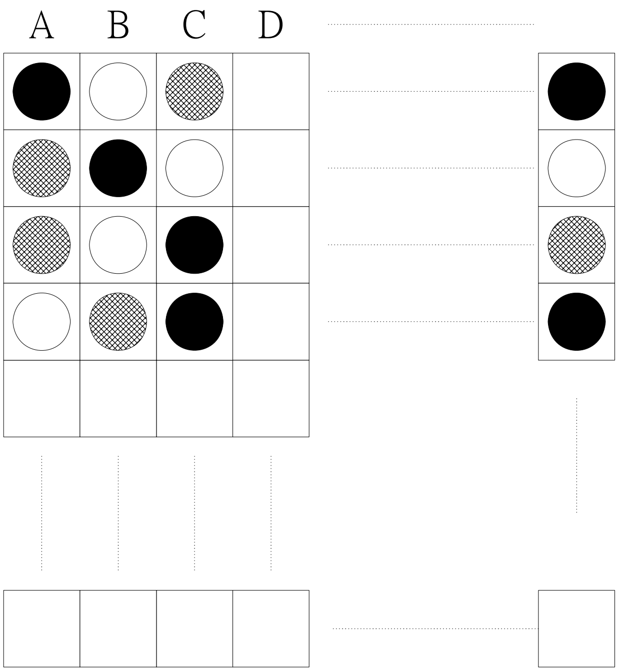


(圖十八)

同樣地，在 4×m 的棋盤中最少會有一組同列同色列$C_2^2=1$，而四邊形共有$C_2^4=6$條對角線，三種顏色共產生 3×6＝18 條。因此，必須 19 列才能保證必可『分勝負』。

(三)、接下來我們討論在 $n\times m$ ($n<m$)的棋盤中，最多可以供 $n-1$ 個人遊戲。此時，

$$m\geq\frac{1}{2}n\cdot(n-1)^2+1$$



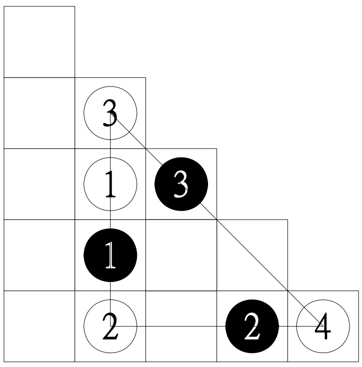
(圖十九)

若有 $n-1$ 個人遊戲，每一列最少產生一組兩個棋同色，此時，在右邊都對照的 $n-1$ 個凸 n 邊形中便會產生一條對角線，而右邊總共有 $C_2^n\cdot(n-1)$ 條對角線，故至少要 $C_2^n\cdot(n-1)+1=\frac{1}{2}n\cdot(n-1)^2+1$ 列才能使得遊戲能分出勝負。

五、在公差為 1 的等差 n 階三角形的棋盤中，二人對奕，最大的和局階數為 4，即 5 階三角形棋盤必可分出勝負。

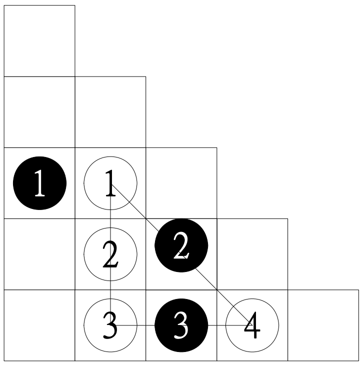
以下是我們實驗的紀錄。

1



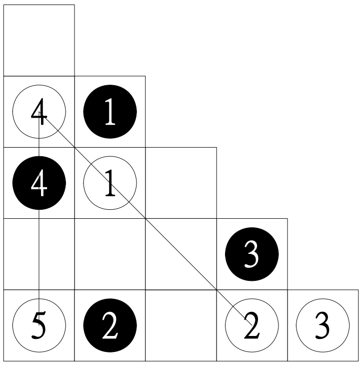
白: 先(勝)
黑: 後

2



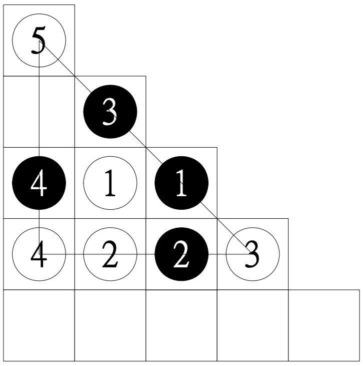
白: 先(勝)
黑: 後

3



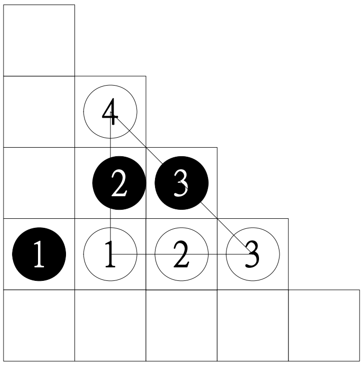
白: 先(勝)
黑: 後

4



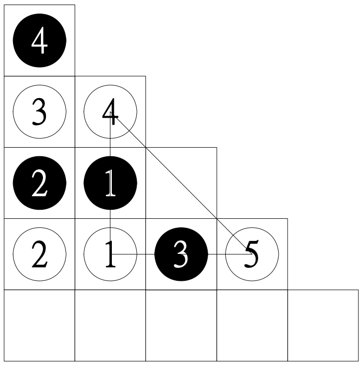
白: 先(勝)
黑: 後

5



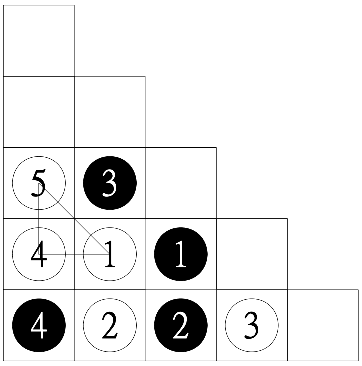
白: 先(勝)
黑: 後

6



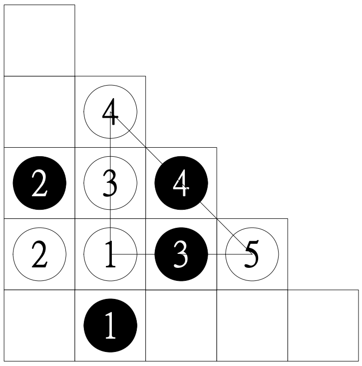
白: 先(勝)
黑: 後

7



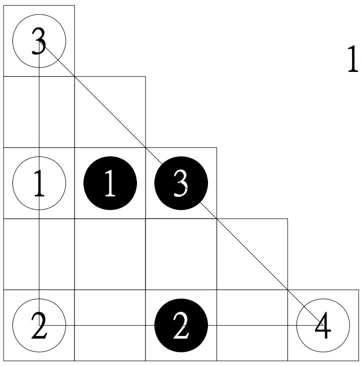
白: 先(勝)
黑: 後

8



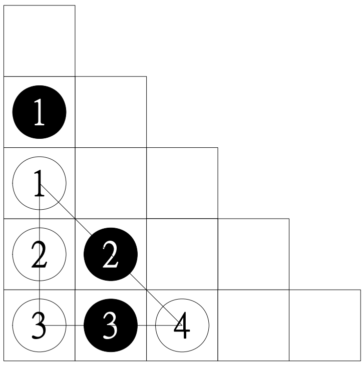
白: 先(勝)
黑: 後

9



白: 先(勝)
黑: 後

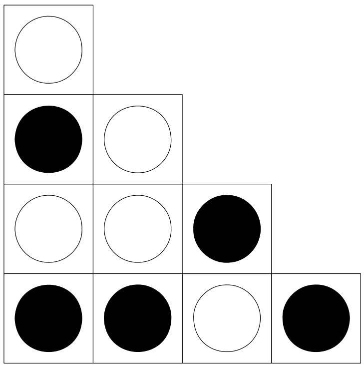
10



白: 先(勝)
黑: 後

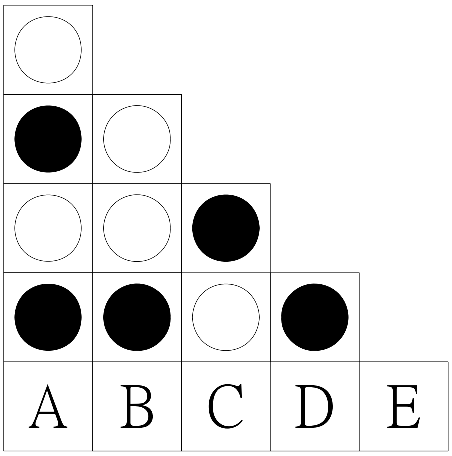
(圖二十)

證法 1：
由所有 4 階和局來討論最底下一排不能再加 5 個棋子。
情況 1：



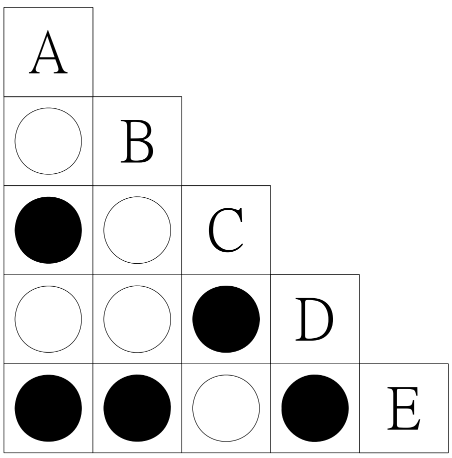
(圖二十一)

可以在三邊再加一列 5 顆棋如下圖，



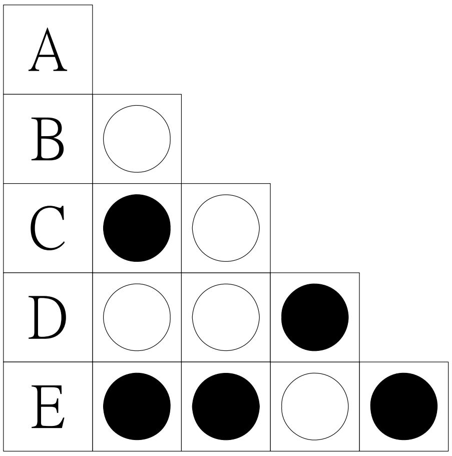
說明：
1、若 A 爲黑則 B、D 爲白，白棋勝。
2、若 A 爲白則 C、E 爲黑，黑棋勝。

(圖二十二)



說明：
1、若 A 爲黑則 C、E 爲白，白棋勝。
2、若 A 爲白則 B、D 爲黑，而後 E 爲白。若 C 爲白則白棋勝；若 C 爲黑則黑棋勝。

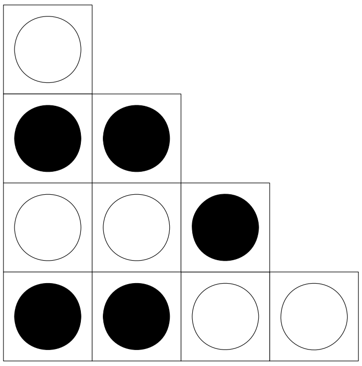
(圖二十三)



說明：
1、若 A 爲黑則 D、E 爲白，而後 B、C 均爲黑，結果黑棋勝。
2、若 A 爲白則 B、C 爲黑，黑棋勝。

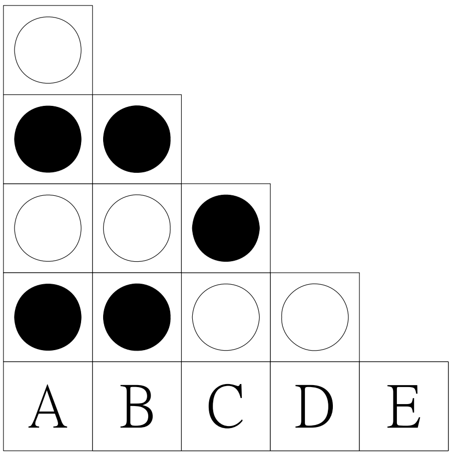
(圖二十四)

情況 2：



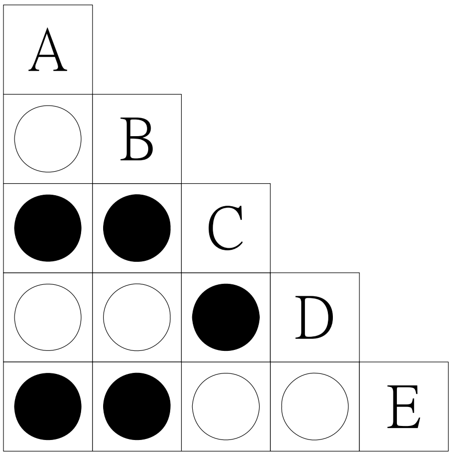
(圖二十五)

可以在三邊再加一列 5 顆棋如下圖，



說明：
1、若 A 爲黑則 B、D 爲白，白棋勝。
2、若 A 爲白則 C、E 爲黑，黑棋勝。

(圖二十六)

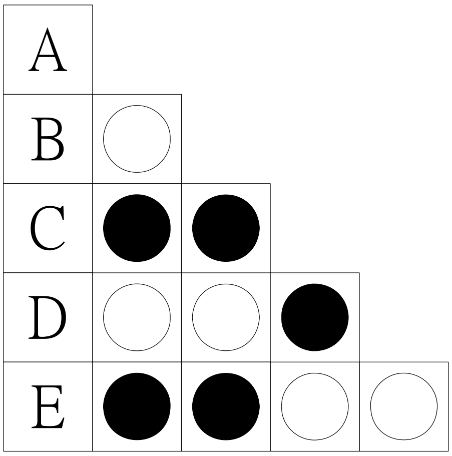


說明：

1、若 A 爲黑則 C、E 爲白，白棋勝。

2、若 A 爲白則 B、D 爲黑，而後 C、E 爲白棋勝。

(圖二十七)



說明：

1、若 A 爲黑則 C、D 爲白，白棋勝。

2、若 A 爲白則 B、E 爲黑，而後 C、D 爲白，白棋勝。

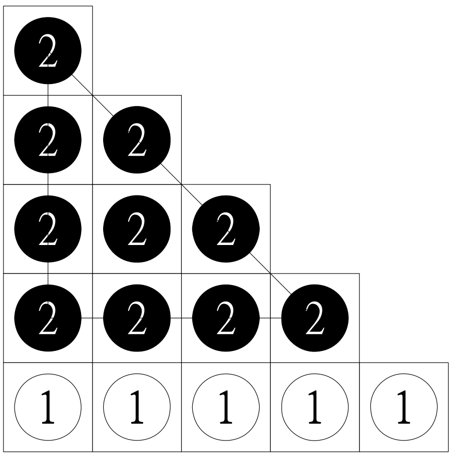
(圖二十八)

證法 2：

(Ramsey 數的想法)

在三角棋盤中，我們對於底邊的黑、白棋作討論：

(1)、底邊爲 5 白棋：

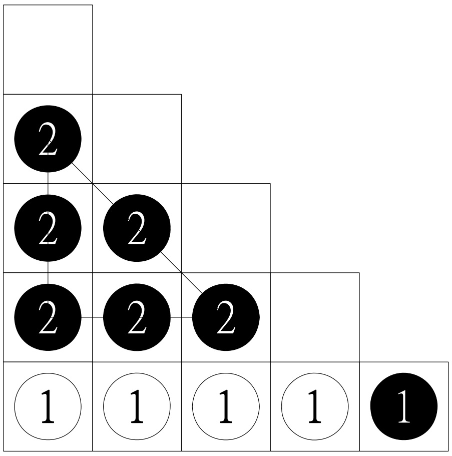


說明：

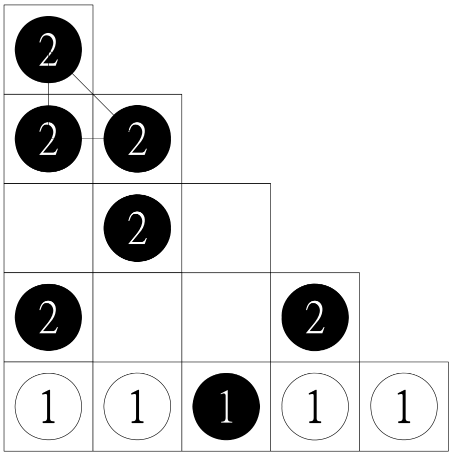
若底邊爲 5 白棋，則其餘空格須呈黑棋，如左圖，黑棋勝；否則白棋勝。

(圖二十九)

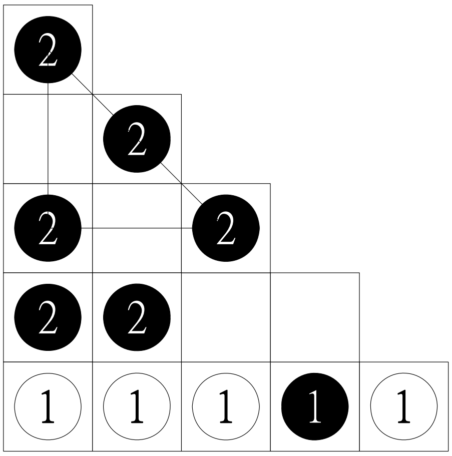
(2)、底邊爲 4 白棋、1 黑棋：



(圖三十)



(圖三十一)

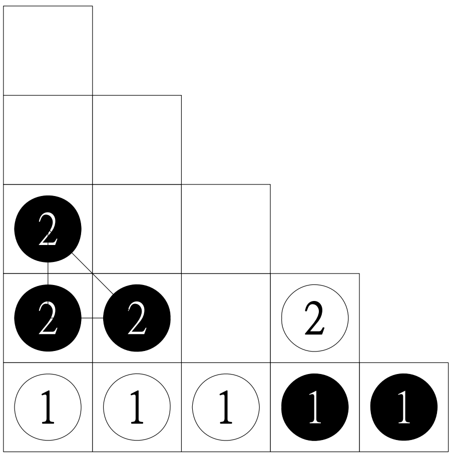


(圖三十二)

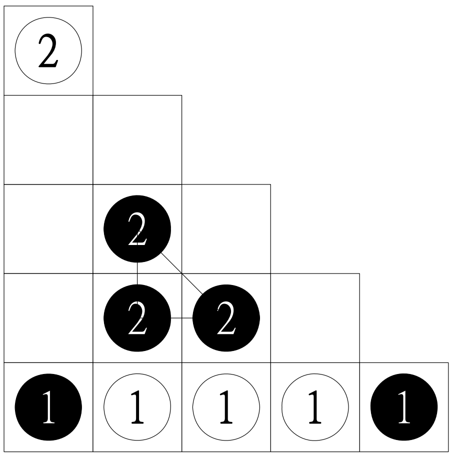
說明：

如圖三十、三十一、三十二，底邊爲 4 白、1 黑棋者，必可分出勝負。

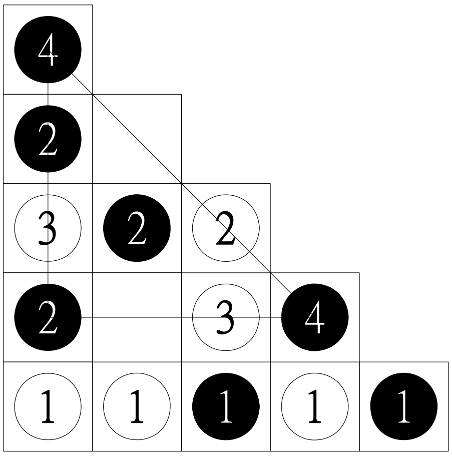
(3)、底邊爲 3 白棋、2 黑棋：



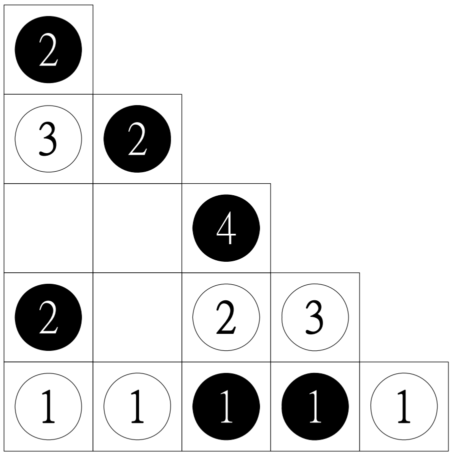
(圖三十三)



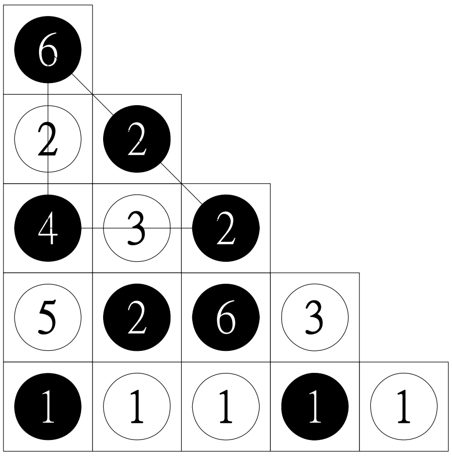
(圖三十四)



(圖三十五)



(圖三十六)



(圖三十七)

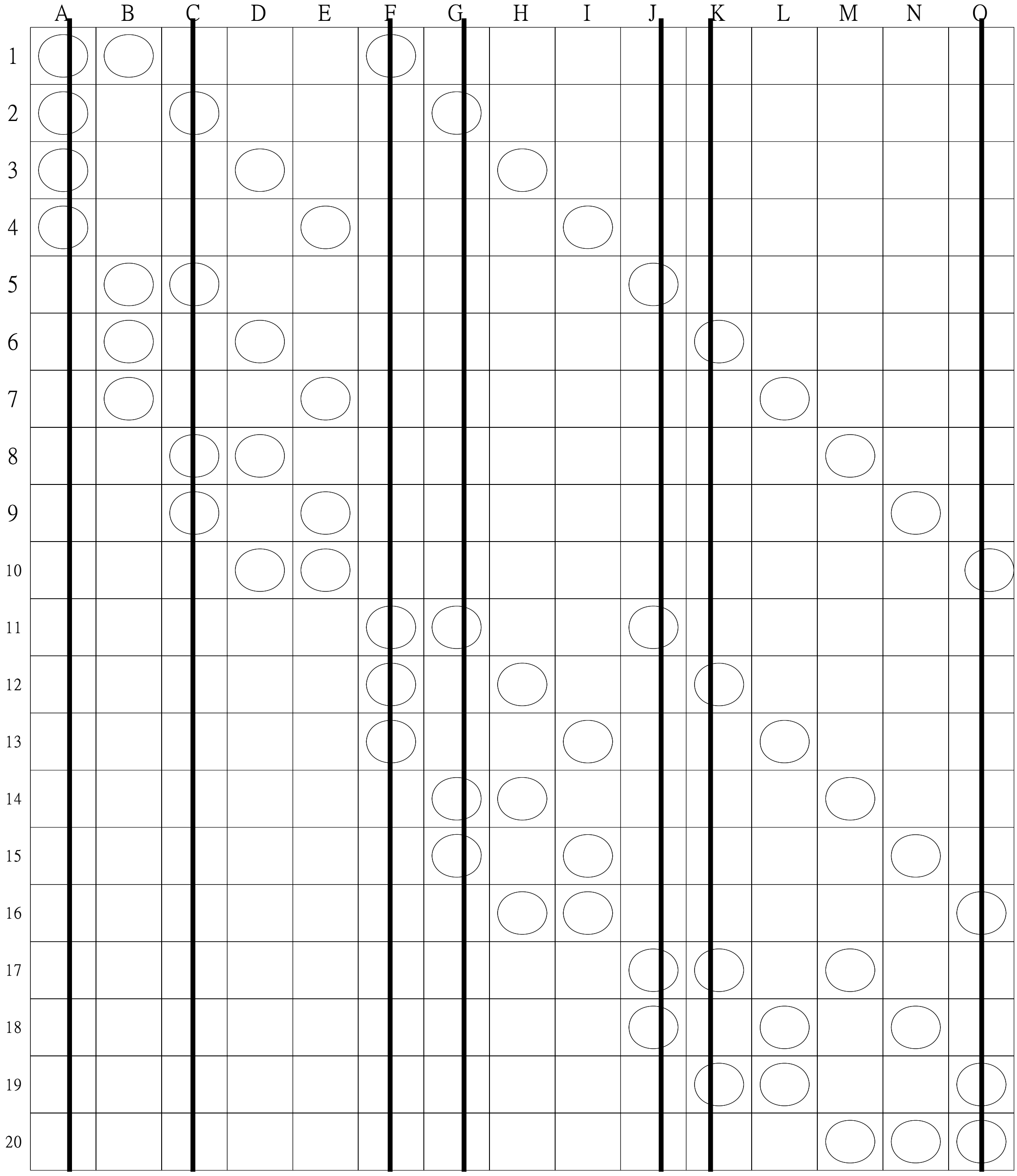
說明：

　同樣地，由上圖三十三到三十七可以知道底邊爲 3 白棋、2 黑棋的情況必可分勝負，而這個想法是來自於 Ramsey 數的靈感。

證法 3：

在 5 階公差爲 1 的等差三角棋盤中，有 1+2+3+4+5=15 個子、1+(1+2)+ (1+2+3)+(1+2+3+4)=20 個三角形，而每一個子都是不同的 4 個三角形的其中一員。因此我們將這一個問題轉化爲在 20*15 的格子中填入子與三角形的關係，那該表中最少可以刪掉幾行才能使的每一列的圈圈數少於 3 個？

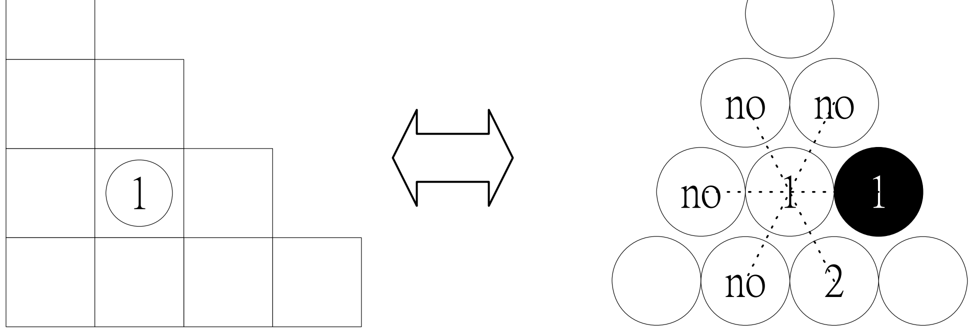
經過我們試驗的結果，發現：最少刪掉 7 行便可以達到每一列的圈圈數少於 3 個，轉換到三角棋盤上即最多可以下同色棋 7 顆而不產生與原三角形相似的情況。



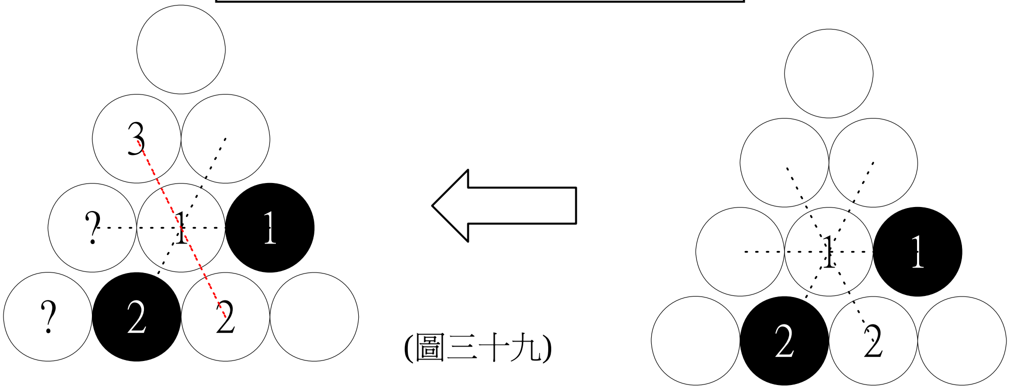
(圖三十八)

六、在公差為 1 的等差 *n* 階棋盤中，二人對奕，必勝法則。

保持攻勢，導致 3 點連線，必勝。故先下者有『必勝法則』。



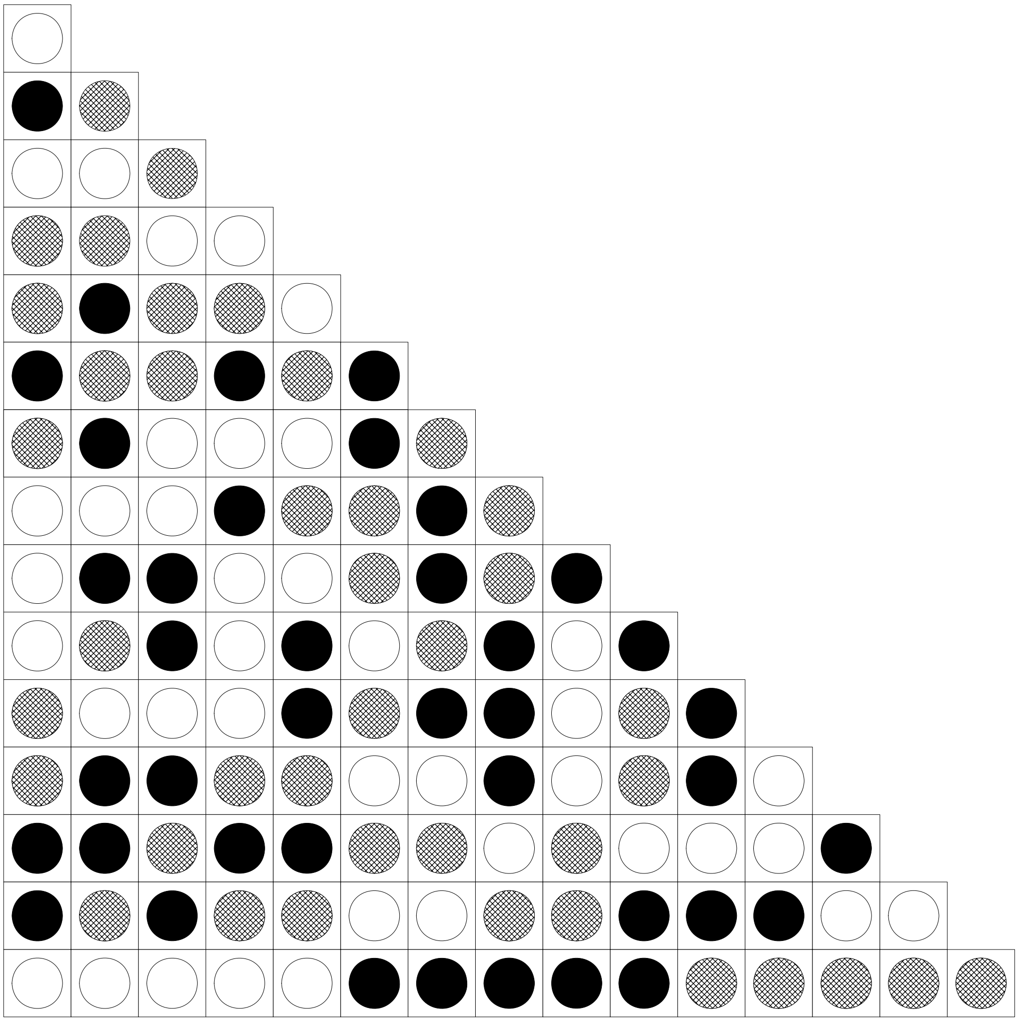
說明：
如圖，先下棋者第一步須下在白色 1 號位置，之後不論黑棋如何下白棋均可達到三點一線的情況，而這也就是必勝狀態。



(圖三十九)

七、在公差為 1 的等差 n 階棋盤中，3 人對奕，最大的和局階數。

我們猜測這個問題與 Ramsey 數有關（討論五），已知 $r_3(3)=17$ ，對應到我們的三角棋盤中的遊戲為 16 階必可分出勝負。故當 k=3 時，我們做出一個 15 階的和局(如圖四十)



(圖四十)

陸、研究結果：

一、兩人對奕，最大和局階數爲 *4×4*，換句話說，在 *5×5* 的棋盤中必可分勝負。

二、k 個人在 $n\times n$ 的棋盤中進行遊戲出現和局的最大階數爲 $n=k^2+k-2$。
換句話說，在 $n=k^2+k-1$ 的 $n\times n$ 棋盤中 k 人遊戲必可分出勝負。

三、雖然在 *5×5* 的棋盤中理論上才必能分出勝負，但是，在遊戲的過程中先下者有『必勝法則』：T、L 以及混合形必勝棋招。

四、在 $n\times m$ $(n<m)$的棋盤中，k 人對奕，必須滿足條件：$k<n$。而當 $k=n-1$時，

$m\geq\frac{1}{2}n\cdot(n-1)^2+1$才能保證必可分出勝負。

五、在公差爲 1 的等差 n 階三角棋盤中，二人對奕，最大的和局階數爲 4。換句話說，5 階的三角棋盤必可使 2 人進行遊戲分出勝負。

六、在公差爲 1 的等差 n 階三角棋盤中，二人對奕，存在必勝法則。

七、在公差爲 1 的等差 n 階棋盤中，3 人對奕，最大的和局階數爲 15。這個結果跟我們猜測三角棋盤上的遊戲跟著名的『Ramsey』數等價。

柒、討論：

一、如果我們將上(圖三十九)中的『直角三角形棋盤』轉爲圖中的另一種形狀會使遊戲者更

更容易上手。

二、我們猜測三角棋盤的模型跟特定『Ramsey』數等價。雖然沒有成功地給出證明，但是

在過程中我們也獨立發現在高二數學中的『巴斯卡公式』5 階三角棋盤中三角形與空格

的關係：

棋子空格個數：1+2+3+4+5=15

相似三角形個數：(1)+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)=20

n 階三角棋盤中三角形與空格的關係：

棋子空格個數：1+2+……+(n-1)+n=$\sum_{k=1}^{n}k=C_2^{n+1}$

相似三角形個數：(1)+(1+2)+……+(1+2+……+(n-1))=$\sum_{k=1}^{n-1}(1+2+...+k)$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}C_2^{k+1}=C_2^2+C_2^3+C_2^4+......+C_2^n=C_3^3+C_2^3+C_2^4+......+C_2^n=C_3^{n+1}$$

（巴斯卡公式：$C_k^n+C_{k+1}^n=C_{k+1}^{n+1}$）

三、對應到 Ramsey 數的模型：

將 5 階三角棋盤中三角形與空格對應到六邊形中關於對角線與凸六邊形中任意三頂點所

成的三角形個數的關係：

對角線共$C_2^6=15$條；三角形個數爲$C_3^6=20$個。

因此，我們有相當充足的『直覺』支持我們猜測這兩個模型的等價關係。

四、10 個男人 7 個傻、8 個呆、9 個壞還有 1 個人人愛，試問：這 10 這男人中至少有幾個又

呆又傻又壞？

我們另這 10 個男人爲宇集 U、7 個傻男人爲集合 A、8 個呆男人爲集合 B、9 個壞男人爲集合 C，這個問題轉換爲：已知$n(U)=10$、$n(A)=7$、$n(B)=8$、$n(C)=9$、$n(A'\cap B'\cap C')=1$，求$n(A\cap B\cap C)$的最小值爲何？

$$n(A'\cup B'\cup C')=n(A')+n(B')+n(C')-n(A'\cap B')-n(A'\cap C')-n(B'\cap C')+n(A'\cap B'\cap C')$$

$\Rightarrow n(A'\cup B'\cup C')\le 3+2+1-2\cdot n(A'\cap B'\cap C')$ (因爲$n(A'\cap B')\ge n(A'\cap B'\cap C')$)

$\Rightarrow n(A'\cup B'\cup C')\le 3+2+1-2\cdot 1$

$\Rightarrow n(U)-n(A\cap B\cap C)=n(A'\cup B'\cup C')\le 3+2+1-2\cdot 1=4$ (由狄莫更定律)

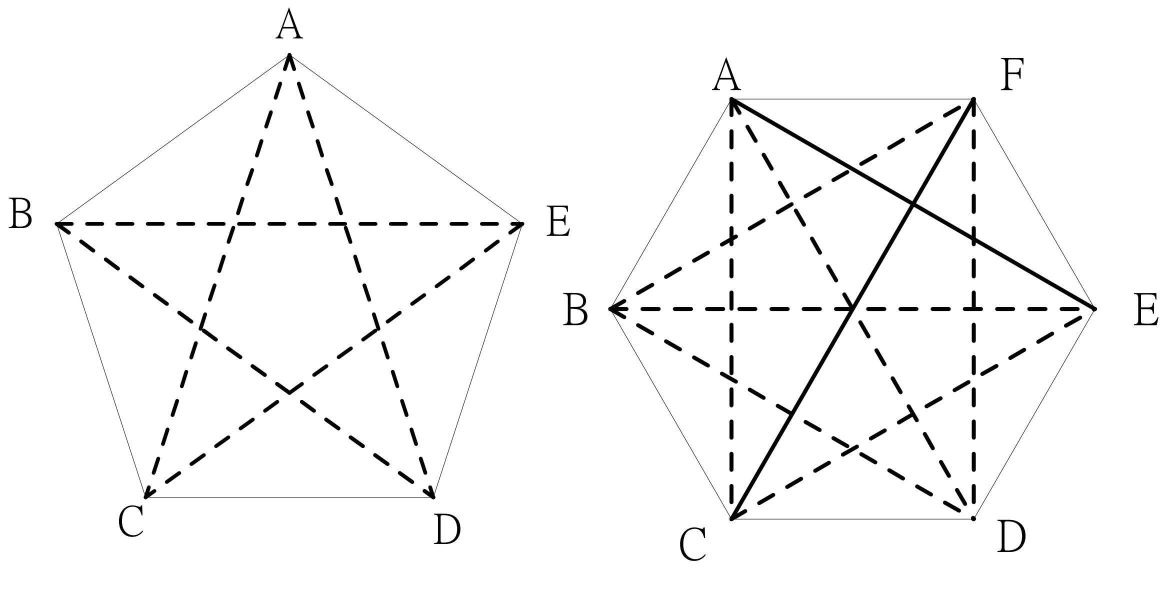
$\Rightarrow n(A\cap B\cap C)\ge 10-4=6$

故至少有 6 個男人又呆又傻又壞！

五、特殊 Ramsey 數的模型：

在六個人的團體中，他們任兩人如果不是互相認識，就是互相不認識。那麼，這六個人中必有三個人彼此互相認識或者互相不認識。要達到三個人彼此互相認識或者互相不認識這各條件至少需爲 6 個人的團體，換句話說，五個人的團體裡是無法達到上述的條件的。記爲：$r(3)=6$。

在下圖中，實線代表互相認識，虛線代表不認識。



捌、結論：

我們大膽地猜測三角形棋盤階數與特定 Ramsey 數($r_k(3)$)有密切的關係。於是從網

路上去搜尋關鍵字 Ramsey 數，發現了令人驚奇的結果，一則以喜、一則以憂。

喜的是大部分的 Ramsey 數至今尚未確定，現有的研究都只是做它的上、下界。在這裡我們需要的 $r_k(3)$ 尚無確定的公式表示法，最多只有 $3\cdot r_{k-1}(3)+r_{k-3}(3)-3\le r_k(3)\le k\cdot r_{k-1}(3)-k+2$，而且除了 k=3 以外，這個上下界範圍對於其他 k>3 的值在文獻中都被宣稱可以修正至更小的範圍。既然是尚未解決的問題，我們將來就有機會解決它。

憂的是早在民國 86 年數學傳播雜誌中就已經有人發表過一篇名為《棋盤染色問題與二部 Ramsey 數》的文章，在這裡我們必須一再強調的是，我們絕無抄襲的行為，該篇文章與我們作品的某一部份確有雷同之處，但是處理的手法和觀點顯然不同，我們的團隊一度非常沮喪，但是老師鼓勵我們說：「能夠與大學教授不約而同地做同一件事情，是相當榮幸的，可能那位教授在你這個年齡時還沒想過這個問題呢！」

玖、參考資料及其他：

〔1〕 李炯生(民 86)。棋盤染色問題與二部 Ramsey 數。數學傳播，83，63-72。

〔2〕 高中數學課本第一冊、第四冊。(各版本)

〔3〕 Wolfgang Slany (1999). Graph Ramsey games. DBAI Technical Report. Retrieved November 5, 1999, from http://xxx.lanl.gov/abs/cs.CC/9911004

〔4〕 Radziszowski, S. P. Small Ramsey Numbers. *Electronic J. Combinatorics* Dynamical Survey DS1, 1-42, Jul. 4, 2004, from http://www.combinatorics.org/Surveys/DS1