中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

最佳團隊合作獎

030420

利用循環節位數作質數判斷與因數分解

學校名稱：臺北縣私立及人高級中學

作者：	指導老師：
國二 朱麒安	楊松銘
國二 劉冠緯	曾世寬
國二 魏奕筑	
國二 程皓	

關鍵詞：　循環數、K 個 1

摘要:

壹. 本作品主旨在於利用將$\frac{1}{n}$化爲循環小數後所得之循環節位數來作質數的判斷,並將n分解成標準分解式。因質因數 2,3,5 易於判斷,故本文所提的自然數n排除 2,3,5 的倍數。

貳. 一.$\frac{1}{n}$化爲循環小數後所得之循環節位數以$<n>$表之,稱爲『n的循環數』。

二. $\underbrace{111\cdots111}_{K個}$(K 個 1)能被$n$整除之最小正整數 K 即爲$<n>$,本作品以 Excel 程式來求 K。

叁. 一. 若$\frac{n-1}{<n>}$不爲整數,則確定n不是質數。

二. 若$\frac{n-1}{<n>}$=1 或 2,則確定n爲質數。

三. 若$\frac{n-1}{<n>}$爲大於 2 的整數,本作品無法立即確定其是否爲質數。

肆. 若經第叁點處理,爲一.或三.之狀況,可先將$<n>$分解,再檢查小於或等於$\sqrt{n}$的質數中,所有循環數爲$<n>$的因數者是否整除n,即可判斷n爲質數或順利找到其質因數將之分解成標準分解式。

壹. 研究動機

老師曾在課堂上提到，所有有理數都可化為小數，包括有限小數、混循環小數及純循環小數，也介紹了分數與小數互化的方法。在去年暑假，我們就開始研究循環小數，意外發現，循環節位數與因數、倍數之間，蘊藏著美妙而密切的關係。藉著數據的啓發以及老師的引導，我們開始回想，在國一上冊的數學課本第二章中，有個重要的課題是將一個正整數分解成質因數的連乘積。在這過程中，質因數的找尋與質數的判斷是非常重要的。我們嘗試利用循環節位數來研究、解決這些問題。這一年來，困惑與挑戰很多，突破難關與新發現的喜悅也不少，由於老師辛苦熱心的指導，我們每一天都充滿著學習與成長的喜悅。

貳. 研究目的

一. 給定一個非 2,3,5 倍數的整數 n ,將 $\frac{1}{n}$ 化為循環小數後探討其循環節位數及其循環之內容。

二. 給定一個非 2,3,5 倍數的整數 n ,判定 n 是否為質數。若非質數,則設法分解成標準分解式。

參. 研究設備及器材

電腦

肆. 研究過程或方法

一 名詞及符號說明：

因質因數 2、3、5 易於判斷，故本作品所研究之正整數 n 排除 2、3、5 的倍數。本文將 $\frac{1}{n}$ 化為循環小數後，所得之循環節位數以<n>表之，稱為「n 的循環數」。

<例>： $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ ，∴ <7>=6

$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}$ ，∴ <13>=6

$\frac{1}{11} = 0.\overline{09}$ ，∴ <11>=2

$\frac{1}{37} = 0.\overline{027}$ ，∴ <37>=3

二 將小數化為分數的方法：

(一) 純循環小數：

<例>將$0.\overline{251}$化為分數

解: 令$x=0.\overline{251}=0.251251251......----(1)$

則$1000x=251.251251251......----(2)$

$(2)\text{-}(1)$得$999x=251\Rightarrow x=\dfrac{251}{999}$

(二) 混循環小數:

<例>將$0.45\overline{13}$化為分數

解:令$x=0.45\overline{13}=0.4513131313......----(1)$

則$100x=45.1313131313......---(2)$

$(2)\text{-}(1)$得$99x=45.13-0.45\Rightarrow x=\dfrac{45.13-0.45}{99}=\dfrac{4513-45}{9900}$

(三) 有限小數

<例>$0.2531=\dfrac{2531}{10000}$

(四) 結論:

1.有限小數的分母的質因數只有 2 或 5,反推亦然。

2.混循環小數的分母質因數兼有 2 或 5 及其他質因數,反推亦然。

3.純循環小數分母的質因數沒有 2 或 5,只有其他的質因數,反推亦然。

4.純循環小數化為分數，若循環節有 K 位,則分母填 K 個 9,分子為其循環節之內容。

5.故若n非2,3,5之倍數,則$\dfrac{1}{n}$化為循環小數,若其循環節有K位,循環節內容為

y,則$\dfrac{1}{n}=\dfrac{y}{99\cdots9}=\dfrac{9y_1}{9(\underbrace{111\cdots111}_{K個})}$(因$(n,9)=1$)$=\dfrac{y_1}{\underbrace{111\cdots111}_{K個}}$故$\underbrace{111\cdots111}_{K個}$(K 個 1)

必為n的倍數,K 即為n的循環數且由$ny_1=k個1\Rightarrow y_1=\dfrac{k個1}{n}$,故$\underbrace{111\cdots111}_{K個}$(K

個 1)除以 n 所得之商乘以 9 倍,即爲循環節的內容。

＜例＞：在 Excel 檔案中輸入 271，得＜271＞＝5，11111 除以 271 的商爲 41，將之乘以 9 得 369，故 $\frac{1}{271}=0.\overline{00369}$ 。

三 循環數的性質

爲了方便研究循環節的位數，老師在 Excel 設計一個程式，每次加一個 1 來尋找 k 個 1 能被 n 整除之最小正整數 K，此即爲 $<n>$。我們發現許多有趣的現象：

現象１：若 n 是 p 的倍數，則 n 的循環數爲 p 的循環數的倍數。

<例>＜7＞＝6，＜119＞＝48，119 爲 7 的倍數，則 48 爲 6 的倍數。

現象２：若 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_k$ 爲相異質數，則 $n=p_1 p_2 \cdots p_k$ 的循環數即爲 $<p_1>, <p_2>, \cdots\cdots, <p_k>$ 的最小公倍數。

<例 1>$<7>=6$, $<11>=2$, $<13>=6$, $<17>=16$, $<19>=18$, $<23>=22$, $<29>=28$ 我們輸入檢驗得 $<7\times11>=[6,2]=6$, $<7\times13>=[6,6]=6$, $<7\times17>=[6,16]=48$, $<11\times13>=[2,6]=6$, $<17\times19>=[16,18]=144$, $<13\times23>=[6,22]=66$, $<7\times11\times23>=[6,2,22]=66$, $<7\times19\times29>=[6,18,28]=252$

$<17\times23\times29>=[16,22,28]=1232$

現象 3：若ｎ的質因數有兩次以上的乘方，亦呈現美好之規律性。

<例>

$<11>=2$	$<7>=6$	$<11\times7^2>=6\times7$
$<11^2>=2\times11$	$<7^2>=6\times7$	$<11\times7^3>=6\times7^2$
$<11^3>=2\times11^2$	$<7^3>=6\times7^2$	$<11^2\times7^3>=6\times11\times7^2$
$<11^4>=2\times11^3$	$<7^4>=6\times7^3$	$<11^3\times7^3>=6\times11^2\times7^2$

$<7\times19^2\times17>=[<7>,<19>,<17>]\times19$

$<7^2\times19^2\times17>=[<7>,<19>,<17>]\times7\times19$

$<7^2\times19\times17^2>=[<7>,<19>,<17>]\times7\times17$

現象 4：若 p 爲質數，則<p>爲 p-1 的因數。

<例><29>=28,<37>=3,<41>=5,<23>=22,<61>=60,<67>=33,<79>=13, <83>=41,<97>=96,<101>=4,<103>=34

綜合以上現象，我們歸納循環數之性質，並說明如下：

(一)p 爲質數，若 $p \mid n$ 則 $<p> \mid <n>$

<例>若 $<n>=12 \Rightarrow$ 12 個 1 爲 n 的倍數 $\Rightarrow$ 12 個 1 是 p 的倍數,若<p>不整除 12,如<p>=5,則 p|11111 則 111111111111 與 111111111100 皆爲 p 的倍數 $\Rightarrow$ 兩式相減得 11 爲 p 的倍數與<p>=5 矛盾,故爲<p>必爲 12 的因數,其餘例子皆仿此例可證。

(二) 若$n = p_1 p_2$,其中 p_1, p_2 皆爲質數,則$<n>=[<p_1>,<p_2>]$

<說明>由(一)可知$<n>$爲$<p_1>,<p_2>$之公倍數。
但$[<p_1>,<p_2>]$個 1 既是 p_1倍數,又是 p_2倍數故爲
$[p_1, p_2] = p_1 p_2 = n$的倍數。所以$<n>$即爲$[<p_1>,<p_2>]$

<例>若$n = 7 \times 23$, $<7> = 6$,<23>=22∴$<n>$=[6,22]=66

(三)若$n = p_1 p_2 \cdots p_k$,其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 皆爲質數,則
$<n>=[<p_1>,<p_2>\cdots,<p_k>]$

<說明>$<n>$爲$<p_1>,<p_2>,\cdots,<p_k>$之公倍數
$\therefore <n>=[<p_1>,<p_2>\cdots,<p_n>]$的倍數,
但$[<p_1>,<p_2>\cdots,<p_k>]$個 1 是 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 的公倍數,故爲
$[p_1, p_2 \cdots, p_k] = p_1 p_2 \cdots p_k = n$的倍數。$\therefore <n>=[<p_1>,<p_2>\cdots,<p_n>]$

(四)若$n = P_1^{r_1} \times P_2^{r_2} \times P_3^{r_3} \times \cdots \times P_k^{r_k}$,則
$<n>=[<p_1>,<p_2>\cdots,<p_k>] \times P_1^{r_1-1} \times P_2^{r_2-1} \times P_3^{r_3-1} \times \cdots \times P_k^{r_k-1}$
(本推論由實驗數據推測,本作品未有完整論證)
由於試驗數據眾多,皆支持此一推測,故大膽猜測,其餘數據不一一列出。

四 利用循環數作質數判斷

在操作電腦輸入質數 p 找其循環數時,發現循環數皆爲 p-1 的因數,於是便輸入大量數據檢驗,結果更顯示其一致性,當時便想推敲其原因,但一直未有突破,後來老師終於在費馬小定理中,得到此一結果的理論支持,經老師詳加解說後,終於解開我們心中的疑惑。

[費馬小定理]:若 p 爲質數,且 p 不整除 a,則$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
故若 p 爲非 2,3,5 之質數,取$a = 10$,則$10^{p-1} - 1 = (p-1)$個 9 必爲 p 的倍數∴(p-1)個 1 必爲 p 的倍數,所以＜p>必爲 p-1 的因數,所以若$\frac{n-1}{<n>}$不是整數,則可確定n不是質數。

原本我們猜想,是否所有的合數的$\frac{n-1}{<n>}$值皆非整數,剛開始輸入許多數據,如$13 \times 17, 29 \times 11 \times 53, \cdots\cdots$等,皆支持此一推測,後來終於找到一些反例,如 11 個 1,⋯等,於是我們便轉而尋找是否在某些特殊情況下,可藉$\frac{n-1}{<n>}$的值來確定n爲質數,終於有些小成果:

（一）若$\frac{n-1}{<n>}$不是整數,則確定n不是質數。

（二）若 $\frac{n-1}{<n>}=1$ 或 2,則確定 n 爲質數。

<證明>

1. 首先證明 $n=p_1\times p_2$,其中 p_1,p_2 爲相異質數的狀況,若 $<p_1>=a_1,<p_2>=a_2$,則 $p_1=t_1a_1+1,\ p_2=t_2a_2+1$,其中 t_1,t_2 爲正整數, $\frac{n-1}{<n>}=\frac{t_1t_2a_1a_2+t_1a_1+t_2a_2}{[a_1,a_2]}=t_1t_2(a_1,a_2)+\frac{t_1a_1+t_2a_2}{[a_1,a_2]}$,若此數值爲整數且 t_1,t_2 不全爲 1,則此數必大於等於 3; 若此數值爲整數且 $t_1=t_2=1$,則因 p_1,p_2 皆爲奇數,故 a_1,a_2 皆爲偶數,所以 $(a_1,a_2)\geq 2$, $\therefore\frac{n-1}{<n>}\geq 3$ 得證。

2. 其次證明一般狀況， $n=p_1p_2\cdots p_k$,其中 p_i 爲相異質數, $1\leq i\leq k$,令 $<p_i>=a_i$,則 $p_i=t_ia_i+1, 1\leq i\leq k$,其中 $t_i(1\leq i\leq k)$ 皆爲正整數,若 $\frac{n-1}{<n>}$ 爲整數,則 $\frac{n-1}{<n>}=\frac{(t_1a_1+1)(t_2a_2+1)\cdots(t_ka_k+1)-1}{[a_1,a_2,\cdots a_n]}\geq t_1t_2\cdots t_k(a_1,a_2,\cdots,a_k)+1$,若 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 不全爲 1,則 $\frac{n-1}{<n>}\geq 3$,若 $t_1=t_2=\cdots=t_k=1$,則 $a_1,a_2,\cdots a_k$ 全爲偶數,故 $(a_1,a_2,\cdots a_k)\geq 2$,故 $\frac{n-1}{<n>}\geq 3$ 。

3. 由 1,2 知,若 n 非質數,且 $\frac{n-1}{<n>}$ 爲整數,則 $\frac{n-1}{<n>}\geq 3$ 必成立,所以,若 $\frac{n-1}{<n>}$=1 或 2,則 n 爲質數。

伍. 研究成果：

一. 本作品以設計 Excel 程式每次加一個 1,來求 $\underbrace{111\cdots111}_{K個}$(K 個 1)能被 n 整除之最小整數 K,並紀錄所求得之商,所以商×9,即得循環節之內容,例如將 n ＝13 輸入,得＜13>＝6,6 個 1 除以 13 的商爲 8547,將之乘以 9,得 76923 所以 $\frac{1}{13}=0.\overline{076923}$ 。

二. 若 $p_1,p_2,\cdots p_k$ 皆爲質數,則

（一）　$<P_1\times P_2\times P_3\times\cdots\times P_k>=〔<p_1>,<p_2>\cdots,<p_k>〕$

（二）（推測）$<P_1^{r_1}\times P_2^{r_2}\times P_3^{r_3}\times\cdots\times P_k^{r_k}>=〔<p_1>,<p_2>\cdots,<p_k>〕$

$$\times p_1^{r_1-1}\times p_2^{r_2-1}\times\cdots\times p_k^{r_k-1}$$ 。

三. （一）若 n 為質數,則 $\dfrac{n-1}{<n>}$ 必為整數,故若 $\dfrac{n-1}{<n>}$ 非整數,則確定 n 不是質數。

（二）若 $\dfrac{n-1}{<n>}=1$ 或 2,則確定 n 為質數。

（三）若 $\dfrac{n-1}{<n>}$ 為大於 2 的整數,本作品無法立即確定其為質數否。

四. 藉由參閱高中教材第一冊第一章（龍騰版）得知,若 n 非質數,則 n 必有小於或等於 $\sqrt{n}$ 的質因數,原本要確認 n 為質數,必須要檢查小於或等於 $\sqrt{n}$ 的質數都不能整除 n,但由本作品之結果,要檢驗 n 為質數,只需檢查小於或等於 $\sqrt{n}$ 內所有循環數整除 $<n>$ 的質數都不能整除 n,即可確定 n 為質數。

陸. 討論

一. 我們藉由嘗試因數分解 $\underbrace{111\cdots111}_{K個}$ (K 個 1)來尋找循環數為 K 的質數,發現一些有趣的現象。在以下例子中,我們將循環數以括弧標記在質數下方,(請運用”數學科展環數驗證”的 Excel 檔驗證)

例如 $\underset{(3)}{37}$ ←質數 / (3) ←循環數

<例> $111=3\times\underset{(3)}{37}$　　$1111=\underset{(2)}{11}\times\underset{(4)}{101}$　　$11111=\underset{(5)}{41}\times\underset{(5)}{271}$

6 個 1= $3\times\underset{(2)}{11}\times\underset{(3)}{37}\times\underset{(6)}{7}\times\underset{(6)}{13}$　　7 個 1= $\underset{(7)}{239}\times\underset{(7)}{4649}$

8 個 1= $\underset{(2)}{11}\times\underset{(4)}{101}\times\underset{(8)}{73}\times\underset{(8)}{137}$　　9 個 1= $3^2\times\underset{(3)}{37}\times\underset{(9)}{333667}$

10 個 1= $\underset{(2)}{11}\times\underset{(5)}{41}\times\underset{(5)}{271}\times\underset{(10)}{9091}$　　11 個 1= $\underset{(11)}{21649}\times\underset{(11)}{513239}$

12 個 1= $3\times\underset{(2)}{11}\times\underset{(3)}{37}\times\underset{(4)}{101}\times\underset{(6)}{7}\times\underset{(6)}{13}\times\underset{(12)}{9901}$

13 個 1= $\underset{(13)}{53}\times\underset{(13)}{79}\times\underset{(13)}{265371653}$

14 個 1= $\underset{(2)}{11}\times\underset{(7)}{239}\times\underset{(7)}{4649}\times\underset{(14)}{909091}$

15 個 1= $3\times\underset{(3)}{37}\times\underset{(5)}{41}\times\underset{(5)}{271}\times\underset{(15)}{31}\times\underset{(15)}{2906161}$

16 個 1=11 × 101 × 73 × 137 × 17 × 5882353

(2) (4) (8) (8) (16) (16)

18 個 1=9 × 11 × 37 × 7 × 13 × 333667 × 19 ×52579

(2) (3) (6) (6) (9) (18) (18)

20 個 1=11 × 101 × 41 × 271 × 9091 × 3541 × 27961

(2) (4) (5) (5) (10) (20) (20)

除了 K 爲 3 的倍數外, $\underbrace{111\cdots111}_{K個}$(K 個 1)即分解爲所有循環數爲 K 的因數者的質因數乘積。

二. 在一.的作法中,我們利用本作品所得結論,加速確定質數的速度,現引幾個例子說明之:

(一).9 個 1 明顯爲 9 及 37 的倍數,將其除以 9×37 得

9 個 1= 3^2 × 37 × 333667 , $\sqrt{333667}$ 約爲 577,但在循環數爲 3 或 9 的質數中,找不到小於或等於 577 的質數,故可立刻判斷 333667 爲質數。(因若它非質數,必有一個小於或等於 577 且循環數爲<333667>=9 的因數的質因數,但由本作品所附 30000 內的循環數表,顯示它是不存在的) 。

在找 9 個 1 的質因數過程中,若我們的推測理論

$$<P_1^{r_1}\times P_2^{r_2}\times P_3^{r_3}\times\cdots\times P_k^{r_k}>=[<p_1>,<p_2>\cdots,<p_k>]\times p_1^{r_1-1}\times p_2^{r_2-1}\times\cdots\times p_k^{r_k-1}$$

是正確的,則質因數 37 不必重複檢驗,因若 37^2 爲 9 個 1 因數,則 9 個 1 的循環數必爲 3×37 的倍數,這是矛盾的。

(二).在分解 13 個 1 的過程中,找到質因數 53,79,

13 個 1=53 × 79 × 265371653 ,由於 30000 內的質數,除了 53,79 外,已無循環數爲 13 者,且 13 個 1 不可能有 53^2,79^2 之因數,故確定 265371653 爲質數。

三. 我們嘗試利用循環數來研究兩數的最大公因數與最小公倍數的問題。請參考<<求最大公因數和最小公倍數>>。

<法 1>要算[p,q]及(p,q),在循環數表中找兩質數 a、b 使<a>=p,<b>=q,則程式中<ab>即爲[p,q],而欄位 $\frac{<a><b>}{<ab>}$ 即顯示(p,q)。

<例 1>求[316,708]及(316,708)

在循環數表中找到<709>=708,<5689>=316,取 a=5689,b=709,輸入即讀得[316,708]=55932,(316,708)=4。

<例 2>求[1788,4596]及(1788,4596)

在循環數表中找到<1789>=1788,<14869>=4596,取 a=1789,b=14869,輸入即讀得[1788,4596]=26600641,(1788,4596)=12。

循環數表越完全,本方法才越能顯示其效用。

<法 2><例 1>要算 d=(613,5517)

在程式中輸入 a=613,b=5517，欄位 $\dfrac{<ab>}{[<a>,<b>]}$ 即爲 d，因<a>=51,<b>=153，

∴[<a>,<b>]=153.∴ $\dfrac{93789}{153}$ =613，即爲(613,5517)。

<例 2>要算(1771,3353)

輸入 a=1771,b=3353，得<a>=66,<b>=1434,<ab>=110418。所以，欄位

$\dfrac{<ab>}{[<a><b>]}=\dfrac{110418}{15774}$ =7 即爲(1771,3353)。

<說明>：以 $P_o^{r_0}$ 、$Q_0^{t_0}$ 爲（a,b）爲例來說明：

設 a,b 的標準分解式分別爲

a= $P_0^{r_0}\, Q_0^{t_0}\, P_1^{r_1}\, P_2^{r_2} \cdots\cdots P_k^{r_k}$ ，則<a>=$[<P_0>,<Q_0>,<P_1>\cdots<P_k>]P_0^{r_0-1}\, Q_0^{t_0-1}\, P_1^{r-1}\cdots P_k^{r_k-1}$

b=$P_0^{r_0+l_1}\, Q_0^{t_0+l_2}\, Q_1^{t_1}\, Q_2^{t_2}\cdots\cdots Q_m^{t_m}$ ，則

<b>=$[<P_0>,<Q_0>, <Q_1>\cdots<Q_m>]\, P_0^{r_0-1+l_1}\; Q_0^{t_0-1+l_2}\quad Q_1^{t_1-1}\cdots Q_m^{t_m-1}$

其中 $l_1 \geqq 0$， $l_2 \geqq 0$

令〔$<P_0>,<Q_0>,<P_1>\cdots,<P_k>$〕$=dh$

〔$<P_0>,<Q_0>,<Q_1>\cdots<Q_m>$〕$=dk$　且(h,k)=1，

且令 $P_1^{r_1-1}\, P_2^{r_2-1}\cdots P_k^{r_k-1}=P$， $Q_1^{t_1-1}\, Q_2^{t_2-1}\cdots Q_m^{t_m-1}=Q$

則<ab>=〔$<P_0>,<Q_0>,<P_1>\cdots<P_k>,<Q_1>,\cdots<Q_m>$〕$P_0^{2r_0+l_1-1}\, Q_0^{2t_0+l_2-1}\, P\, Q$

$=dhk\times P_0^{2r_0+l\ -1}\times Q_0^{2t_o+l_2-1}\times P\times Q$

〔<a>,<b>〕$=dhk\times P_0^{r_0-1+l_1}\times Q_0^{t_0-1+l_2}\times P\times Q$

$\therefore \dfrac{<ab>}{[<a>,<b>]}=\dfrac{dhkP_0^{2r_o+l_1-1}Q_0^{2t_0+l_2-1}PQ}{dhkP_0^{r_o+l_1-1}Q_0^{t_0+l\ -1}PQ}=P_o^{r_0}\, Q_0^{t_0}$　　　　得證

四. 分解$\underbrace{111\cdots111}_{K個}$(K 個 1),是否必能找到循環數爲 K 質數?此問題本作品無法證明爲真,也無法找到反例。

其次,對任意整數 K,是否必有一循環數爲 K 的質數?

五. 使 $\dfrac{n-1}{<n>}$ 爲大於 2 之整數的合數 n ,是否有其規律性可篩選?

柒. 結論

一.藉由循環數的性質,我們可以快速得知 $\dfrac{1}{\underset{(6)}{13^2} \times \underset{(18)}{19} \times \underset{(9)}{333667}}$ 化為循環小數

後,循環節$[6,9,18] \times 13 = 18 \times 13 = 234$位 並可得知其循環數內容。

二.藉由 $\dfrac{n-1}{<n>}$ =1 或 2 可立刻確定 n 為質數。

三.若 $\dfrac{n-1}{<n>}$ 不是整數,可確定 n 非質數,並藉由找出小於或等於 $\sqrt{n}$ 且循環數為 $\langle n \rangle$的因數者來除 n ,可一一找出 n 的質因數,從而將 n 分解成標準分解式。

四.若 $\dfrac{n-1}{<n>}$ 為大於 2 的整數, 亦可藉同三.之方法找出 n 的質因數將之分解或確定 n 為質數。

五.循環數表建立得越完全,則功能越大,找質數越快,但質數有無限多個,所以我們的工作是永無止境,且希望是眾志成城的,希望大家一起幫忙,讓本作品更加完整充實。

捌.參考書目

1. Ivan Niven Herbert S.Zuckerman Hugh L.Montgomery. THE THEORY OF NUMBERS。

2.高中數學第一冊(龍騰版) 。

3.作者:波莎曼提爾著,葉偉文譯,**神奇數學 117**,天下文化出版社。