

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 數學科

040412

鬼斧神工－多邊形的分割

學校名稱：國立彰化高級中學

<p>作者：</p> <p>高二 楊璞安</p> <p>高二 周千貿</p> <p>高二 許博凱</p> <p>高二 陳穆緯</p>	<p>指導老師：</p> <p>王聖輝</p>
--	-------------------------

關鍵詞：對偶圖、點的階數、切割法

# 鬼斧神工——多邊形的分割

## 摘要

在平面上的凸多邊形內部加入有限個點，作三角化後所得到的新圖形，稱為「三角化圖形」。為探討三角化後各點的度數，我們考慮三角化圖形的對偶圖，藉由對偶圖的各項性質找出特殊的三角化圖形：「偶三角圖」、「奇三角圖」、「三角正則圖」…等存在的充要條件。另外，在空間中，針對一個三角面體進行四面體化所形成的結構，我們也做了類似的分析。

## 壹、研究動機

在數學導引輯⑨：「奇數與偶數」一書裡，證明了一個有趣的定理：將一個三角形經過「三角剖分」後形成的圖形，其三角形個數必為奇數。(附件一)

我們引用尤拉公式，進而得到在三角形內部加 $m$ 個點，剖分後所得的三角形個數為 $2m+1$ 。

三角剖分的定義：給定一個凸多邊形，在其內部加入數個點，並依下列規則加邊(線段)，使得此多邊形分割成若干個小三角形，並滿足以下條件：

- (1) 所連的線段不能相交，但是兩線段以某一給定點為端點是允許的。
- (2) 每個點只能作為小三角形的頂點，既不能作為某個小三角形內部的點也不能作為某個小三角形的非頂點的邊界點。

我們將「剖分」的定義稍加修改，加入第三項條件，並稱此為「三角化」：

- (3) 只能將凸多邊形的頂點和內部的點連接，或者內部的點互相連接，而不將多邊形上的頂點互相連接，如下圖所示：

這樣的定義可以使得我們的三角化圖形轉換為對偶圖後，可以用一種切割的變換創造出所有的對偶圖，不會遺漏，因此增加第三個條件。

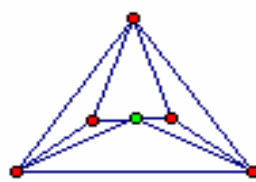


圖1-1 (X)

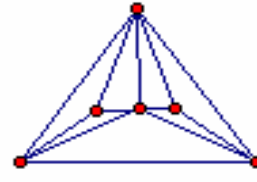


圖1-2 (O)

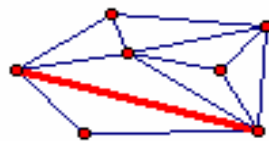


圖1-3 (X)

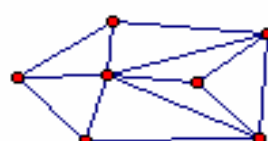


圖1-4 (O)

## 貳、研究目的

研究下列圖形或多面體存在的充要條件：

- 一、 $k$ 三角正則圖 $G_k$
- 二、奇三角圖 $G_{2,1}$
- 三、偶三角圖 $G_{2,0}$
- 四、 $G_{a,r}$
- 五、 $k$ 四面體正則圖 $S_k$
- 六、奇四面體圖 $S_{2,1}$
- 七、偶四面體圖 $S_{2,0}$

## 參、研究設備及器材

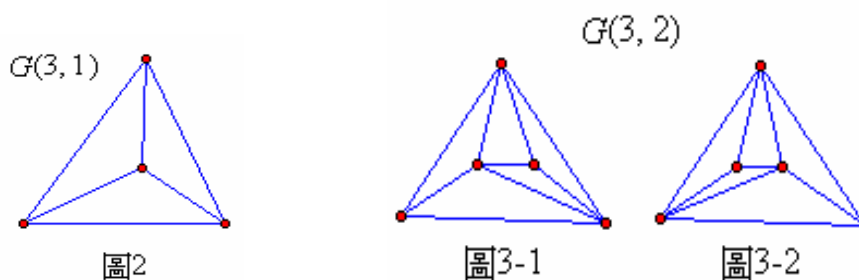
電腦、Microsoft Word、The Geometer's Sketchpad V4 Demo。

## 肆、研究過程及方法

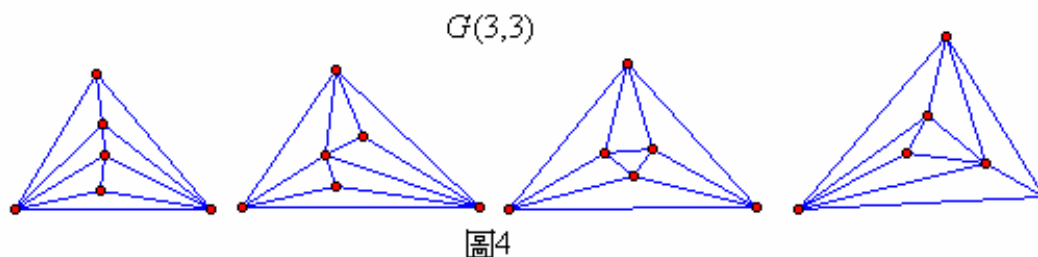
### 一、定義與符號

設凸 $n$ 多邊形的頂點為 $V_i (i=1,2,3,\dots, n)$ ，在內部加入 $m$ 個點 $P_j (j=1,2,3,\dots, m)$ ，經過三角化後的圖形稱為 $G(n, m)$ 圖形。

例如：圖 2 是一個  $G(3,1)$  圖形，圖 3-1 及圖 3-2 都是  $G(3, 2)$  圖形。



但  $G(3, 3)$  圖形有下列四種。



雖然  $G(3, 3)$  圖形有四種，卻都有七個三角形以及十二條線段，所以我有：

**定理 1**：對每一個  $G(n, m)$ ，都有  $n+2(m-1)$  個三角形及  $2n+3(m-1)$  條線段。

證明：考慮某個  $G(n, m)$ ，其三角形個數為  $S_{\Delta}$ ，線段個數為  $S_e$ 。

因為每個三角形都有三個邊，且除外邊以外每條線段都被數了兩次，所以內部有  $\frac{3S_{\Delta}-n}{2}$  個邊，又總邊數為內部的邊數再加上外邊邊數，所以我們有  $\frac{3S_{\Delta}-n}{2} + n = S_e \dots\dots\dots \textcircled{1}$

由於三角化圖形都是平面圖，於是符合尤拉公式：

$$2 = (n+m) + (S_{\Delta} + 1) - S_e = n + m + S_{\Delta} + 1 - \left(\frac{3S_{\Delta}-n}{2} + n\right)$$

將 $\textcircled{1}$ 式代入，得到  $S_{\Delta} = n + 2(m-1)$  ■ (註：當  $n=3$  時  $S_{\Delta} = 2m+1$  恆為奇數)，再代入 $\textcircled{1}$ 式得到

$$S_e = \frac{3S_{\Delta}-n}{2} + n = \frac{3[n+2(m-1)]-n}{2} + n = 2n + 3(m-1) \blacksquare$$

定理 1 不只驗證了”數學引導輯”中的定理，也提供了一個計算凸  $n$  邊形三角化後的三角形及邊的個數公式。

二、將  $G(n, m)$  圖形中每一個三角形分別用一個點來表示，若兩個三角形相鄰，則用一條邊來連接此兩點，所得的圖形稱之為  $G(n, m)$  的對偶圖(*dual graph*)，記作  $\overline{G(n, m)}$ 。

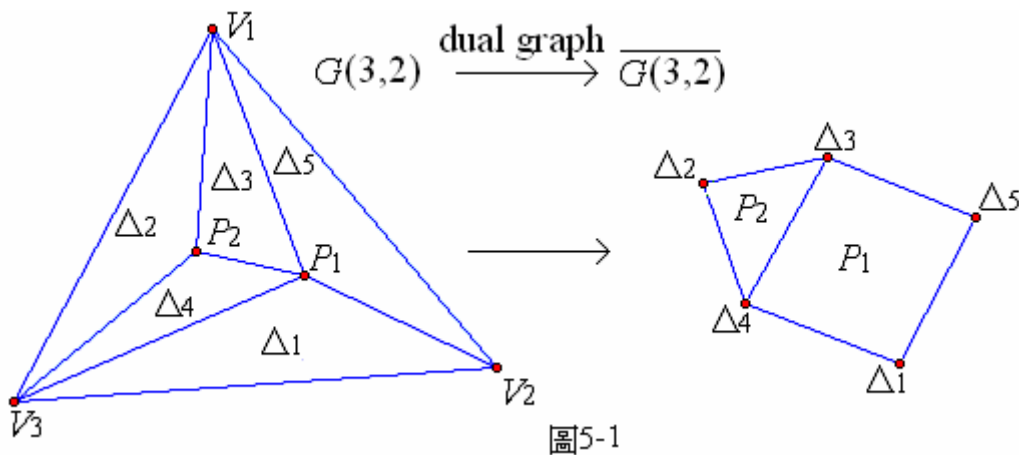


圖5-1

接在點  $V$  上的邊的個數就稱做點  $V$  的度數(*degree*)，記作  $\deg V$ 。

1. 每個加入  $G(n, m)$  的點  $P_i$  的度數可對應到組成  $\overline{G(n, m)}$  的小多邊形的邊數。

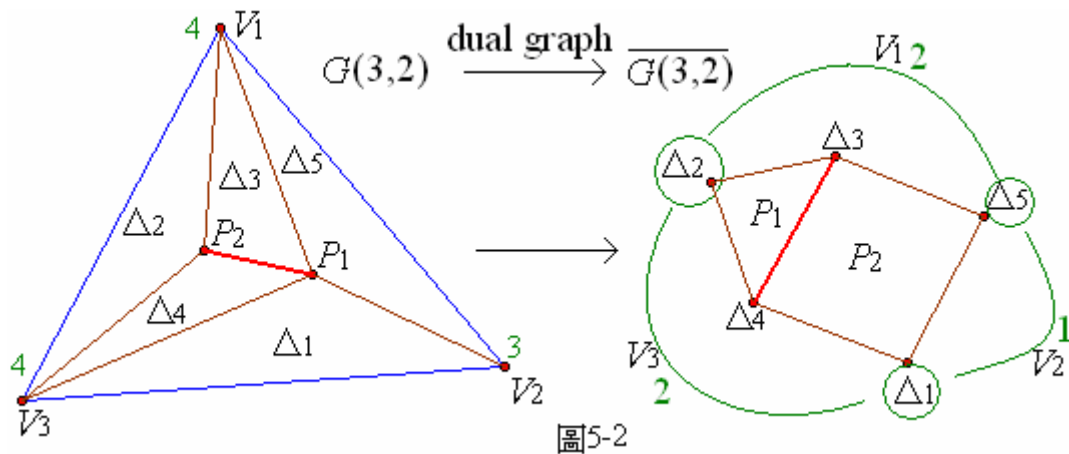
例：圖 5-1 中  $\deg P_1 = 4 \rightarrow$  四邊形  $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$ ； $\deg P_2 = 3 \rightarrow$  三邊形  $\Delta_3 \Delta_4 \Delta_5$

2.  $G(n, m)$ 中每個內部的三角形都可對應到 $\overline{G(n, m)}$ 中度數為 3 的點，而  $G(n, m)$ 中每個有一邊在外部的三角形可對應到 $\overline{G(n, m)}$ 中度數為 2 的點，因此 $\overline{G(n, m)}$ 中度數為 2 的點個數即為  $n$ 。

例：圖 5-1 之 $\overline{G(3, 2)}$ 中， $\deg \Delta_2 = \deg \Delta_1 = \deg \Delta_5 = 2$ ， $\deg \Delta_3 = \deg \Delta_4 = 3$

3.  $\overline{G(n, m)}$ 中 $\deg \Delta_i$ 只可能是 2 或 3。

三角形最多三個邊，且由於頂點不能互連以至於三角形不會有兩個邊與外部相鄰，故有  $1 < \deg \Delta_i < 4, \forall i \in N$ 。



4. 令  $d(\Delta_i, \Delta_j)$  表 $\overline{G(n, m)}$ 中由 $\Delta_i$ 沿著外邊到 $\Delta_j$ 經過的線段數。

例：圖 5-2 中  $d(\Delta_2, \Delta_5) = 2$ ， $d(\Delta_5, \Delta_4) = 1$ ， $d(\Delta_4, \Delta_2) = 2$  (綠色部分)

於是  $G(n, m)$ 中頂點  $V$  的度數對應到 $\overline{G(n, m)}$ 中  $d(\Delta_i, \Delta_j) + 2$

例：圖 5-2 中  $\deg V_1 = 4 = d(\Delta_2, \Delta_5) + 2$ ， $\deg V_2 = 4 = d(\Delta_5, \Delta_1) + 2$

$$\deg V_3 = 3 = d(\Delta_1, \Delta_2) + 2 \quad (\text{其中 } \deg \Delta_2 = \deg \Delta_1 = \deg \Delta_5 = 2)$$

5.  $G(n, m)$ 中頂點 $V_i$ 和內部點 $P_j$ 的連線對應到 $\overline{G(n, m)}$ 的外邊。

例：圖 5-2 中在  $G(3, 2) \rightarrow \overline{G(3, 2)}$  中 (褐色部份)

$$\overline{V_1 P_1} \rightarrow \overline{\Delta_2 \Delta_3}, \overline{V_1 P_2} \rightarrow \overline{\Delta_3 \Delta_5}, \overline{V_2 P_2} \rightarrow \overline{\Delta_5 \Delta_4}, \overline{V_2 P_1} \rightarrow \overline{\Delta_4 \Delta_1}, \overline{V_3 P_1} \rightarrow \overline{\Delta_1 \Delta_2}$$

6.  $G(n, m)$ 內部加入的點，互相連接的線段可對應到 $\overline{G(n, m)}$ 內部的線段：

例：圖 5-2 中  $G(3, 2)$ 的 $\overline{P_1 P_2} \rightarrow \overline{G(3, 2)}$ 的 $\overline{\Delta_3 \Delta_4}$  (紅色部分)

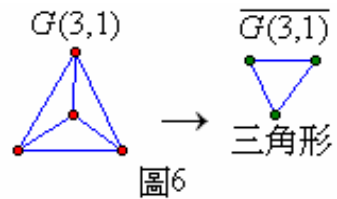
綜合 1~5.我們可得：

	$G(n, m)$	$\overline{G(n, m)}$
變換	三角形	點
性質	頂點互連的線段 (外邊)	沒有對應
	頂點和 $P$ 點連接的線段	外邊
	$P$ 點互連的線段	內部線段
	點	多邊形
	點的度數	$V$ 點(頂點)
	$P$ 點(加入的點)	多邊形的邊的個數

一、造出對偶圖的方法：

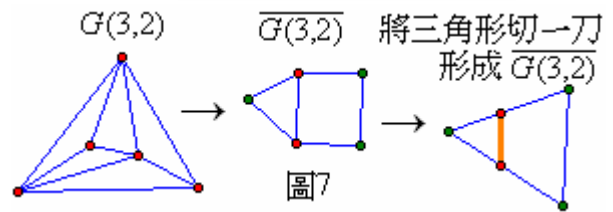
首先我們觀察對偶圖  $\overline{G(3,1)}$ 、 $\overline{G(3,2)}$  與  $\overline{G(3,3)}$  之間的關係：

$\overline{G(3,1)}$  剛好是一個三角形，如圖 6：

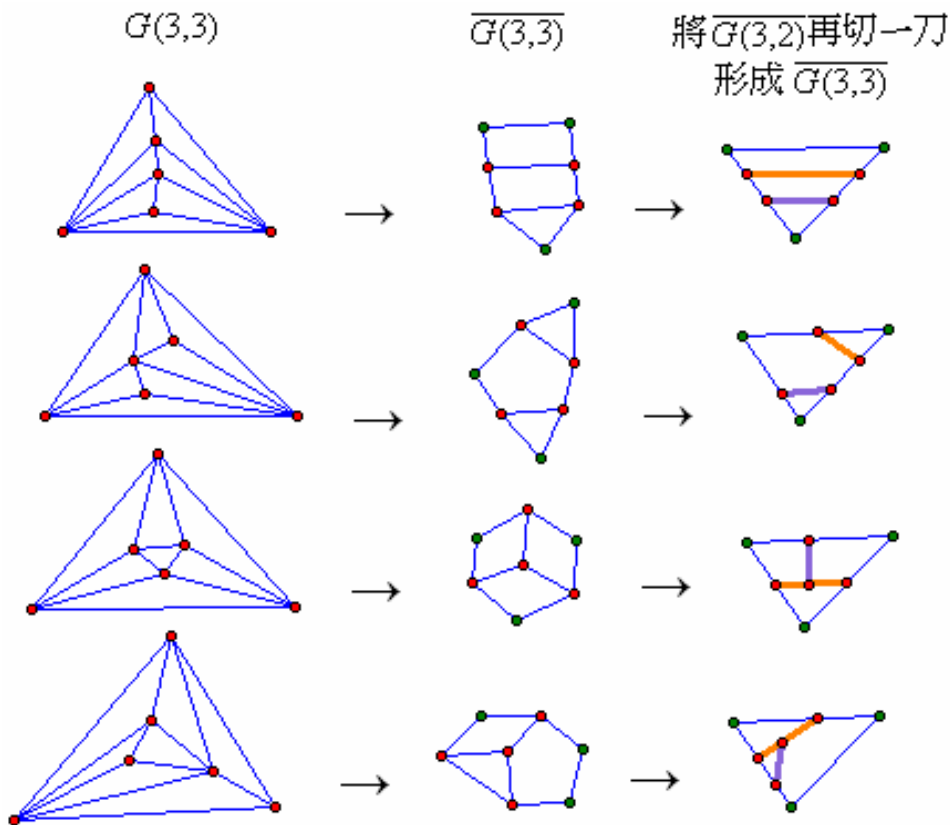


如圖 7，將  $\overline{G(3,2)}$  中度數為 2 的點 (綠色的點) 拉開，作為一個三角形的頂點，可得一圖，稱此圖為「標準對偶圖」。

觀察後，猜測標準對偶圖  $\overline{G(3,2)}$  為  $\overline{G(3,1)}$  切一刀後形成：



繼續觀察標準對偶圖  $\overline{G(3,3)}$  (如圖 8-1)



猜測：將  $\overline{G(3,2)}$  再切一刀，發現可造出不同的標準對偶圖  $\overline{G(3,3)}$ 。(如圖 8-2)

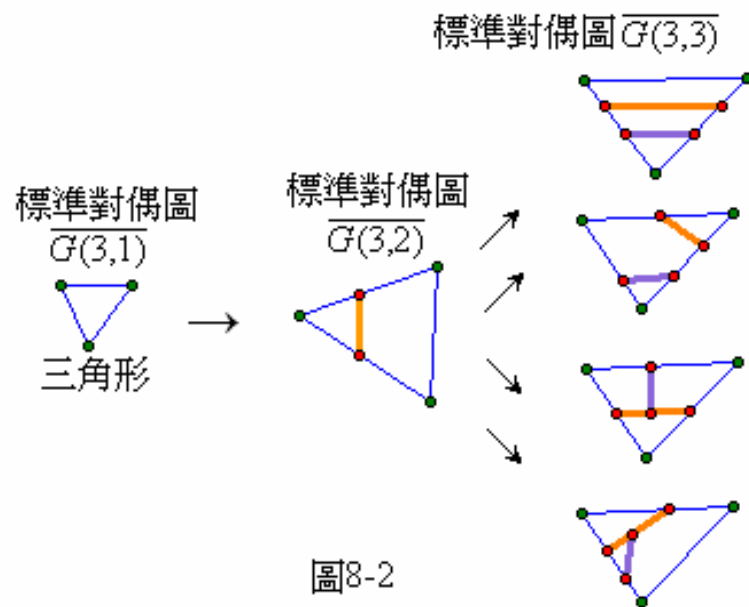


圖8-2

(由於標準對偶圖有此特性，以下我們所探討的  $\overline{G(n,m)}$  都是標準對偶圖)

我們稱切一刀的動作為  $C_p$  變換：

在  $\overline{G(3,3)}$  上選定一個多邊形，任取兩個邊並在這兩個邊上各取一個點將這兩個點連接起來，形成兩個多邊形，此過程叫做  $C_p$  變換，如圖 9。 $C_p$  變換所取的兩個端點，均稱為切割點，如圖 9。

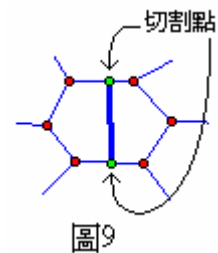


圖9

由於以上的發現，我們猜測有性質 1：

性質 1：將  $\overline{G(n,1)}$  做了 1 次  $C_p$  變換會形成  $\overline{G(n,2)}$ ，若做了  $m-1$  次  $C_p$  變換會形

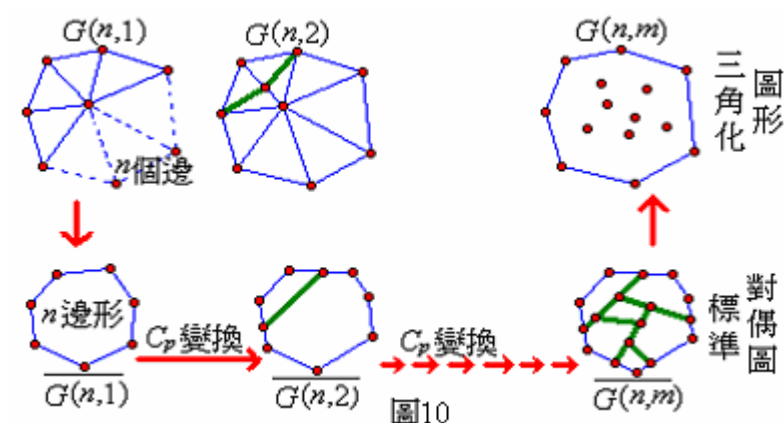
$$\text{成 } \overline{G(n,m)} \text{，亦即 } C_p^{m-1}(\overline{G(n,1)}) = \overline{G(n,m)}$$

證明：詳見附件二

利用性質 1，我們發現以下可以創造所有對偶圖的方法：

方法一：假設我們欲畫出的三角化圖形為  $G(n, m)$ ，那麼只要從最原始的對偶圖  $\overline{G(n,1)}$  開始做  $m - 1$  次  $C_p$  變換後即可得到  $\overline{G(n,m)}$ ，再對應回三角化圖形即可得到所求之  $G(n, m)$ 。

如下圖 10：



## 伍、研究結果

### A. 三角化

一、若  $G(n, m)$  中每個頂點的度數都等於  $k$ ，則將此圖形稱為  $k$  三角正則圖，以  $G_k$  表示。我們想找出  $G_k$  存在的充要條件。

**定理 2：**  $G_k$  存在的充要條件為  $2 < k < 6$ 。再者，

- (1) 存在一個  $G(n, m)$  為  $G_3$  的充要條件為  $n=3$  且  $m=1$
- (2) 存在一個  $G(n, m)$  為  $G_4$  的充要條件為  $n=3$  且  $m=3$
- (3) 存在一個  $G(n, m)$  為  $G_5$  的充要條件為  $n=3$  且  $m=9$

證明：詳見附件三

二、若  $G(n, m)$  中每個點的度數都是奇數，則此  $G(n, m)$  稱為奇三角圖，以  $G_{2,1}$  表示。

如  $G_3$ 、 $G_5$  即屬之。我們想找出  $G_{2,1}$  存在的充要條件。

**定理 3：**  $G(n, m)$  為  $G_{2,1}$  的充要條件為  $n + m \equiv 0 \pmod{2}$  且  $m \neq 2, 3$

證明：詳見附件四

三、若  $G(n, m)$  中每個點的度數都是偶數，則此  $G(n, m)$  稱為偶三角圖，記作  $G_{2,0}$ 。

我們想找出  $G_{2,0}$  存在的充要條件。

**定理 4：**  $G(n, m)$  為  $G_{2,0}$ ，則  $e \equiv 0 \pmod{3}$  恆成立。再者，

- (1)  $G(3, m)$  中，除了  $m=1, 2, 4$  外，必有  $G_{2,0}$  存在。
- (2)  $G(3i, m)$  中， $i \geq 2$ ，當  $m \geq 2i+1$  時，皆有  $G_{2,0}$  存在；當  $m < 2i+1$  時，沒有  $G_{2,0}$  存在。

證明：詳見附錄五

四、給定正整數 $a$ 及 $r$  ( $0 \leq r < a$ ). 若 $G(n, m)$ 中每個頂點的度數都滿足

$\deg V_i \equiv \deg P_j \equiv r \pmod{a}$ ，則稱它為 $G_{a,r}$ 。我們想找出 $G_{a,r}$ 存在的充要條件。

引理 1：若存在一  $G(n, m)$  其中  $\deg V_i, \deg P_j \geq r$ ，則  $r \leq 5$

證明：

因為  $\deg V_i, \deg P_j \geq r$

$$(n+m)r \leq \sum_{i=1}^n \deg V_i + \sum_{j=1}^m \deg P_j = 4n + 6(m-1)$$

$$\Rightarrow (6-r)(n+m) \geq 6 + 2n > 0$$

$\therefore n+m > 0 \Rightarrow 6-r > 0 \Rightarrow r \leq 5$ ，得證。

**定理 5**：若存在 $G_{a,r}$ ，則 $r \leq 5$

證明：

因為  $\deg V_i \equiv \deg P_j \equiv r \pmod{a}$   $0 \leq r < a$ ，所以  $\deg V_i, \deg P_j \geq r$

由引理 1 可知  $r \leq 5$  得證。

性質 1：若存在 $G_{a,1}$ ，則 $a = 2,3,4$ ，若存在 $G_{a,2}$ ，則 $a = 2,3$

證明：

$\deg V, P \geq 3 \Rightarrow aq + 1 \geq 3$  ( $q \in N$ ) 即  $q \neq 0 \Rightarrow aq + 1 \geq a + 1$  由引理 1 知

$5 \geq a + 1$  因此  $5 \geq a + 1 \geq 3$  故  $a = 2,3,4$ 。同理可證若存在 $G_{a,2}$ ，則 $a = 2,3$

得證。

性質 2：若存在一  $G(n, m)$  為  $G_{a,r}$ ，則

在  $m' = \frac{a}{(a,6-r)}k + m$  時  $G(n, m')$  才可能為  $G_{a,r}$ ，其中  $k \in N$ 。

或在  $n' = \frac{a}{(a,4-r)}k + n$  時  $G(n', m)$  才可能為  $G_{a,r}$ ，其中  $k \in N$ 。

證明：

$$\sum_{i=1}^n \deg V_i + \sum_{j=1}^m \deg P_j = \sum_{i=1}^n aq_i + r + \sum_{j=1}^m aq_j + r = aq' + (n+m)r = 4n + 6(m-1)$$

$$\Rightarrow aq' = (4-r)n + (6-r)m - 6 \Rightarrow (6-r)m \equiv (6-r)m' \pmod{a}$$

$$\Rightarrow m \equiv m' \pmod{\frac{a}{(a,6-r)}} \text{ 故 } m' = \frac{a}{(a,6-r)}k + m$$

同理可證，若  $G(n', m)$  為  $G_{a,r}$  則  $n' = \frac{a}{(a,4-r)}k + n$  得證。

研究發現：

(一) 若 $G(n, m)$ 為 $G_{3,0}$ ，則 $n \equiv 0(\text{mod } 3)$

(二) 若 $G(n, m)$ 為 $G_{3,1}$ ，則 $m \equiv 0(\text{mod } 3)$

(三) 當 $n=3$ ，對特定的 $m$ ，存在 $G_{3,0}$ 、 $G_{3,1}$ 、 $G_{4,0}$ 、 $G_{4,1}$ 以及 $G_{5,0}$

$G_{a,r}$	$G_{3,0}$	$G_{3,1}$	$G_{4,0}$	$G_{4,1}$	$G_{5,0}$
$m$ 值, $j \in N$	$4j+1$	$3j$	$12j+3$	$8j+9$	$20j+9$

## B. 四面體化

一、我們推廣以上研究到空間中，探討「四面體化」。

給定一個凸多面體，在其內部加入數個點，並依下列規則加邊(線段)，使得此多面體分割成若干個小四面體，這樣的作法我們稱為四面體化：

- (1) 這些直線段不能相交，但是兩線段以某一給定點為端點是允許的。
- (2) 每個給定點只能作為小四面體三角形的頂點，既不能作為某個小四面體三角形內部的點也不能作為某個小四面體三角形的非頂點的邊界點。
- (3) 只能將頂點和內部的點連接，或者內部的點互相連接，但是，如果將多面體上的頂點互相連接是不允許的。

如同平面上的規定，我們堅守：「不能將頂點互相連接」這個條件，於是並非所有的多面體都可以被四面體化，必須每個面都是三角形的多面體才可以完成四面體化。空間中，若一個凸多面體的每個面都是三角形，則稱此凸多面體為「三角面體」。我們以 $S(n, m)$ 表示在一個有 $n$ 個頂點的三角面體內部加入 $m$ 個點，並做四面體化所得的立體結構。

仿照平面上的步驟，我們先觀察以下含 4, 5, 6 個頂點的三角面體(如圖 11)。發現含 6 個頂點的三角面體有兩種，均含 8 個面且 12 條邊(線段)，於是猜測以下定理：

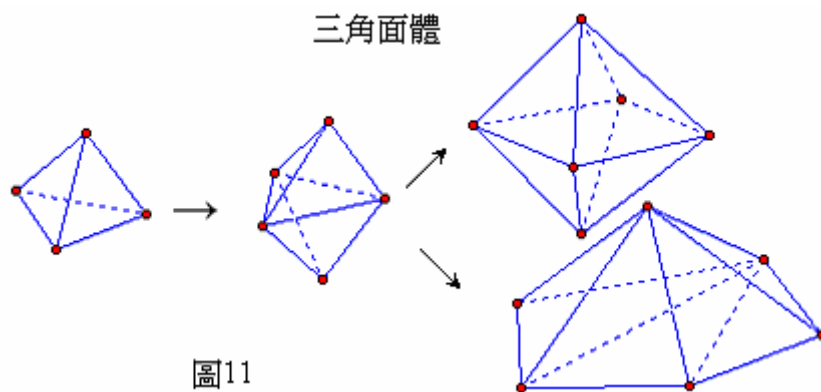


圖11

**定理 6：**空間中，若一個三角面體有  $n$  個頂點(其中  $n \geq 4$ )，則此三角面體有  $2n - 4$  個面以及  $3n - 6$  條邊。

證明：設此三角面體，面的個數為  $F$ ，線段數為  $L$ 。

由於每個面都是三角形，於是我們有  $3F = 2L$  恆成立。

再利用尤拉公式：(點數)+(面數)-(稜線數)=2

$$\Rightarrow 2 = n + F - L = n + F - \left(\frac{3}{2}F\right) = \frac{2n - F}{2} \Rightarrow F = 2n - 4$$

$$\text{而 } L = \frac{3}{2}F = \frac{3}{2}(2n - 4) = 3n - 6 \blacksquare$$

二、我們發現以下畫”對偶圖”的方法：

我們在三角面體裡加入點做四面體化，先從加入一個點開始，我們觀察以下幾個  $S(n, 1)$ (只加入一個點作四面體化的圖形)，如圖 12：

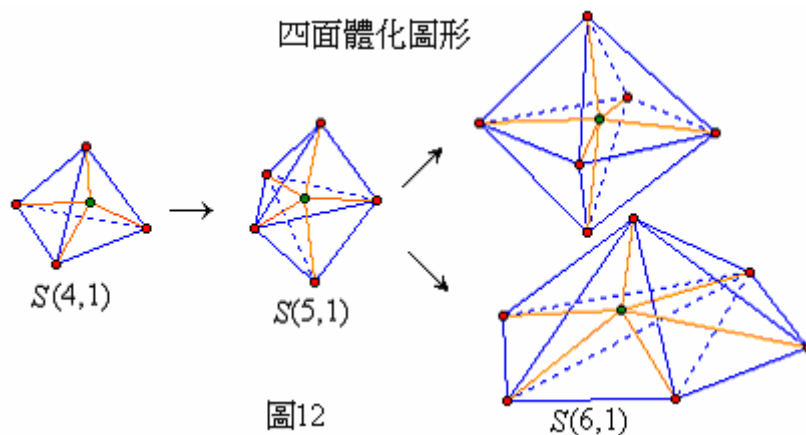


圖12

我們將三角面體的每個頂點都連到所加入的點，使得三角面體完成四面體化，於是可以得到  $S(4, 1)$ 、 $S(5, 1)$ 以及兩種不同的  $S(6, 1)$ ，仿平面上的想法，我們觀察圖形的對偶圖，在此“對偶圖”的定義修改為：

將  $S(n, m)$ 中每個四面體分別用一個點來表示，若兩個四面體有共同面，則用一條邊來連接此兩點，所得的圖形稱之為  $S(n, m)$ 的對偶圖(*dual graph*)，記作  $\overline{S(n, m)}$ 。

於是我們將上圖的幾個  $S(n, 1)$ 轉換成對偶圖來觀察，得到  $\overline{S(4,1)}$ 、 $\overline{S(5,1)}$ 以及兩種  $\overline{S(6,1)}$ ，再試著創造變換使得對偶圖之間可以作連結(如圖 13)：

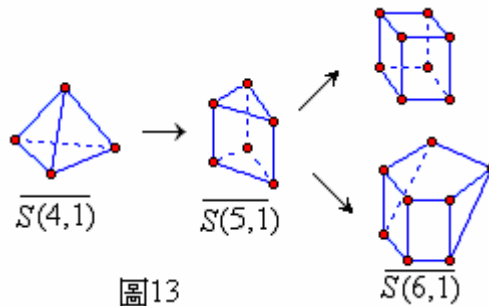


圖13

發現可以在對偶圖的某個面作  $C_p$ 變換而形成另一個對偶圖(如圖 14)

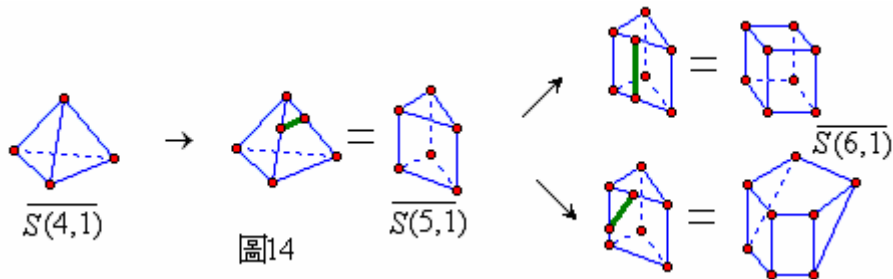


圖14

於是我們定義  $C_{sp}$ 變換：空間中給定一  $\overline{S(n,1)}$ ，選定  $\overline{S(n,1)}$ 上的一個表面，在此面上做  $C_p$ 變換，稱此過程為  $C_{sp}$ 變換，如圖 15。變換後會得到多一個面的多面體，以  $C_{sp}(S)$ 表示，若經過  $n$ 次變換，則以  $C_{sp}^n(\overline{S(n,1)})$ 表示。

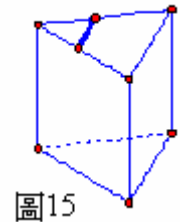


圖15

於是我們有  $C_{sp}(\overline{S(4,1)}) = \overline{S(5,1)}$  以及  $C_{sp}^2(\overline{S(4,1)}) = \overline{S(6,1)}$ ，

猜測：將一個四面體  $\overline{S(4,1)}$ 做了  $n-4$ 次  $C_{sp}$ 變換會形成  $\overline{S(n,1)}$ ，亦即

$$C_{sp}^{n-4}(\overline{S(4,1)}) = \overline{S(n,1)}$$

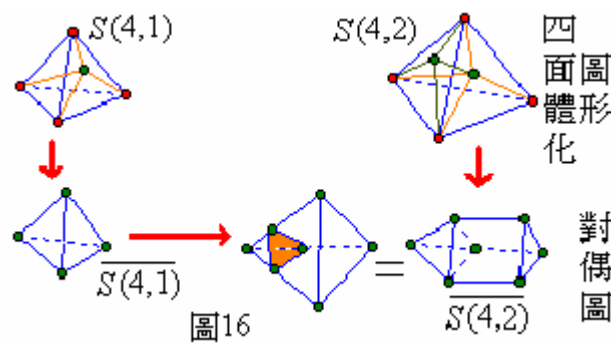
**定理 7**：每個  $\overline{S(n,1)}$  都可以由一個  $\overline{S(4,1)}$  經過  $n-4$  次的  $C_{sp}$  變換而生成

證明：

1. 因為  $m=1$ ，所以每個生成的四面體均有一面未與其他四面體相鄰，即在  $\overline{S(n,1)}$  中每個點度數皆為 3。
2. 由定理 5，可知若一個三角面體有  $n$  個頂點，面的個數為  $M$ 。則  $M = 2n - 4$ ，又因為  $m=1$ ，所以三角面體的面數  $M$  等於四面體的個數，即為  $\overline{S(n,1)}$  上度數為 3 的點數，故  $\overline{S(n,1)}$  上有  $2n - 4$  個度數為 3 的點。
3. 在  $\overline{S(n,1)}$  上任取一點，則有另一點與之相鄰，現在作一次  $C_{sp}$  變換的反變換，去掉一線段及其兩端點，則會產生一個新的圖，圖上每個點的度數不變，且點的個數減 2。經過  $n-4$  次  $C_{sp}$  變換的反變換後，可以得一圖，在圖上有四個點且每個點度數為 3，所以此圖即為  $\overline{S(4,1)}$ ，故定理 7 得證。

利用定理 7，我們可以創造出所有的  $\overline{S(n,1)}$ 。

接著，我們繼續探討加入 2 個點時、3 個點時等等的圖形，四面體化圖形  $S(n, m)$  以及其對偶圖  $\overline{S(n, m)}$  是否可以用  $\overline{S(n,1)}$  繼續創造，觀察以下對偶圖，如圖 16：



我們將空間對偶圖用一個面去割，分割成兩個多面體，發現可以將  $\overline{S(4,1)}$  變換成  $\overline{S(4,2)}$ 。

同樣地，我們嘗試將  $\overline{S(5,1)}$  變換成  $\overline{S(5,2)}$ ，如圖 17：

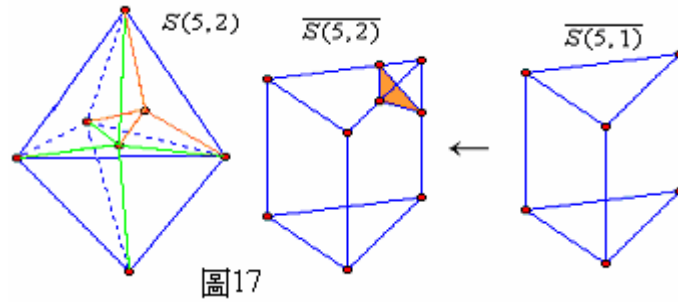


圖17

三、定義  $C_s$  變換：在  $\overline{S(n,m)}$  中，任取一個多面體，用一平面與之相交，並在此多面體的稜線上交出點，在面上交出線段，生成的點與線段組成截面，此截面將原多面體分成兩個多面體，這個過程稱為  $C_s$  變換，如圖 18，以  $C_s(S)$  表示。

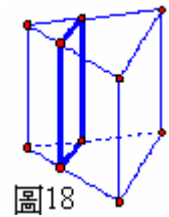


圖18

引理 2：在  $\overline{S(n,m)}$  中每個度數為 4 的點，必在組成的多面體相鄰面的頂點上。

證明：在對偶圖中，若有一個度數為 4 的點不在組成的多面體相鄰面的頂點上，則此點只在一個多面體上，即只有一個  $P$  點，在此  $P$  點所代表的四面體上。因此，此四面體其餘三點均為三角面體的頂點，亦即此四面體有一面為三角面體的面，其度數為 3，與度數為 4 矛盾，所以此點必在組成的多面體相鄰面的頂點上，得證。

**定理 8**：每個  $\overline{S(n,m)}$  都可以由  $\overline{S(n,1)}$  經過  $m-1$  次  $C_s$  變換而得到，即

$$C_s^{m-1}(\overline{S(n,1)}) = \overline{S(n,m)}$$

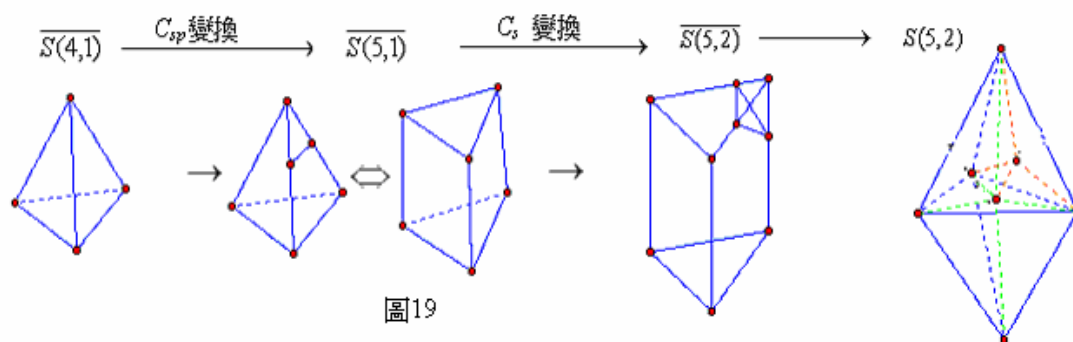
證明：

利用上引理 2，我們可以在  $\overline{S(n,m)}$  圖上，去掉二多面體相鄰的面及此面與其餘面相交成的線和此面與其餘線段相交成的點，由於去掉的點，其度數均為 4，且剩餘的點度數不變，即相當於進行一次  $C_s$  變換的反變換，因此做到沒有度數為 4 的點，就得到  $\overline{S(n,1)}$ 。在  $\overline{S(n,m)}$  中有  $m$  個多面體，又作一次此  $C_s$  的反變換時，新的對偶圖中均減少一個多面體，即  $\overline{S(n,m)}$  作  $m-1$  次  $C_s$  的反變換可得  $\overline{S(n,1)}$ ，故定理 8 得證。

經由以上定理 8 及定理 7 的證明，我們可以利用  $C_{sp}$  變換控制變因  $n$ ，以及利用  $C_s$  變換控制變因  $m$ ，如此可以創造出所有的  $\overline{S(n,m)}$ ，並對應回所有的  $S(n,m)$ ，我們稱此方法為「方法二」，方法如下：

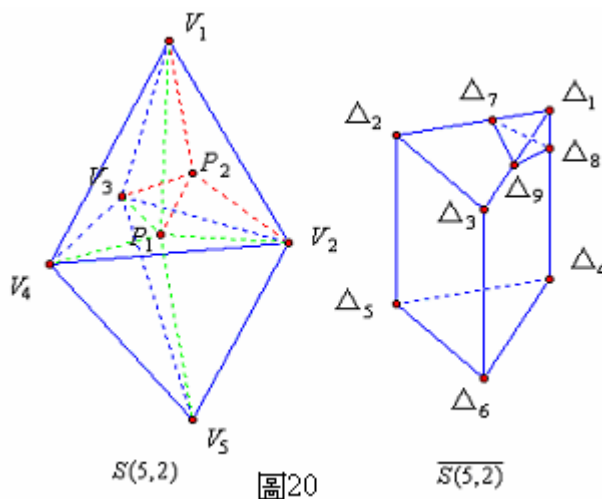
方法二：我們首先給定一個四面體，即為  $\overline{S(4,1)}$ ，經由  $C_{sp}$  變換  $n-4$  次後得到  $\overline{S(n,1)}$ ，再把  $\overline{S(n,1)}$  經由  $C_s$  變換  $m-1$  次後得到  $\overline{S(n,m)}$ 。

例如：將一個四面體經由  $C_{sp}$  變換 4 次後得到  $\overline{S(5,1)}$ ，再把  $\overline{S(5,1)}$  經由  $C_s$  變換 1 次後得到  $\overline{S(5,2)}$ ，如圖 19：



#### 四、對偶圖的性質

(一) 性質對應(以圖 20 為例)：



1.  $S(n,m)$  中內部點  $P_i$  的度數可對應到  $\overline{S(n,m)}$  中某個多面體的面數。

例：  $S(5,2)$  中  $\deg P_1 = 6 \rightarrow \overline{S(5,2)}$  的六面體  $\Delta_2\Delta_3\Delta_4\Delta_5\Delta_6\Delta_7\Delta_8\Delta_9$

$S(5,2)$  中  $\deg P_2 = 4 \rightarrow \overline{S(5,2)}$  的四面體  $\Delta_1\Delta_7\Delta_8\Delta_9$

2. 在  $S(n, m)$  中，有一面在外部而其餘三面都相鄰著其他的四面體的四面體可對應到  $\overline{S(n, m)}$  中度數為 3 的點，而  $S(n, m)$  中四個面都相鄰著另一個四面體的四面體可對應到  $\overline{S(n, m)}$  中度數為 4 的點。

例： $S(5, 2)$  中四面體  $V_1V_2V_3P_2$  (三角形  $V_1V_2V_3$  在外部)  $\rightarrow \overline{S(5, 2)}$  的  $\deg \Delta_1 = 3$

$S(5, 2)$  中四面體  $P_1P_2V_1V_2 \rightarrow \overline{S(5, 2)}$  的  $\deg \Delta_9 = 4$

由於頂點不可以互相連接，所以不會出現有兩個面都在外部的四面體

$\overline{S(n, m)}$  中  $\deg \Delta_i$  只可能是 3 或 4。

3. 定義： $d(\Delta_i, \Delta_j, \dots, \Delta_k)$  表  $\overline{S(n, m)}$  中由  $\Delta_i, \Delta_j, \dots, \Delta_k$  所組成的多邊形的面上被分割的區域數，即多邊形  $\Delta_i, \Delta_j, \dots, \Delta_k$  被分割成  $d(\Delta_i, \Delta_j, \dots, \Delta_k)$  個多邊形。(其中  $\deg \Delta_i = \deg \Delta_j = \dots = \deg \Delta_k = 3$ )

例：三角形  $\Delta_i, \Delta_j, \dots, \Delta_k$  被分割成 2 個多邊形，於是  $d(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = 2$

如此一來， $S(n, m)$  中頂點  $V$  的度數對應到  $\overline{S(n, m)}$  中  $d(\Delta_i, \Delta_j, \dots, \Delta_k) + n$

(其中  $\Delta_i, \Delta_j, \dots, \Delta_k$  共有  $n$  個，且  $\deg \Delta_i = \deg \Delta_j = \dots = \deg \Delta_k = 3$ )

例： $\deg V_1 = 5 = d(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) + 3$ ， $\deg V_2 = 6 = d(\Delta_1, \Delta_3, \Delta_6, \Delta_4) + 4$

(其中  $\deg \Delta_1 = \deg \Delta_3 = \deg \Delta_6 = \deg \Delta_4 = 3$ )

4. 在  $S(n, m)$  中，除了外框  $\overline{V_iV_j}$  以外的線段皆對應到  $\overline{S(n, m)}$  中的面，而內部點的連線  $\overline{P_iP_j}$ ，則對應到  $\overline{S(n, m)}$  中在內部的面。

例： $S(n, m) \rightarrow \overline{S(n, m)}$  中

$\overline{P_1P_2} \rightarrow$  三角形  $\Delta_7\Delta_8\Delta_9$ ， $\overline{V_1P_2} \rightarrow$  三角形  $\Delta_7\Delta_9\Delta_1$

$\overline{V_2P_2} \rightarrow$  三角形  $\Delta_8\Delta_9\Delta_1$ ， $\overline{V_3P_2} \rightarrow$  三角形  $\Delta_7\Delta_8\Delta_1$

5. 在  $S(n, m)$  中，除了表面  $V_iV_j \dots V_k$  外，內部的面對應到  $\overline{S(n, m)}$  中的線段

例： $S(n, m) \rightarrow \overline{S(n, m)}$  中

$\Delta V_1V_4P_1 \rightarrow \overline{\Delta_2\Delta_3}$ ， $\Delta V_1V_2P_1 \rightarrow \overline{\Delta_3\Delta_9}$ ， $\Delta V_1V_3P_1 \rightarrow \overline{\Delta_2\Delta_7}$

綜合 1.~5.我們可得：

	$S(n, m)$	$\overline{S(n, m)}$
轉換	四面體	點
性質	頂點 $V$ 互連的線段(外框)	沒有對應
	除外框 $\overline{V_i V_j}$ 以外的線段	面
	除表面 $V_i V_j \dots V_k$ 以外的面	線段
	點	多面體
	點的度數	$V$ 點(頂點)
	$P$ 點(加入的點)	多面體的面的個數

(二) 性質推廣

由以上的對應，我們知道  $S(n, m)$  中的四面體，也就是  $\overline{S(n, m)}$  中的點，而利用  $C_s$  變換可增加

$\overline{S(n, m)}$  中的點，但每作一次  $C_s$  變換並非都增加同樣多的點，可能增加 3 個點，或者增加 4 個

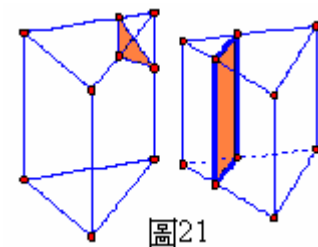


圖21

點，如圖 21，也就是說，原本  $S(n, m)$  中的四面體個數並不唯一，不像平面上的三角化圖形，可以確切的數出有幾個三角形(定理 1)，於是在空間中，我們只能求出四面體化圖形的四面體個數的範圍(有最大值及最小值)，而線段數亦同：

我們先證明以下兩個引理：

**定理 9**：令  $S(n, m)$  的四面體個數為  $N$ ，面的個數為  $M$ ，邊個數為  $L$ ，則

$$(1) \quad 2n + 3m - 7 \leq N \leq 2n - 4 + \frac{(2n + m - 2)(m - 1)}{2}$$

$$(2) \quad 5n + 6m - 16 \leq M \leq 5n - 10 + (2n + m - 2)(m - 1)$$

$$(3) \quad 4n + 4m - 10 \leq L \leq 4n - 6 + \frac{(2n + m)(m - 1)}{2}$$

證明：詳見附錄六

五、若  $S(n, m)$  中各頂點的度數都是  $k$ ，則將此  $S(n, m)$  稱為  $k$  四面體正則圖，以  $S_k$  表示。

**定理 10**：空間中，存在  $S(4, m)$  為  $S_{m+3}$

證明：詳見附件七

六、若 $S(n, m)$ 中各頂點的度數都是奇數，則稱為奇四面體圖，以 $S_{2,1}$ 表示。

**定理 11**： $S(n, m)$ 為 $S_{2,1}$ 的充要條件為 $n + m \equiv 0 \pmod{2}$  且  $(n, m) \neq (5, 1)$ 及 $(7, 1)$

證明：詳見附件八

七、若 $S(n, m)$ 中各頂點的度數都是偶數，則稱為偶四面體圖，以 $S_{2,0}$ 表示。

**定理 12**： $S(n, m)$ 為 $S_{2,0}$ 的充分條件為

$$(n, m) \neq (4, 2_{or} 4)(5, 1_{or} 2_{or} 4)(6, 1_{or} 2_{or} 4)(7, 1_{or} 3_{or} 5)(2i + 6, 2_{or} 4)(2j + 7, 3_{or} 5)$$

證明：詳見附件九

## 陸、討論

- 一、我們先定義這個三角化的做法，再去探討其中的特殊關係，試圖找出我們要的三角化圖形，利用「對偶圖」，讓我們的點的度數更加的清楚表達在多邊形的邊上，使得我們能簡易的觀察。
- 二、在研究奇偶圖的方法中，我們重複運用了相同的變換方式使三角化圖形內部的點的度數奇偶性不變，從而推出一般化的結論。
- 三、研究中，我們無意間發現三角化圖形與四面體化圖形都是漢米頓圖，驚奇之餘，我們證明了這個結果，使得三角化圖形與漢米頓圖產生連繫。
- 四、在平面上的 $G_{a,r}$ 中，雖然我們可以找到 $r$ 的範圍，但 $a$ 卻有無限多個，所以我們只討論了一部分的 $G_{a,r}$ ，仍有發展的空間。在空間中，因為我們並未限制點的位置，所以 $S(n, m)$ 中四面體的個數不唯一，而難以討論點的度數，因此我們並未討論所有的四面體化正則圖，假以時日，我們應該可以有所突破。
- 五、在網路上我們找到另一種三角化的方式(如附件 2)，參考其作法後，我們試圖在給定  $n, m$  下，用電腦程式得到所有的  $G(n, m)$ ，但電腦程式卻無法判別所生成圖的結構差異，而生成重複的圖，因此並未成功。期望在未來，能找到一種系統的判別法，使程式更加完美。
- 六、2006 年國際科展有件作品(參考資料五)也是討論三角化，但此作品三角化的定義與我們的不同，所以結果也不同，另外，在研究成果的呈現上，因為此作品只單純地在三角化圖形與四面體化圖形上做研究，並未引進對偶圖，所以成果也比較的少，較難發展與推廣。

七、我們上網尋找三角化的應用：

(一) 國立中山大學應用數學系的楊孟哲先生的作品：「Delaunay 三角化於臉部辨識之應用」(參考資料六)，提到一些方法把人臉的影像分割，然後研究分割後的圖形試著找一些特性。

(二) 三維地質建模和帶權曲面限定三角化的研究與實現(參考資料七)：作為結構場約束條件，對地質體進行區域限定四面體剖分。對含有曲面(地質斷面、地質層面)的地質體定義域進行限定四面體剖分。

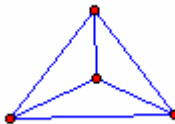
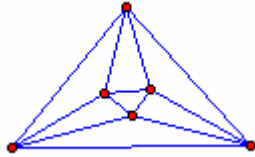
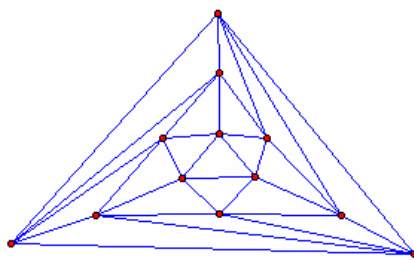
這些都是我們以後可以繼續發展的。

## 柒、結論

在研究圖形轉換為對偶圖時，我們發現可由特定的變換而形成對偶圖，利用這種變換創造出三角化圖形的對偶圖，並藉此取代直接在三角化圖形上研究的方式，使得我們能夠減化問題的複雜性，進而發展出特殊三角化圖形存在性的理論。

特殊三角化圖形存在性的理論：

一、 $k$ 三角正則圖 $G_k$ ，當 $k > 5$ 時， $G_k$ 不存在。當 $k \leq 5$ ：

$G_3$ 圖	$G_4$ 圖	$G_5$ 圖
$n=3, p=1$	$n=3, p=3$	$n=3, p=9$
		

二、奇三角圖

(一) 若 $G(n, m)$ 為奇三角圖，則 $n + m \equiv 0 \pmod{2}$

(二) 平面上給定 $n+m$ 為偶數的三角化圖形，有奇三角圖存在的條件如下：

$n$ 的範圍	偶數		奇數	
$m$ 的範圍	$m=2j$ , 但 $j \neq 1$	$j=1$	$p=2j-1$ , 但 $j \neq 2$	$j=2$
奇三角圖的狀況	存在	不存在	存在	不存在

### 三、偶三角圖

- (一) 若  $G(n, m)$  為偶三角圖，則  $n \equiv 0 \pmod{3}$
- (二) 若  $n=3$  時， $m$  除了 1、2、4 外，皆有偶三角圖存在。
- (三) 在  $n=6, 9, \dots, 3i$ ，其中  $i \in N$

$m$ 的範圍	$m < 2i + 1$	$2i + 1 \leq m$
偶三角圖的狀況	不存在	存在

### 四、 $G_{a,r}$

- (三) 若  $G(n, m)$  為  $G_{a,r}$ ，則  $r \leq 5$ 。
- (四) 若  $G(n, m)$  為  $G_{3,0}$ ，則  $n \equiv 0 \pmod{3}$
- (五) 若  $G(n, m)$  為  $G_{3,1}$ ，則  $m \equiv 0 \pmod{3}$
- (六) 當  $n \geq 3$ ，對特定的  $m$ ，存在  $G_{3,0}$ 、 $G_{3,1}$ 、 $G_{4,0}$ 、 $G_{4,1}$  以及  $G_{5,0}$

$G_{a,r}$	$G_{3,0}$	$G_{3,1}$	$G_{4,0}$	$G_{4,1}$	$G_{5,0}$
$m$ 值	$4j + 1$	$3j$	$3 + 4j$	$9 + 8j$	$9 + 20j$

### 五、 $k$ 四面體正則圖

空間中，存在  $S(4, m)$  為  $S_{m+3}$ ， $\forall m \in N$

### 六、奇四面體圖

- (一) 若  $S(n, m)$  為奇四面體圖，則  $n + m \equiv 0 \pmod{2}$
- (二)  $S(n, m)$  為奇四面體圖的充分條件：

條件	$S(2(i+1), 2j)$	$S(2i+3, 2j-1)$ ，但 $(i, j) \neq (1, 1)$ 或 $(2, 1)$	$S(5, 1)$ 或 $S(7, 1)$
結果	存在	存在	不存在

### 七、偶四面體圖

- (一)  $S(n, m)$  為偶四面體圖的充分條件：

條件	$S(2(i+1), j)$ ， $j \neq 2$	$S(2i+3, j)$ ， $i \neq 2$ ， $j \neq 1, 3$ ， $(i, j) \neq (1, 2)$	$S(3+2j, 1)$
結果	存在	存在	不存在

## 捌、參考資料及其他

- 一、常庚哲，蘇淳。奇數與偶數。台灣省新竹市：凡異文化事業有限公司。
- 二、沈長庚、林雲壽（民 91）。高級中學幾何學(下)。台北市：三民書局。
- 三、楊維哲等（民 95）。普通高級中學數學(一)。台北市：三民書局。
- 四、[http://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay\\_triangulation](http://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation)
- 五、楊子正。拖線溜點。2006 年國際科展作品：編號 010019-14
- 六、<http://image.cse.nsysu.edu.tw/research/Delaunay/%A4f%B8%D5.PPT>
- 七、<http://translate.google.com.tw/translate?hl=zh-TW&sl=zh-CN&u=http://www.lunwentianxia.com/product.sf.2305352.1/&sa=X&oi=translate&resnum=5&ct=result&prev=/search%3Fq%3D%25E4%25B8%2589%25E8%25A7%2592%25E5%258C%2596%26start%3D10%26complete%3D1%26hl%3Dzh-TW%26sa%3DN>

## 玖、附件

略

