

中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

最佳創意獎

040418

三角形的旁切圓錐曲線

學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者： 高二 陳彥齊 高二 張家恒	指導老師： 戴武郎
-------------------------	--------------

關鍵詞： 旁切拋物線、旁切橢圓與雙曲線、正焦弦長

摘要

在一次邂逅裡，我們碰到了一個三角形旁切拋物線的題目，我們經過代數、向量、幾何作圖方法，得到了一個完美的結果： $\triangle ABC$ 旁切拋物線的正焦弦長 $= \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}{R^2}$ （其中 F 是焦點， R 是 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑），以這個結果為基礎，我們推導出：當其對稱軸為 $\triangle ABC$ 中的角平分線時，三個旁切拋物線的正焦弦長與三角形間的關係式，更對這三個正焦弦長做了關係的討論。

令人意想不到的，這個對稱點的作圖（Simson 定理推廣），亦適用於三角形旁切橢圓及旁切雙曲線，並進一步得到 $\triangle ABC$ 旁切橢圓（雙曲線）的長軸長（貫軸長） $= \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}{|d^2 - R^2|}$ ，

短軸長（共軛軸長）的平方 $= \frac{8R \cdot \overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{|d^2 - R^2|}$ ，（其中 d 是焦點 F 到 $\triangle ABC$ 外接圓圓心的

距離， F_1, F_2, F_3 分別為 F 到 $\triangle ABC$ 三邊的垂足），因而其正焦弦長 $= 8R \times \frac{\overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}$ 。

壹、研究動機

在數學專題研究課中，老師拋出了一個 94 學年度大學入學指考數學甲試題，原題如下：

9. 有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其 y 坐標 ≥ 0 ），並與 x - 軸、直線 $y = x - 1$ 、直線 $y = -x - 1$ 相切。下列敘述何者正確：

- (1) 此拋物線的對稱軸必為 y - 軸。
- (2) 若此拋物線對稱軸為 y - 軸，則其焦距為 1。
- (3) 此拋物線的頂點必在 x - 軸上。
- (4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

經過深入討論這個題目發現，此題即為三角形的「旁切拋物線」，其中關於第四個選項「有不只一條拋物線滿足此條件」，對此，我們想對其作圖方法做進一步的研究，並且對所作出的圖形的一些性質做討論，另外，我們也想進一步去探索這些旁切拋物線是否與三角形的旁切圓類似，擁有一些美妙的性質，這引發了我們的好奇心，因此展開我們一系列的研究。

貳、研究目的

- 一、將 94 年數學甲的問題，從等腰直角三角形推廣到一般三角形，並研究其作圖方法。
- 二、從作出的旁切拋物線中，計算其正焦弦長，並研究其性質。
- 三、找出與三角形旁切圓類似的旁切拋物線的性質。
- 四、從旁切拋物線推廣到旁切圓錐曲線，計算此旁切圓錐曲線的長軸長(或實軸長)、短軸長(或共軛軸長)和正焦弦長，並研究其性質。

參、研究設備與器材

- 一、GSP(The Geometer's Sketchpad)
- 二、Microsoft Word
- 三、Math Type 5
- 四、電腦
- 五、筆、紙

肆、研究過程與方法

第一部份、基本定理

我們的研究需要用到以下的一些性質：

【性質一】

若 Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切拋物線， F 是其焦點，則 A 、 B 、 C 、 F 共圓。

【性質二】

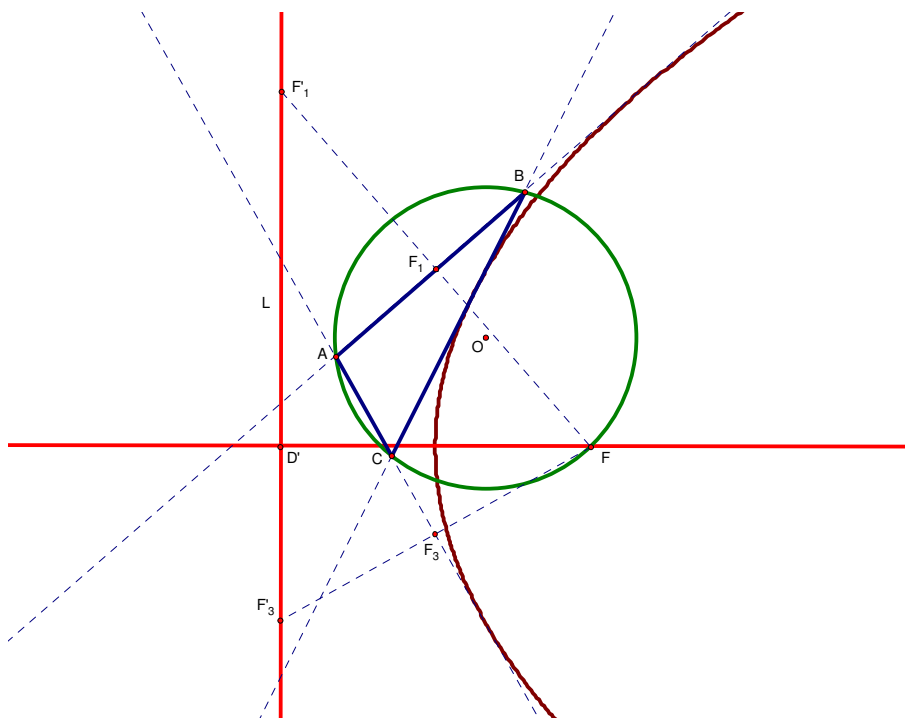
設 F 為拋物線 Γ 的焦點，則直線 L 為 Γ 的切線 $\Leftrightarrow F$ 關於 L 的對稱點 F' 位於準線上。

這些性質都可以在參考資料[1]或[2]中找到。

第二部份、三角形旁切拋物線的作圖方法

在參考資料[1]中給出了一個三角形旁切拋物線的作圖方法：

1. 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上取異於 A, B, C 的點 F 。
2. 作點 F 對於三邊 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 的對稱點，由 Simson 定理知此三點共線，令此直線為 L 。
3. 以 F 為焦點、 L 為準線，作拋物線 Γ 。則 Γ 會與 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 三直線相切(由性質二)，即 Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切拋物線。



圖一

第三部份、三角形旁切拋物線的正焦弦長及相關性質

我們利用上面所做的旁切拋物線，計算其正焦弦長，運用 F 到 $\triangle ABC$ 的三邊垂足 F_1, F_2, F_3 連線與拋物線的準線平行，得到一個令我們很驚奇的結果，這個結果是經過一段漫長又辛苦的計算後發現的，經過代數幾何和幾何作圖等方法，我們最後得到以下的精簡證明：

【定理一】若 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R ， Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切拋物線，

$$\text{則 } \Gamma \text{ 的正焦弦長} = \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}{R^2}。$$

證明：

設焦點 F 在三邊 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上的垂足分別為

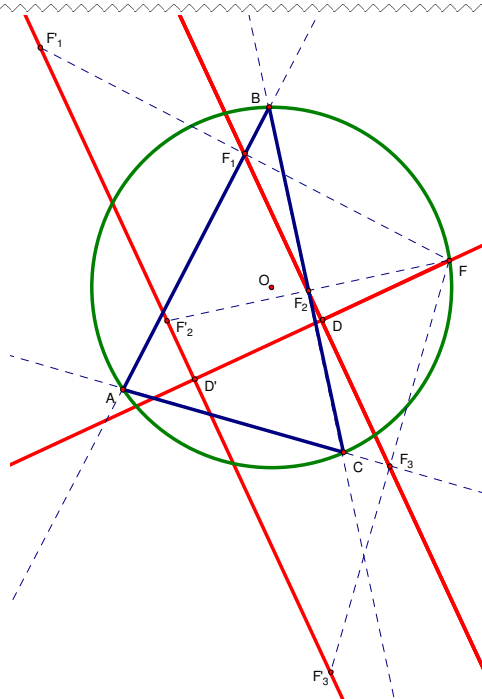
F_1, F_2, F_3 ，其對稱點分別為 F'_1, F'_2, F'_3 。(如圖二)

考慮三角形 $\triangle FF'_1F'_3$ 與 $\triangle FF_1F_3$ 。

$$\because \overline{FF_1} = \frac{1}{2} \overline{FF'_1} \text{、} \overline{FF_3} = \frac{1}{2} \overline{FF'_3} \text{，} \therefore \triangle FF'_1F'_3 \sim \triangle FF_1F_3$$

，故焦點 F 到準線 $\overleftrightarrow{F'_1F'_3}$ 的距離 $\overline{FD'} = 2\overline{FD}$ ，

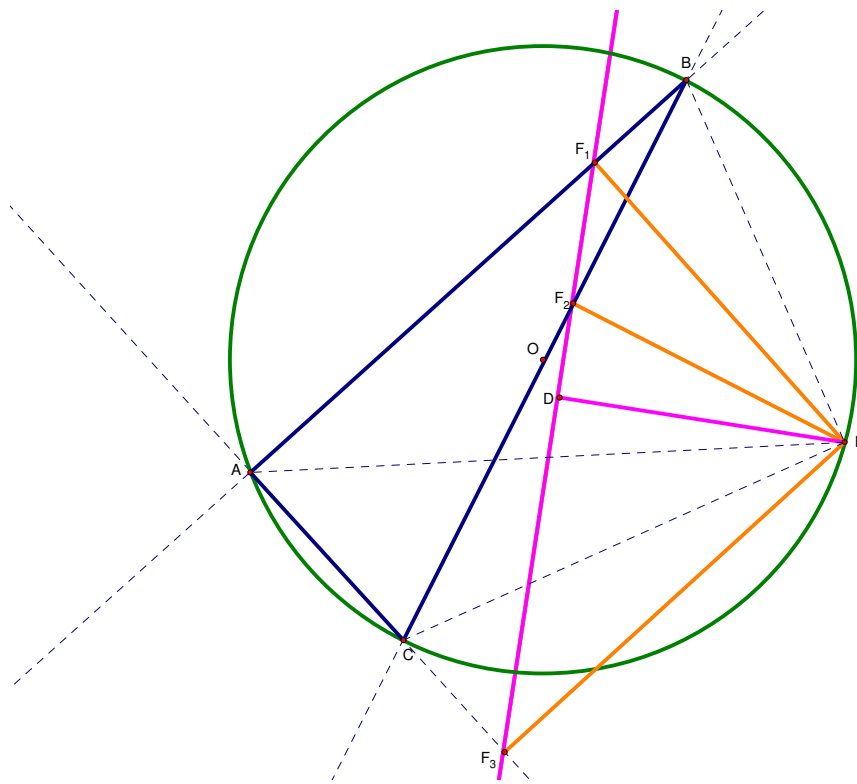
即正焦弦長 $= \overline{2FD'} = 4\overline{FD}$ 。



圖二

$$\begin{aligned}
\text{而 } \overline{FD} &= \overline{FF_3} \times \sin \angle FF_3D \\
&= \overline{FA} \times \sin \angle FAF_3 \times \sin \angle FAB \quad (\because FF_3AF_1 \text{ 共圓}) \\
&= \overline{FA} \times \sin \angle FAC \times \sin \angle FAB \\
&= \frac{\overline{FA} \times \overline{FB} \times \overline{FC}}{4R^2}
\end{aligned}$$

故正焦弦長 = $4\overline{FD} = \frac{\overline{FA} \times \overline{FB} \times \overline{FC}}{R^2}$ 。(參考下圖三)



圖三

我們知道三角形的三個旁切圓有非常多美妙的性質，那麼旁切拋物線是否也有類似的結果呢？針對這個問題，我們有以下的發現：

【定理二】 設 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 分別是 $\triangle ABC$ 中以 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的角平分線為對稱軸之三個旁切拋物線，其正焦弦長分別為 l_A, l_B, l_C ，則

$$l_A = 2(b+c) \sin \frac{A}{2} \tan \frac{A}{2},$$

$$l_B = 2(a+c) \sin \frac{B}{2} \tan \frac{B}{2},$$

$$l_C = 2(a+b) \sin \frac{C}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

證明：

如圖四， \overline{AF} 為 $\angle BAC$ 的平分線，

$$\text{故 } \overline{FB} = \overline{FC} = 2R \sin \frac{A}{2}。$$

由托勒密定理：

$$\overline{FA} \cdot a = \overline{FC} \cdot c + \overline{FB} \cdot b = 2R(b+c) \sin \frac{A}{2}$$

$$\therefore \overline{FA} = \frac{2R(b+c) \sin \frac{A}{2}}{a}$$

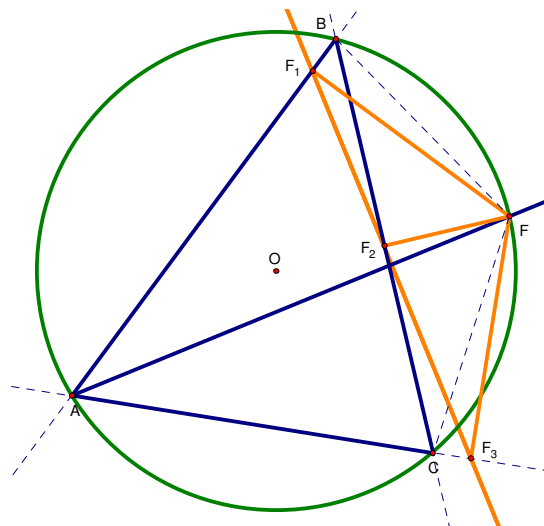
$$\ell_A = \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}{R^2}$$

$$= \frac{2R(b+c) \sin \frac{A}{2} \cdot 2R \sin \frac{A}{2} \cdot 2R \sin \frac{A}{2}}{a \cdot R^2}$$

$$= \frac{8(b+c)R \sin^3 \frac{A}{2}}{2R \sin A} = 2(b+c) \cdot \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$= 2(b+c) \sin \frac{A}{2} \tan \frac{A}{2}。$$

$$\text{同理有 } \ell_B = 2(a+c) \sin \frac{B}{2} \tan \frac{B}{2}, \ell_C = 2(a+b) \sin \frac{C}{2} \tan \frac{C}{2}。$$



圖四

利用【定理二】的結果，我們可以得到以下類似於旁切圓的一些性質：

推論一：設 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 分別是 $\triangle ABC$ 中以 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的角平分線為對稱軸之三個旁切拋物線，其正焦弦長分別為 ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C ，則

$$(1) \ell_A \ell_B \ell_C = \frac{4r^2}{R} \times \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}。$$

$$(2) \ell_A^2 + \ell_B^2 + \ell_C^2 = \frac{r^3}{R} \left[\frac{a(b+c)^2}{(s-a)^3} + \frac{b(a+c)^2}{(s-b)^2} + \frac{c(a+b)^2}{(s-c)^3} \right]。$$

(其中 r = 三角形內切圓半徑， R = 三角形外接圓半徑， $s = \frac{a+b+c}{2}$)

證明：

$$(1) \because \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}, \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\therefore \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{\Delta^2}{sabc} = \frac{\Delta}{4Rs} = \frac{r}{4R}。$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}, \tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b}, \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r^2}{\Delta} = \frac{r}{s}, \text{ 其中 } \Delta = \text{ 三角形面積 }。$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \ell_A \ell_B \ell_C &= 8(a+b)(b+c)(c+a) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \\ &= 8(a+b)(b+c)(c+a) \times \frac{r}{4R} \times \frac{r}{s} = \frac{4r^2}{R} \times \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \ell_A^2 &= 4(b+c)^2 \sin^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{A}{2} \\ &= 4(b+c)^2 \frac{(s-c)(s-b)}{bc} \left(\frac{r}{s-a} \right)^2 \\ &= \frac{4r^2(b+c)^2(s-c)(s-b)}{bc(s-a)^2} \\ &= \frac{4 \frac{\Delta^2}{s^2} (b+c)^2 \frac{\Delta^2}{s(s-a)}}{bc(s-a)^2} \\ &= \frac{4(b+c)^2 \Delta^4}{bc(s-a)^3 s^3} \\ &= \frac{4(b+c)^2 \Delta^4}{\frac{2\Delta}{\sin A} (s-a)^3 s^3} \\ &= \frac{2(b+c)^2 \Delta^3 \sin A}{(s-a)^3 s^3} \\ &= \frac{2(b+c)^2 r^3 \sin A}{(s-a)^3} = \frac{a(b+c)^2 r^3}{R(s-a)^3}。 \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \ell_B^2 = \frac{b(a+c)^2 r^3}{R(s-b)^3}, \ell_C^2 = \frac{c(a+b)^2 r^3}{R(s-c)^3}$$

$$\therefore \ell_A^2 + \ell_B^2 + \ell_C^2 = \frac{r^3}{R} \left[\frac{a(b+c)^2}{(s-a)^3} + \frac{b(a+c)^2}{(s-b)^3} + \frac{c(a+b)^2}{(s-c)^3} \right]。$$

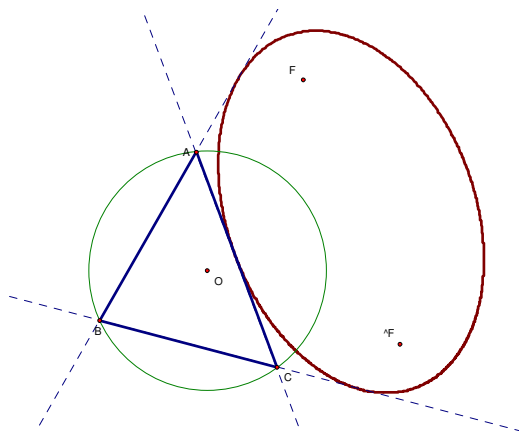
第四部份、三角形的旁切橢圓與旁切雙曲線的作圖及相關性質

在作三角形 ABC 的旁切拋物線時，其焦點 F 是在三角形的外接圓 O 上。如果焦點 F 不在外

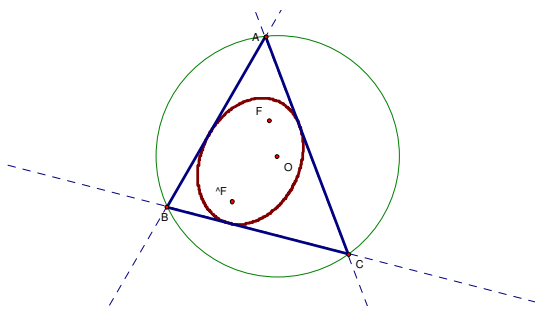
接圓 O 上時，結果會怎樣呢？此時 F 對於直線 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{BC} 、 \overrightarrow{CA} 的三對稱點 F'_1, F'_2, F'_3 並不共線，利用這個對稱點 $\triangle F'_1 F'_2 F'_3$ ，我們有以下的結果：

設 $\triangle F'_1 F'_2 F'_3$ 的外接圓圓心為 \hat{F} ，半徑為 R' ，在 $\angle A$ 所張的區域內（ $\angle B, \angle C$ 同理）：

一、若 F 在外接圓 O 外時，則以 F, \hat{F} 為兩焦點、 R' 為長軸長的橢圓為 $\triangle ABC$ 的旁切橢圓。

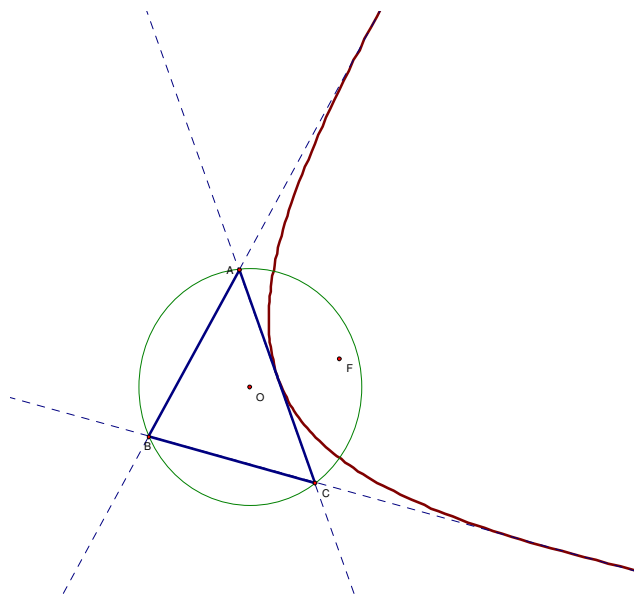


二、若 F 在 $\triangle ABC$ 內，則以 F, \hat{F} 為兩焦點、 R' 為長軸長的橢圓為 $\triangle ABC$ 的內切橢圓。

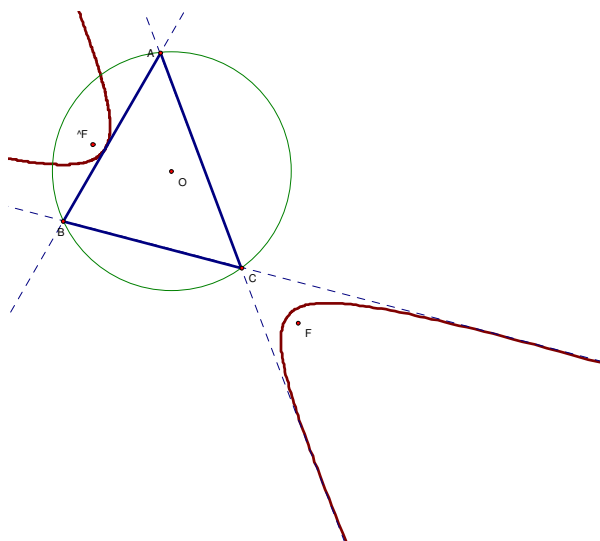


三、若 F 在外接圓 O 內、 $\triangle ABC$ 外，則以 F, \hat{F} 為兩焦點、 R' 為實軸長的雙曲線有以下兩種結果：

(一)雙曲線皆與 $\triangle ABC$ 的三邊延長線 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{BC} 、 \overrightarrow{CA} 切於同一支上，此雙曲線為 $\triangle ABC$ 的旁切雙曲線。

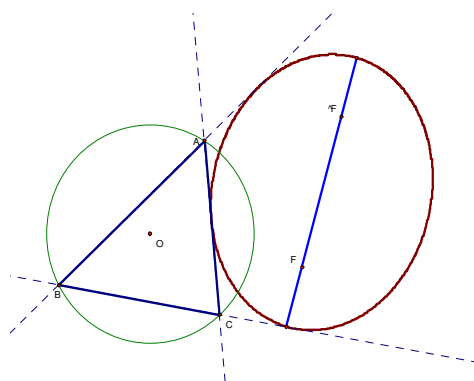


(二)雙曲線仍然與 $\triangle ABC$ 的邊(或其延長線)相切,但切點並非都位於同一支上。



【定理三】若 Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切橢圓(雙曲線),則長軸長(貫軸長) $= \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}{|d^2 - R^2|}$ 。

(其中 F 為旁切橢圓(雙曲線)的一焦點, O 為三角形 $\triangle ABC$ 外接圓圓心, $d = \overline{FO}$)



證明：

如右圖,令 F_1, F_2, F_3 分別為 F 到 $\triangle ABC$ 三邊

的垂足, F'_1, F'_2, F'_3 分別為對稱點。

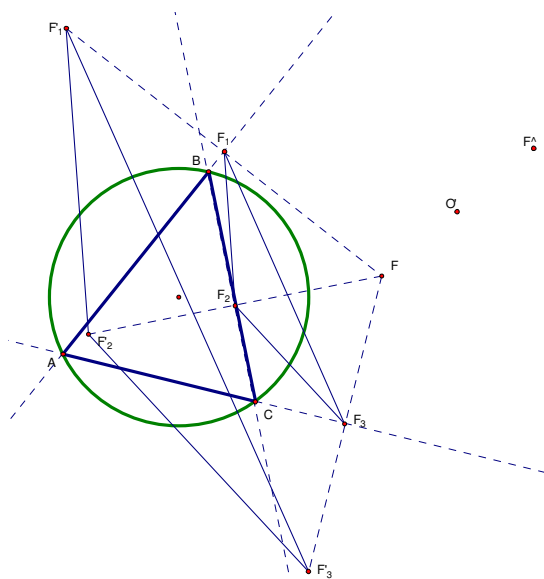
$$\therefore \overline{FF_1} = \frac{1}{2} \overline{FF'_1}, \quad \overline{FF_3} = \frac{1}{2} \overline{FF'_3},$$

$$\therefore \overline{F_1F_3} = \frac{1}{2} \overline{F'_1F'_3}, \quad \text{同理有 } \overline{F_2F_3} = \frac{1}{2} \overline{F'_2F'_3},$$

$$\overline{F_1F_2} = \frac{1}{2} \overline{F'_1F'_2}, \quad \text{故 } \triangle F_1F_2F_3 \sim \triangle F'_1F'_2F'_3,$$

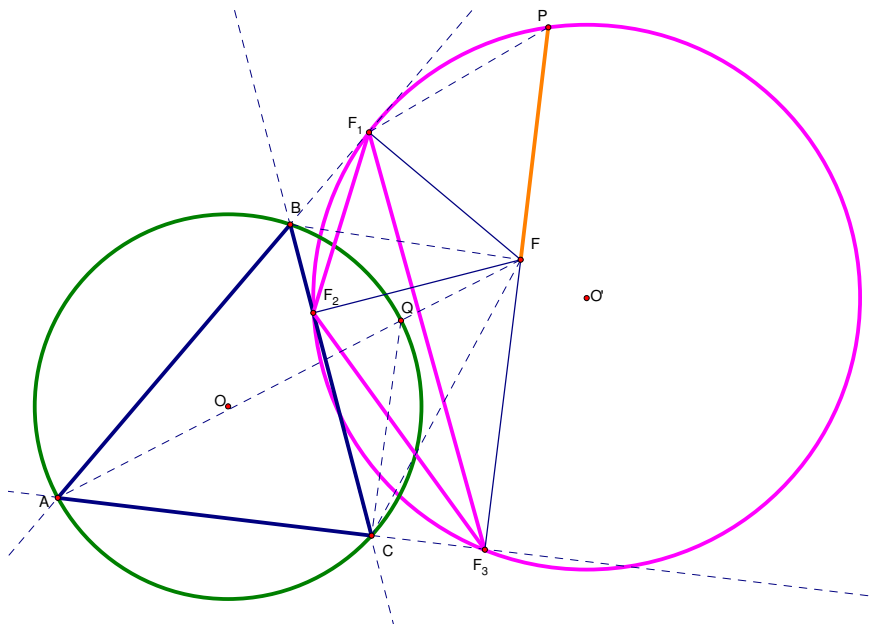
所以

$$(\text{旁切橢圓長軸長}) = (\triangle F'_1F'_2F'_3 \text{ 的外接圓半徑}) = (\triangle F_1F_2F_3 \text{ 的外接圓直徑})。$$



【定理四】若 Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切橢圓（雙曲線），則

$$\text{短軸長（共軛軸長）的平方} = \frac{8R \cdot \overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{|d^2 - R^2|}。$$



證明：

我們先證明 $\triangle F_1F_2F_3$ 的外心 O' 為 $\triangle F_1'F_2'F_3'$ 的外心 \widehat{F} 與 F 的中點：

如右圖，假設 Q, P 分別為 $\overline{F_1F_2}, \overline{F_1'F_2'}$ 的中點，連 \overline{PF} ，因為 \widehat{F} 為 $\triangle F_1'F_2'F_3'$ 的外心，故 \overline{PF} 為 $\overline{F_1'F_2'}$ 的中垂線。作 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線 \overline{QM} 交 \overline{PF} 於 M 點。

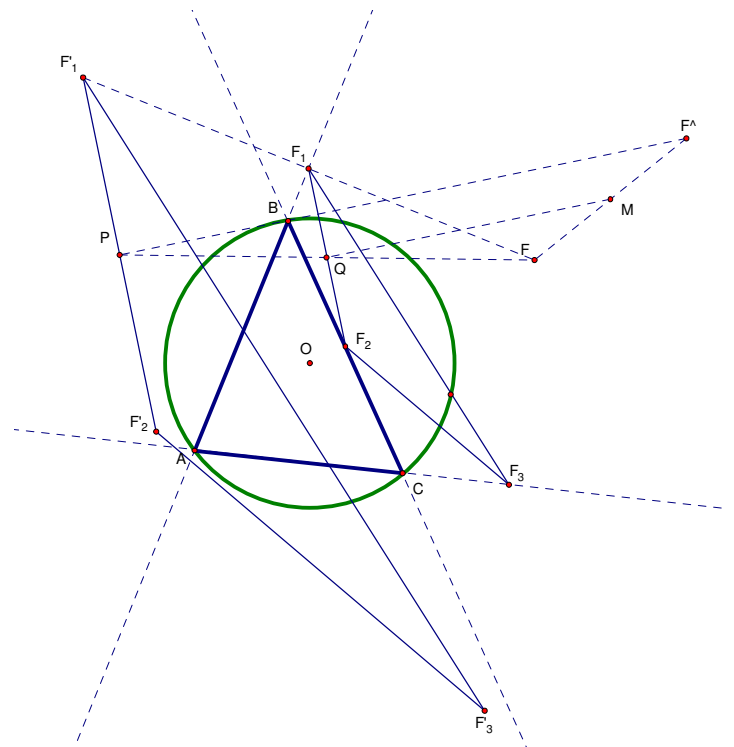
因 $\triangle F_1F_2F_3 \sim \triangle F_1'F_2'F_3'$ ，故 Q 為 \overline{FP} 的中點。

另一方面， $\overline{PF} \parallel \overline{QM}$ ，

從而有 M 為 $\overline{F\widehat{F}}$ 的中點。

同理， $\overline{F_2F_3}, \overline{F_3F_1}$ 的中垂線亦通過 M 點，

故 $M = O'$ 。



令 P 點為 $\overline{FF_3}$ 與圓 O' 的交點、連接 \overline{FA} 交圓 O 於 Q 點，則

$$\left(\frac{1}{2} \text{短軸長}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \text{長軸長}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \text{焦距}\right)^2 = (\text{圓}O' \text{的半徑})^2 - \overline{O'F}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{FF_3} \times \overline{FP} && (\text{圓幕性質}) \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin \angle FF_1P}{\sin \angle F_1PF} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin(\angle F_2F_1P - \angle F_2F_1F)}{\sin(\pi - \angle F_1F_2F_3)} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin(\pi - \angle F_2F_3P - \angle F_2F_1F)}{\sin \angle F_1F_2F_3} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin(\angle F_2F_3F + \angle F_2BF)}{\sin \angle F_1F_2F_3} && (\because FF_1BF_2 \text{ 共圓}, \therefore \angle F_2F_1F = \angle F_2BF) \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin(\angle F_2CF + \angle F_2BF)}{\sin \angle F_1F_2F_3} && (\because FF_2CF_3 \text{ 共圓}, \therefore \angle F_2F_3F = \angle F_2CF) \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\sin \angle F_2CF \cos \angle F_2BF + \sin \angle F_2BF \cos \angle F_2CF}{\sin \angle F_1F_2F_3} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \frac{\frac{\overline{FF_2} \times \overline{BF_2}}{\overline{FC} \times \overline{FB}} + \frac{\overline{FF_2} \times \overline{CF_2}}{\overline{FB} \times \overline{FC}}}{\sin \angle F_1F_2F_3} \\
&= \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \overline{FF_2} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{FB} \times \overline{FC} \times \sin \angle F_1F_2F_3} \circ
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
|d^2 - R^2| &= \overline{FA} \times \overline{FQ} && (\text{圓幕性質}) \\
&= \frac{\overline{FA} \times \overline{FC} \times \sin \angle QCF}{\sin \angle FQC} && (\text{由正弦定理}) \\
&= \frac{\overline{FA} \times \overline{FC} \times \sin \angle F_2F_3F_1}{\sin B} \\
&= \overline{FA} \times \overline{FC} \times \frac{2R}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{F_1F_2} \times \sin \angle F_1F_2F_3}{\overline{F_1F_3}} \circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\because \angle FQC = \pi - \angle B, \text{ 且} \\
&\angle QCF = \angle F_2CF - \angle BCQ = \angle F_2F_3F - \angle BAQ = \angle F_2F_3F - \angle F_1F_3F = \angle F_2F_3F_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore |d^2 - R^2| &= \frac{2R}{\overline{FA} \times \overline{FC} \times \overline{F_1F_2} \times \sin \angle F_1F_2F_3} \cdot \frac{\overline{AC} \times \overline{F_1F_3}}{\overline{F_1F_2} \times \sin \angle F_1F_2F_3} \\
&= \frac{\overline{AC} \times \sin A}{\overline{FC} \times \overline{F_1F_2} \times \sin \angle F_1F_2F_3} && (\because FF_3AF_1 \text{ 共圓}, \text{ 且 } \overline{FA} \text{ 爲直徑}, \therefore \sin A = \frac{\overline{F_1F_3}}{\overline{FA}}) \\
&= \frac{1}{\sin \angle F_1F_2F_3 \times \overline{FC}} \times \frac{\overline{AC} \times \sin A}{\overline{FB} \times \sin B} && (\because FF_1BF_2 \text{ 共圓}, \therefore \sin B = \sin(\pi - B) = \frac{\overline{F_1F_2}}{\overline{FB}}) \\
&= \frac{1}{\sin \angle F_1F_2F_3 \times \overline{FC}} \times \frac{2R \times \sin B \times \frac{\overline{BC}}{2R}}{\overline{FB} \times \sin B} && (\text{由正弦定理}) \\
&= \frac{1}{\sin \angle F_1F_2F_3 \times \overline{FC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{FB}}
\end{aligned}$$

$$\text{於是} \left(\frac{1}{2} \text{短軸長}\right)^2 = \overline{FF_3} \times \overline{FF_1} \times \overline{FF_2} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{FB} \times \overline{FC} \times \sin \angle F_1 F_2 F_3} = \frac{2R \cdot \overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{|d^2 - R^2|}$$

$$\text{即} (\text{短軸長})^2 = \frac{8R \cdot \overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{|d^2 - R^2|} .$$

根據【定理三】和【定理四】的結果，我們可以得到以下的推論：

推論二：若 Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切橢圓（雙曲線），則其正焦弦長 $= 8R \times \frac{\overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}$ 。

證明：

$$\begin{aligned} \text{正焦弦長} &= \frac{(\text{短軸長})^2}{\text{長軸長}} \\ &= \frac{8R \cdot \overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{|d^2 - R^2|} \\ &= \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}{|d^2 - R^2|} \\ &= 8R \times \frac{\overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}} . \end{aligned}$$

伍、研究結果

一、若 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R ， Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切拋物線，

$$\text{則}\Gamma\text{的正焦弦長} = \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}{R^2} .$$

二、設 $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ 分別是 $\triangle ABC$ 中以 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的角平分線為對稱軸之三個旁切拋物線，其正焦弦長分別為 l_A, l_B, l_C ，則

$$l_A = 2(b+c) \sin \frac{A}{2} \tan \frac{A}{2}, \quad l_B = 2(a+c) \sin \frac{B}{2} \tan \frac{B}{2}, \quad l_C = 2(a+b) \sin \frac{C}{2} \tan \frac{C}{2}, \quad \text{且}$$

$$(一) \quad l_A l_B l_C = \frac{4r^2}{R} \times \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}$$

$$(二) \quad l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 = \frac{r^3}{R} \left[\frac{a(b+c)^2}{(s-a)^3} + \frac{b(a+c)^2}{(s-b)^2} + \frac{c(a+b)^2}{(s-c)^3} \right]$$

三、若 Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切橢圓（雙曲線），則長軸長（貫軸長） $= \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}{|d^2 - R^2|}$ 。（其中 F 為

旁切橢圓（雙曲線）的一焦點， O 為三角形 $\triangle ABC$ 外接圓圓心， $d = \overline{FO}$ ）

四、若 Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切橢圓(雙曲線),則短軸長(共軛軸長)的平方 $= \frac{8R \cdot \overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{|d^2 - R^2|}$ 。

五、若 Γ 為 $\triangle ABC$ 的旁切橢圓(雙曲線),則其正焦弦長 $= 8R \times \frac{\overline{FF_1} \cdot \overline{FF_2} \cdot \overline{FF_3}}{\overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}}$ 。

陸、討論與展望

- 一、研究正焦弦長最大時的旁切拋物線 Γ 與 $\triangle ABC$ 的關係。
- 二、利用所作出的旁切拋物線 Γ ,我們想進一步研究切點三角形、原三角形與旁切拋物線之關係。
- 三、繼續研究特定的旁切橢圓或特定的旁切雙曲線的相關性質。

柒、參考資料

1. 趙文敏, 三切線可決定多少拋物線, 科學教育月刊, 第 283 期(2005), p.51-61.
2. 單墀, 數學名題詞典, 江蘇教育出版社, 2002.
3. Ross Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA, September 5, 1996
4. 94 年大學入學指考數學甲試題
5. <http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk3/gc-01/9/7.html>
6. <http://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html>
7. 龍騰高中數學課本第四冊

