中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040420

點分天下

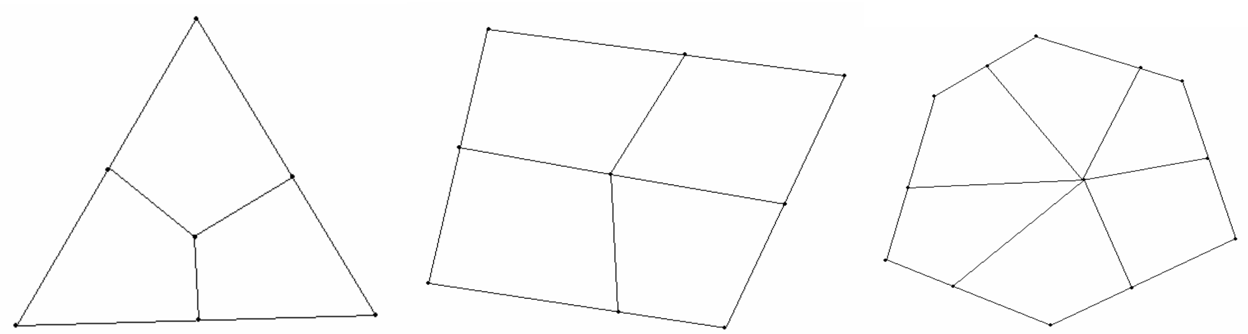
學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者：	指導老師：
高二 許宸碩 高二 陳泓志 高二 張舜嵐	戴武郎

關鍵詞：　面積等分點

壹、摘要

簡單的說，我們是要在三角形、四邊形或凸多邊形的內部找一點 P，使得 P 連接到各邊上給定的點後，即可等分面積。概念如下圖：



不過由於多邊形難度較高，因此我們從三角形或四邊形開始。而邊上找的點則先由中點開始。

貳、研究動機

某天，老師在專題課時給我們歷屆的數學題目來做，結果其中有一題讓我們特別感興趣(82 年 東區數學能力競賽)：

> 在已知三角形 ABC 之三邊 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 上分別取 D , E , F 三點，其中 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1$, $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{3}{2}$ 。試問在△ABC 內部是否可以找到一點 P 使得 $\overline{PD}$, $\overline{PE}$, $\overline{PF}$ 三等分△ABC 之面積？又若 P 點存在，則應如何決定其位置？

算出了這題目，我們開始想著：「如果三邊上的三點不是在這些位置，那面積等分點會在哪呢？」就這樣，我們開始研究這個題目。

参、研究目的

一、在任意三角形的內部找一點 P ，使 P 點至△ABC 三個邊上給定的點之連線可等分三角形的面積。

二、除了三角形外，看四邊形、五邊形甚至多邊形有沒有此點。

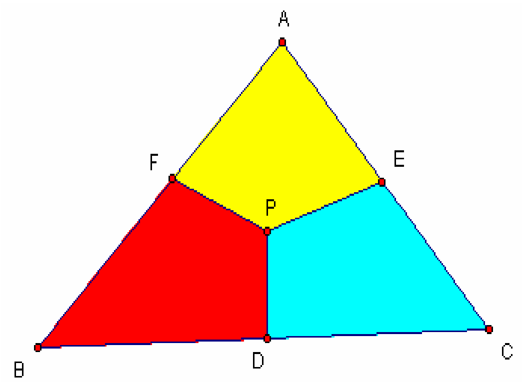
肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP、小畫家、MathType、Microsoft word

伍、研究過程或方法

我們將問題擴大到如此：

在△ABC 之三邊 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 上分別取 D , E , F 三點，是否能在三角形內部找出一點 P，使 $\overline{PD}$, $\overline{PE}$, $\overline{PF}$ 三等分△ABC 之面積？



一、想法與預備定理

一開始，我們的想法很單純：尋找直線 $L_1 // \overline{FD}$ 且 L_1 上任一點與 D 、 F 點連接所形成的四邊形(不管是凹是凸)面積為 $\frac{1}{3}\Delta\mathrm{ABC}$ ，再找另一條直線 $L_2 // \overline{DE}$ 且 L_2 上任一點與 D 、 E 點連接所形成的四邊形面積也是 $\frac{1}{3}\Delta\mathrm{ABC}$ ，則這兩條直線的交點 P 正是我們所要求的。

【引理】

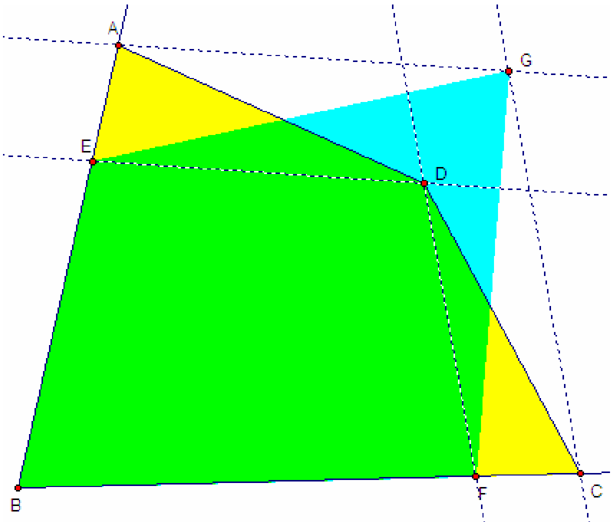
在 $\square ABCD$ 中， E 、 F 分別在 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 邊或其延長線上，作 $\overline{AG} // \overline{ED}$ 、 $\overline{CG} // \overline{FD}$ ，
則 $\square BEGF = \square ABCD$ 。

證明：

Case1： E 、 F 皆在邊上

因 $\Delta GED = \Delta AED$ ， $\Delta GDF = \Delta CDF$ (同底等高)

$\therefore \square BEGF = \square BEDF + \Delta GED + \Delta GDF = \square BEDF + \Delta AED + \Delta CDF = \square ABCD$ 。

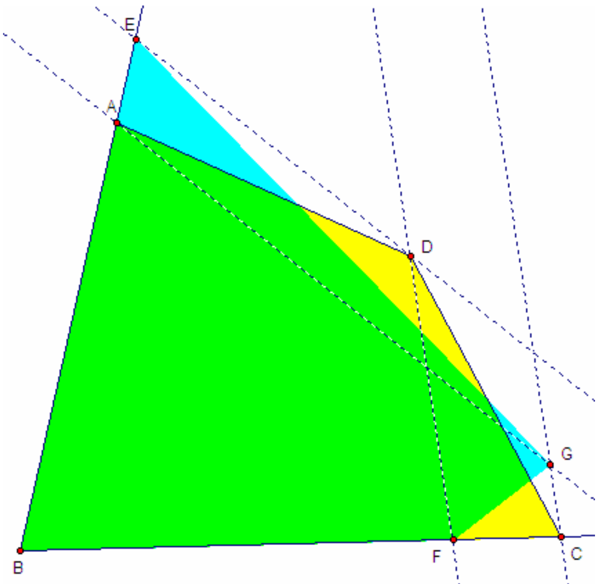


Case2：其中一點在邊上，另一點在邊的延長線上(不失一般性，我們假設 E 在 $\overline{AB}$ 的延長線上)

因 $\Delta GED = \Delta AED$ ， $\Delta GCF = \Delta GCD$ (同底等高)

$\therefore \square BEGF =$ 五邊形 $BEDGC - \Delta GED - \Delta GCF =$ 五邊形 $BEDGC - \Delta AED - \Delta GCD$

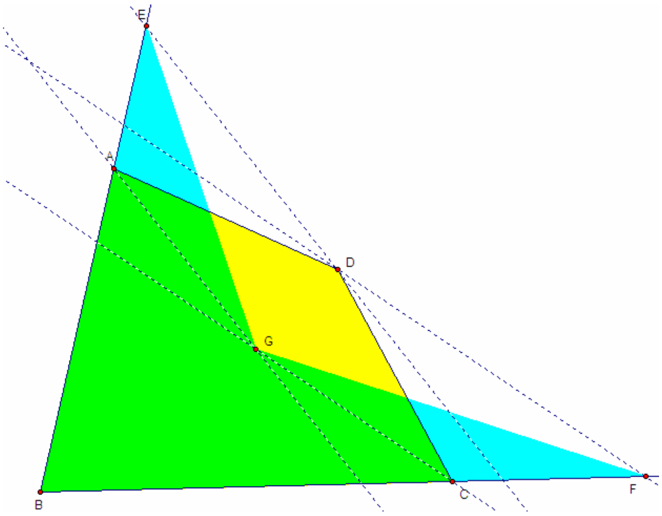
$= \square ABCD$ 。



Case3：兩點都在邊的延長線上

因$\Delta GAE = \Delta GAD$ ，$\Delta GCF = \Delta GCD$ (同底等高)

$\therefore \square BEGF = \square BAGC + \Delta GAE + \Delta GCF = \square BAGC + \Delta GAD + \Delta GCD = \square ABCD$



狀況僅此三種，而三種狀況皆成立，所以引理成立。

二、找出三角形面積等分點

【定理一】

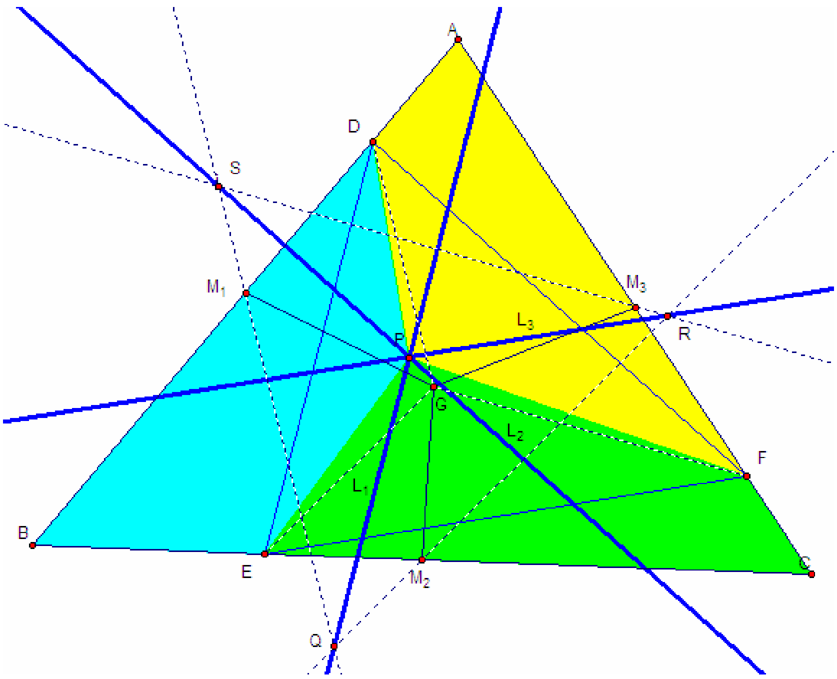
ΔABC中，D、E、F分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$上的任意點，M_1、M_2、M_3分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$上的中點，G為重心。

1.作$\overleftrightarrow{M_1Q} // \overline{GD}$ ，$\overleftrightarrow{M_2Q} // \overline{GE}$ ，兩者交於Q點；

2.過Q作$L_1 // \overline{DE}$ ；

3.同理，作$\overleftrightarrow{M_2R} // \overline{GE}$ ，$\overleftrightarrow{M_3R} // \overline{GF}$ ，兩者交於R點(Q、M_2、R在同一條直線上)
過R作$L_2 // \overline{EF}$ ，L_1、L_2交於P點。

則$\square ADPF = \square BEPD = \square CFPE = \frac{1}{3}\Delta ABC$。(另外，用同樣方法作出$L_3$，則$L_3$一樣通過$P$點)



證明：

由引理可得知$\square M_1BM_2G = \square BEQD$

因$L_1 // \overline{DE} \Leftrightarrow \Delta PED = \Delta QED$，$\therefore \square BEPD = \Delta BED + \Delta PED = \Delta BED + \Delta QED = \square BEQD$

$= \square M_1BM_2G = \dfrac{1}{3}\Delta\mathrm{ABC}$。

同理可推得$\square CM_2GM_3 = \square CFRE = \square CFPE = \dfrac{1}{3}\Delta\mathrm{ABC}$，

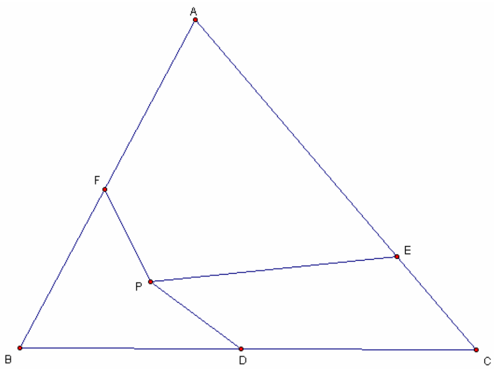
最後，$\square ADPF = \Delta\mathrm{ABC} - \square BEQD - \square CFPE = \dfrac{1}{3}\Delta\mathrm{ABC}$。a

所以，$\square ADPF = \square BEPD = \square CFPE = \dfrac{1}{3}\Delta\mathrm{ABC}$。

三、三等分面積的推廣形式

我們將問題延伸成如此：

如右圖，有一ΔABC，D、E、F爲$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$上的任意點，現在我們在內部找一點P，使$\square AEPF$ ：$\square BDPF$ ：$\square CDPE$ $= \alpha$ ：β ：γ



【引理一】(右下圖)：

如圖，Q點爲$\overline{BC}$上給定的點，

$\overline{BM_1}$ ：$\overline{BC} = \alpha$ ：β

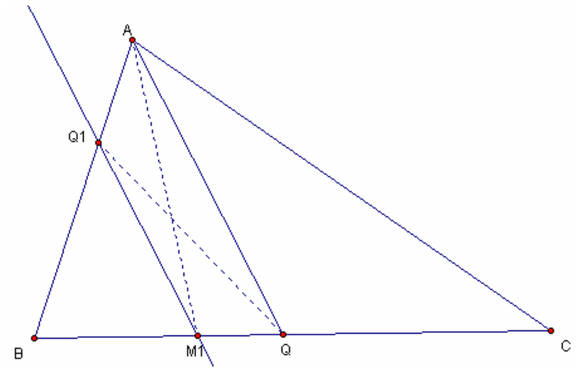
作$\overline{M_1Q_1} // \overline{AQ}$交$\overline{AB}$於$Q_1$，

則ΔBQQ_1面積$= \dfrac{\alpha}{\beta}\Delta ABC$。

證明：

因爲$\Delta BAM_1 = \dfrac{\alpha}{\beta}\Delta ABC$

且$\Delta AQ_1M_1 = \Delta QQ_1M_1$(同底等高)



$\therefore \Delta BQQ_1 = \Delta BQ_1M_1 + \Delta QQ_1M_1 = \Delta BQ_1M_1 + \Delta AQ_1M_1 = \Delta BAM_1 = \dfrac{\alpha}{\beta}\Delta ABC$。

【引理二】(右圖)：

如圖，Q點爲$\overline{BC}$上給定的點，$\overline{BM_1}$ ：$\overline{BC} = \alpha$ ：β

作$\overline{M_1Q_1} // \overline{AQ}$交$\overleftrightarrow{AB}$於$Q_1$，則$\Delta BQQ_1$面積$= \dfrac{\alpha}{\beta}\Delta ABC$。

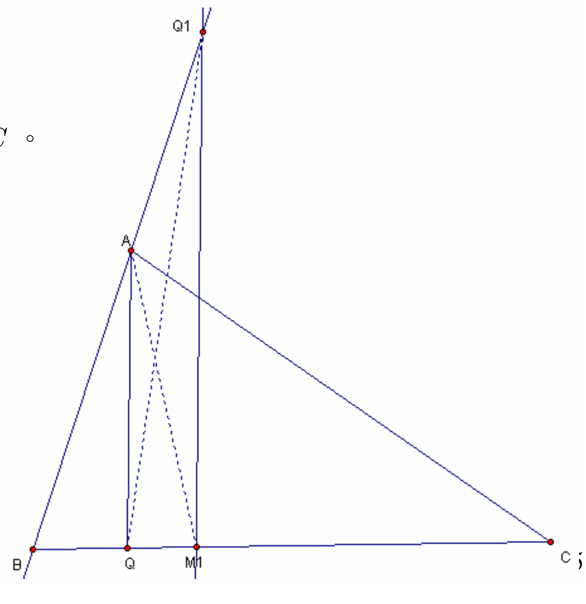
證明：

已知$\Delta BAM_1 = \dfrac{\alpha}{\beta}\Delta ABC$(同高時面積比等於底長比)

$\Delta AQM_1 = \Delta AQQ_1$(同底等高)

$\therefore \Delta BQQ_1 = \Delta BAQ + \Delta AQQ_1 = \Delta BAQ + \Delta AQM_1$

$= \Delta BAM_1 = \dfrac{\alpha}{\beta}\Delta ABC$。



利用這兩個引理，我們可得到下列推廣的面積等分點：

【定理二】

1.以B爲中心，作分點M_2、M_3，使$\overline{BM_2}$：$\overline{AB}=\overline{BM_3}$：$\overline{BC}=\beta$：$\alpha+\beta+\gamma$。

2.再以C爲中心，作分點M_4、M_5，使$\overline{CM_4}$：$\overline{BC}=\overline{CM_5}$：$\overline{AB}=\gamma$：$\alpha+\beta+\gamma$

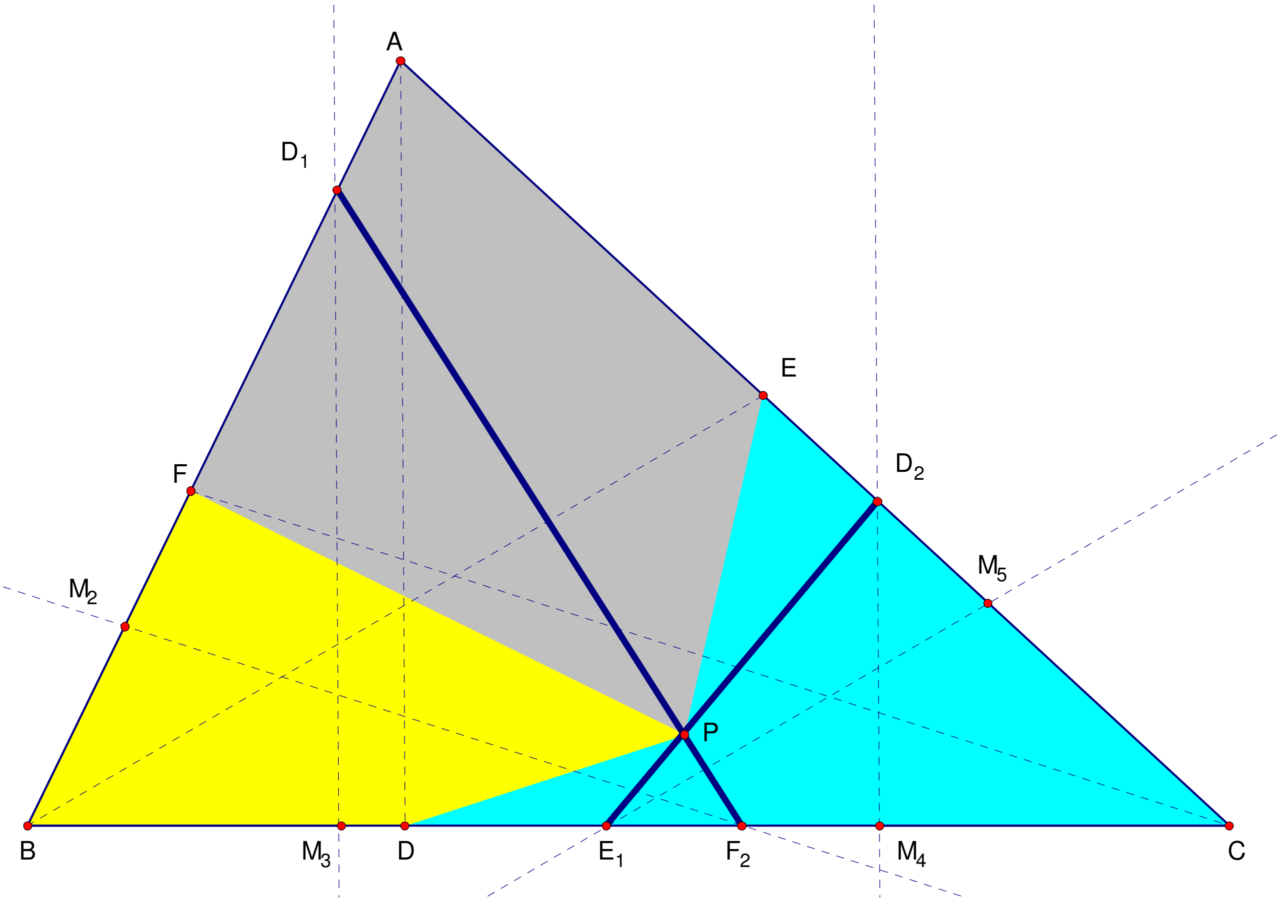
3.連$\overline{AD}$，過M_3、M_4作$\overline{D_1M_3}$、$\overline{D_2M_4}\,//\,\overline{AD}$，$\overline{D_1M_3}$交$\overleftrightarrow{AB}$於$D_1$，$\overline{D_2M_4}$交$\overleftrightarrow{CA}$於$D_2$。

4.連$\overline{CF}$，過M_2作$\overline{F_2M_2}\,//\,\overline{CF}$，$\overline{F_2M_2}$交$\overleftrightarrow{BC}$於$F_2$

5.連$\overline{BE}$，過M_5作$\overline{E_1M_5}\,//\,\overline{BE}$，$\overline{E_1M_5}$交$\overleftrightarrow{BC}$於$E_1$

6.連$\overline{D_1F_2}$、$\overline{D_2E_1}$，兩線交於P點。

則$\square AEPF$：$\square BDPF$：$\square CDPE$ $=\alpha$：β：γ。



證明：

由引理知$\Delta BDD_1=\Delta BFF_2=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\Delta ABC \Rightarrow \Delta DFD_1=\Delta DFF_2 \Rightarrow \overline{DF}\,//\,\overline{D_1F_2}$

$\Delta CEE_1=\Delta CDD_2=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\Delta ABC \Rightarrow \Delta D_2E_1E=\Delta D_2E_1D \Rightarrow \overline{DE}\,//\,\overline{D_2E_1}$

所以，$\Delta DFP=\Delta DFD_1=\Delta DFF_2$。

也就是說$\square BDPF=\Delta BDF+\Delta DFP=\Delta BDF+\Delta DFF_1=\Delta BDD_1=\Delta BFF_2=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\Delta ABC$。

同理，我們可得知$\square CDPE=\Delta CEE_1=\Delta CDD_2=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\Delta ABC$

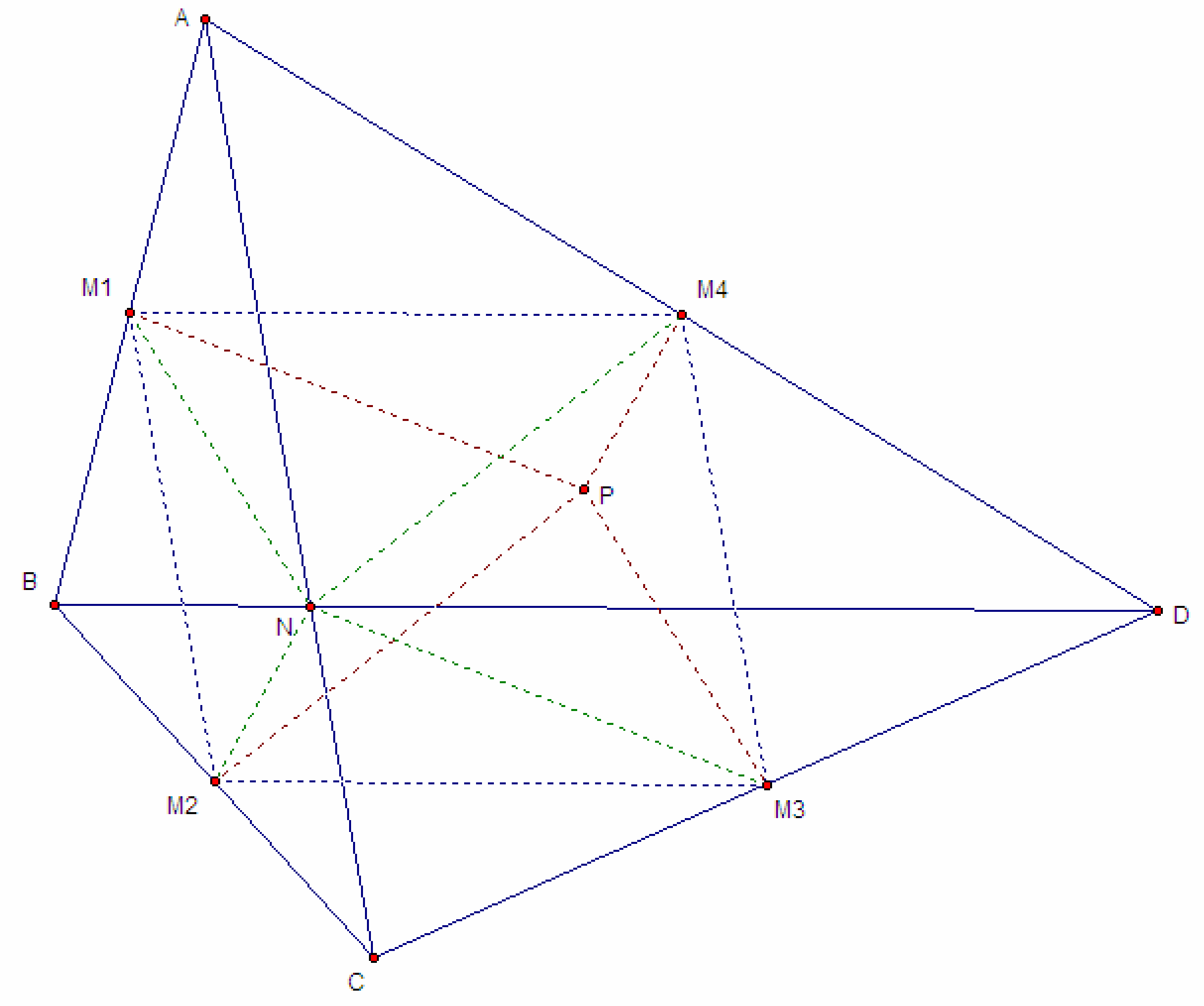
最後，$\square AEPF=\Delta ABC-\square BDPF-\square CDPE=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\Delta ABC$，得証。

四、四邊形的面積等分點

另外，利用前面的方法，我們找到了四邊形中點對應的面積等分點，
如下：

【定理三】

平面上已知M_1、M_2、M_3、M_4爲$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$中點，設N爲$\overline{AC}$、$\overline{BD}$交點，
從M_1點作平行$\overline{NM_3}$且等長之線段，設P點爲其端點，則P滿足：
$\overrightarrow{NM_4}=\overrightarrow{M_2P}$，$\overrightarrow{NM_1}=\overrightarrow{M_3P}$，$\overrightarrow{NM_2}=\overrightarrow{M_4P}$，$\overrightarrow{NM_3}=\overrightarrow{M_1P}$，且$P$爲面積等分點。
即$\square AM_1PM_4=\square BM_2PM_3=\square CM_2PM_3=\square DM_3PM_4=\frac{1}{4}\square ABCD$。



證明：
因$\overrightarrow{NM_3}=\overrightarrow{M_1P}$且$\overrightarrow{M_2M_1}=\overrightarrow{M_3M_4}\Rightarrow\overrightarrow{NM_4}=\overrightarrow{NM_3}+\overrightarrow{M_3M_4}=\overrightarrow{M_2P}$，即$\Delta NM_4PM_2$爲平行四邊形。
因$\overrightarrow{PM_1}=\overrightarrow{M_3N},\overrightarrow{PM_4}=\overrightarrow{M_2N},\overrightarrow{M_4M_1}=\overrightarrow{M_3M_2}\Rightarrow\Delta NM_2M_3\cong\Delta PM_1M_4(SSS)$
又知M_2、M_3爲$\overline{BC}$、$\overline{CD}$中點
$\therefore\Delta PM_1M_4=\Delta NM_2M_3=\frac{1}{4}\Delta CBD$
所以$\square AM_1PM_4=\Delta AM_1M_4+\Delta M_1M_4P=\Delta AM_1M_4+\Delta CM_2M_3=\frac{1}{4}\square ABCD$。
同理，$\square BM_2PM_3=\square CM_2PM_3=\square DM_3PM_4=\frac{1}{4}\square ABCD$。

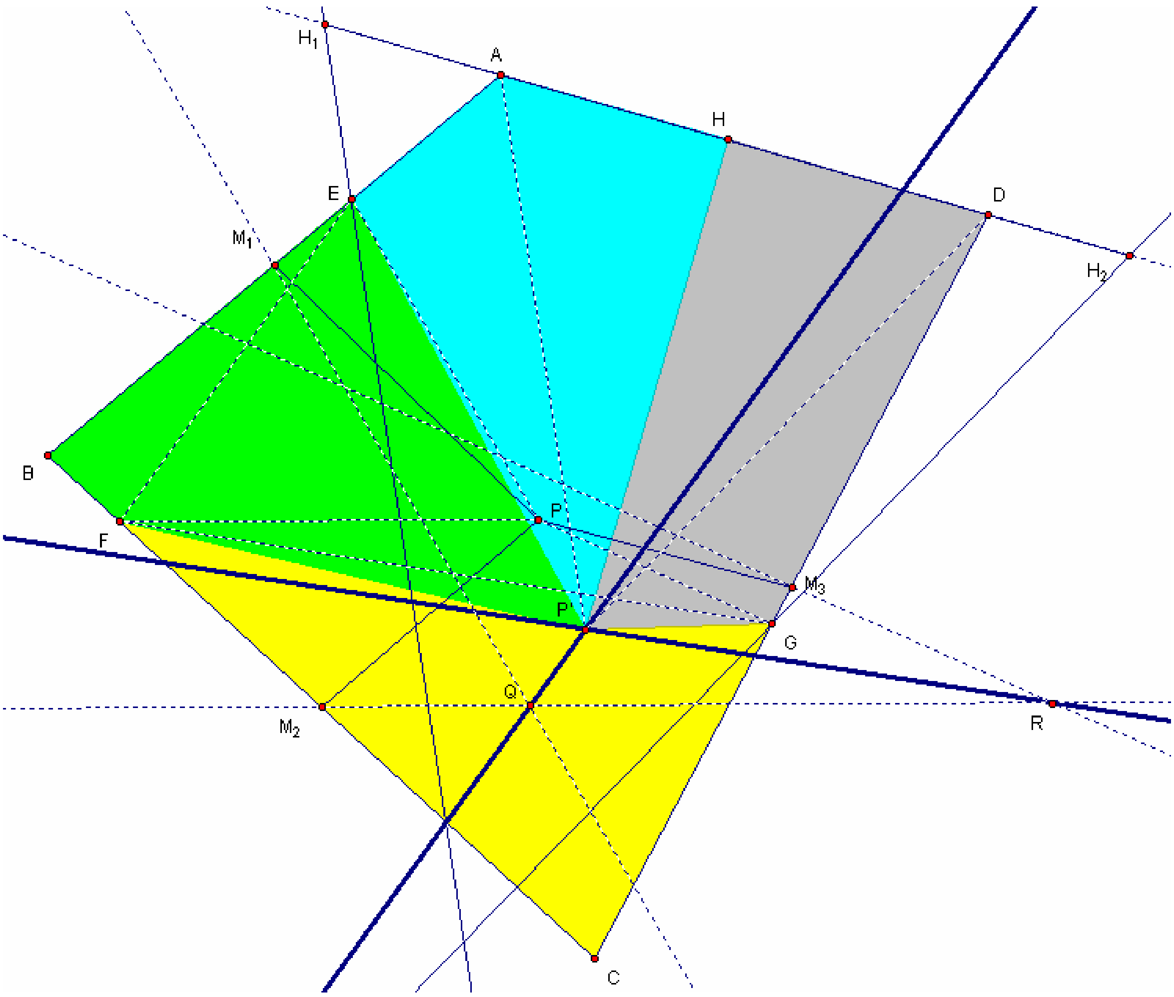
利用定理三及引理，我們可以得到任意點的四邊形面積等分點作法。

【定理四】

設 M_1 、 M_2 、 M_3 爲 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 邊上中點， E 、 F 、 G 爲 $\square ABCD$ 中 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 邊上任意點。則

1.可找到一點 P' ，使得 $\square EBFP' = \square GCFP' = \frac{1}{4}\square ABCD$

2.可在 $\overline{AD}$ 上找一點 H ，使得 $\square GDHP' = \square EAHP' = \frac{1}{4}\square ABCD$



【作法】:

由定理一，令 P 爲四邊形內部一點，符合 $\square BM_1PM_2 = \square CM_2PM_3 = \frac{1}{4}\square ABCD$ 。

1. P' 點作法

(1) 作 $\overline{M_1Q} // \overline{PE}$ 、 $\overline{M_2Q} // \overline{PF}$ ，兩者交於 Q 點

(2) 過 Q 作 $L_1 // \overline{EF}$

(3) 作 $\overline{M_3R} // \overline{PG}$ 、 $\overline{M_2R} // \overline{PF}$ (M_2 、 Q 、 R 在同一條線上)，兩者交於 R 點

(4) 過 R 作 $L_2 // \overline{FG}$

(5) L_1 、 L_2 交於 P' ，則 P' 即爲所求

2. H 點作法

(1) 作$\overline{EH_1} \parallel \overline{P'A}$交$\overleftrightarrow{AD}$於$H_1$、$\overline{GH_2} \parallel \overline{P'D}$交$\overleftrightarrow{AD}$於$H_2$
(2) 取$\overline{H_1H_2}$中點H，則H即為所求

證明：

因$\overline{M_1Q} \parallel \overline{PE}$、$\overline{M_2Q} \parallel \overline{PF}$，由最前面的引理可得知$\square EBFQ = \square M_1BM_2Q = \frac{1}{4}\square ABCD$

因$L_1 \parallel \overline{EF} \Leftrightarrow \Delta P'EF = \Delta QEF \Leftrightarrow \square EBFP' = \square EBFQ = \frac{1}{4}\square ABCD$

同理，我們可得知$\square GCFP' = \frac{1}{4}\square ABCD$。

因$\overline{P'A} \parallel \overline{EH_1} \Leftrightarrow \Delta P'AE = \Delta P'AH_1$，$\overline{P'D} \parallel \overline{GH_2} \Leftrightarrow \Delta P'DG = \Delta P'DH_2$

H為$\overline{H_1H_2}$中點$\Leftrightarrow \Delta P'HH_1 = \Delta P'HH_2$

$\therefore \Delta P'HH_1 = \Delta P'AH + \Delta P'AH_1 = \Delta P'AH + \Delta P'AE = \square EAHP'$

$\Delta P'HH_2 = \Delta P'DH + \Delta P'DH_2 = \Delta P'DH + \Delta P'DG = \square GDHP'$

$\because \Delta P'HH_1 = \Delta P'HH_2 \Rightarrow \square EAHP' = \square GDHP' = \frac{1}{4}\square ABCD$。

$\therefore \square EAHP' = \square EBFP' = \square GCFP' = \square GDHP' = \frac{1}{4}\square ABCD$。

【推論】當E、G為中點時，則$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$。

證明：

因M_3為$\overline{CD}$中點$\Rightarrow \Delta CP'M_3 = \Delta DP'M_3$

又$\square CFP'M_3 = \square DHP'M_3$

$\Rightarrow \Delta CFP' = \square CFP'M_3 - \Delta CP'M_3 = \square DHP'M_3 - \Delta DP'M_3 = \Delta DHP'$

同理，$\Delta BFP' = \Delta AHP'$

$\therefore \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} = \frac{\Delta AHP'}{\Delta AHP' + \Delta DHP'} = \frac{\Delta BFP'}{\Delta BFP' + \Delta CFP'} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$，得証。

陸、研究結果

一、平面上三角形面積等分點 P 的找法。(定理一)
二、三角形的特殊等分方法(定理二)
三、四邊形四邊中點的面積等分點 P 的向量性質：
$\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{NG}, \overrightarrow{FP} = \overrightarrow{HN}, \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{NE}, \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{NF}$ (定理三)
四、四邊形四任意點時面積等分點的作法(定理四)
五、當四邊形取二對邊中點，二對邊任意點時，任意點符合$\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}$

柒、討論與展望

我們希望可以找到五邊形、六邊形……至凸多邊形的邊上中點所對應的面積等分點。只要我們可以找到，那麼我們便可以用最前面的引理及平行線的想法來作出任意點的面積等分點。另外，如同定理二，我們希望能找到四邊形的特殊等分法。

捌、參考資料及其他

[1]民國 82 年東區數學能力競賽試題
[2]龍騰高級中學數學課本 第三冊
[3]網路：http://www.mathland.idv.tw/jsp-all/equalare.htm