中華民國第四十八屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040423

多面體之外接球

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 林天心 高二 盧立穎	蔡仲彬

關鍵詞：　外接球、多面體、外心

摘要：

研究各多面體在哪些條件下才會有外接球。我們探討出以下三種類型：

一、不需要檢驗法的，某些多面體是全部皆有外接球，如：四面體、圓錐、類圓錐（請參考：**肆、研究過程**中的定義）、圓柱。

二、有些是有兩種檢驗法，檢驗它是否有外接球，二種檢驗法，只須取其中一個檢驗即可，因爲一個成立，另一個也就成立，只須選擇較易檢驗的即可，此種的有：a-類三角柱（請參考：**肆、研究過程**中的定義）、a-六面體。

三、還有一類是我們目前只找出一種檢驗法的，如：b-類三角柱（請參考：**肆、研究過程**中的定義）、類圓柱、b-六面體、四角錐。

以上的檢驗法，在數學上是屬於充分且必要的，若不滿足任一檢驗法，此多面體即沒有外接球。

壹、研究動機：

在某個巧合下，看到了一題數學題目，那題數學題便激發了我的靈感。那題是這樣的：在空間坐標系裡，證正四面體的外接球心公式（四個頂點的坐標相加除以４）。乍看之下，好像只是一題普通的證明題，但細想一下，有公式，那不就代表正四面體一定會有外接球？那除了正四面體之外的四面體是否會有外接球呢？這就引起我的好奇了，國中時證過，三角形一定會有外心，那空間中的立體圖形呢？我的腦子裡便開始思考，先從比較簡單的四面體來想，要如何才能使一個四面體有外接球呢？要如何才能使一個多面體能被剛好放入一個球中呢？

此時正好學到數學第三冊第二章：空間中的直線與平面，正可學以致用，將此時所學到的數學知識應用在此數學科展。

貳、研究目的：

一、探討出四面體在什麼條件下才能具有外接球。

二、推廣至其它多面體(如圓錐、六面體)

參、研究設備及器材：

紙、筆、電腦。

肆、研究過程

一、定義

爲了方便，我們將特殊情況之多面體定義如下：

（一）a-類三角柱：上下面爲二個三角形，側面皆爲四邊形，且上下面平行

（二）b-類三角柱：上下面爲二個三角形，側面皆爲四邊形

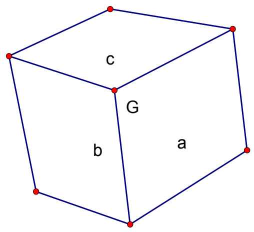
（三）類圓錐：底面爲圓，頂點不一定要在過圓心垂直底面的直線上

（四）類圓柱：上下二面皆是圓且平行，但圓大小不一定要相等

（五）六面體：在研究中的六面體是每面皆爲四邊形的六面體

（六）a-六面體：上下面爲圓內接四邊形，且兩面平行

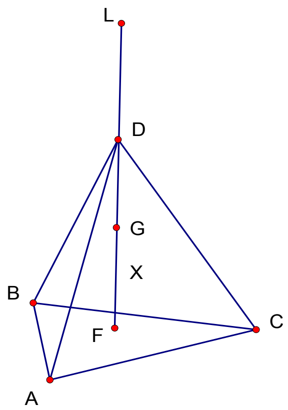
（七）b-六面體：共一點的三面皆爲圓內接四邊形，如圖：



註：Ｇ爲共點，ａｂｃ三平面爲圓內接四邊形

二、四面體與外接球之預備知識

引理 A：四面體 ABCD，D 在直線 L 上，L 過三角形 ABC 的外心（設爲 F）且垂直 ABC 平面，且 DF 要大於三角形 ABC 外心到頂點的距離，此球心在 F 與 D 點之間。



證：

L 上任意點到 ABC 三點等距(因過 ABC 外心且垂直 ABC 平面)

由 F 點往 D 方向移動 X 距離後(記此點為 G)，GD<GA

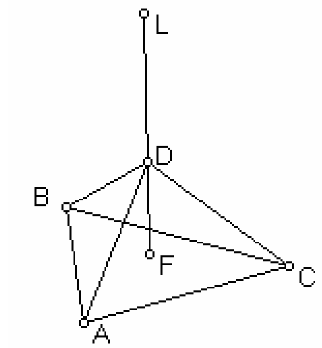
由 GD<GA 且 FD>FA

知在 GF 線段中存在一點 P，使得 PD=PA

所以 PD=PA=PB=PC

此為球心

引理Ｂ：四面體 ABCD，D 在直線 L 上，L 過三角形 ABC 的外心（設為 F）且垂直 ABC 平面，但 D 到 ABC 平面的最小距離小於三角形 ABC 外心到頂點的距離，則球心在 DF 射線上（但不在 DF 線段上）。



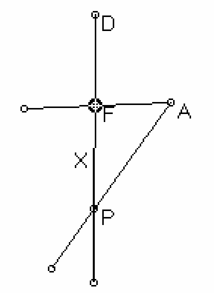
證：

L 到 ABC 三點等距(因過 ABC 外心且垂直 ABC 平面)

由於 FD<FA

球心不可能在 FD 射線上(FD 射線上任意點 O，OD＜OA)

F 點向 DF 方向移動 X(設此點為 P)，如圖



註：此圖為上圖之簡圖，只取四點（ADFP）做討論

X 可以極大使得 PA 與 X 的比值縮得很小
相對地，使得 X 與 PA 相差漸小
可取得 X 使得 X+FD>AP
由 X+FD>AP，FD<AF
知 DF 射線上存在一點 P，使得 PA=PB=PC=PD

引理 C：

給定四面體一平面為 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，且此平面上三點的外心為 (x_1,y_1,z_1)

則過此點且垂直此平面之直線方程式為 $x=x_1+a_1t_1, y=y_1+b_1t_1, z=z_1+c_1t_1$

再給定任一個其他平面的外心與平面方程式

則得直線方程式（$x=x_2+a_2t_2, y=y_2+b_2t_2, z=z_2+c_2t_2$）

若二組(x,y,z)可以相等

即 $x_2+a_2t_2=x_1+a_1t_1, y_2+b_2t_2=y_1+b_1t_1, z_2+c_2t_2=z_1+c_1t_1$

則此四面體有外接球，因為二條直線到一平面三點皆等距，所以交點至四點等距

若二組(x,y,z)無法相等

則無交點，也就是無外接球

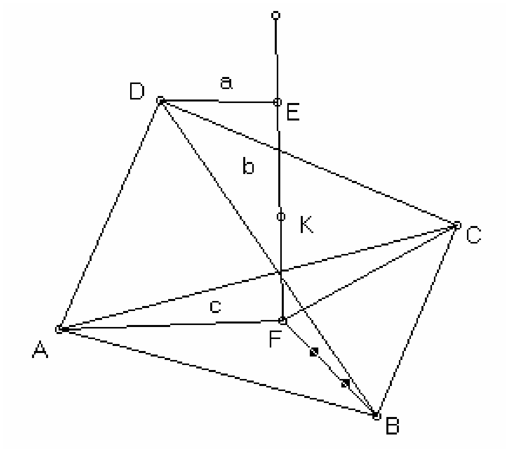
引理 C 結論：

由於 $a_1,b_1,c_1,d_1,x_1,y_1,z_1$………皆為已知，所以只需代入比對 t_1，t_2 之三列式子的關係，只要有一組不相符，則此四面體無外接球，若全部相符，則有外接球

三、據引理探討四面體

證出任一四面體皆有外接球

四面體外接球之證明一



註：Ｆ爲ＡＢＣ外心，ＤＥ垂直ＥＦ，ＥＦ垂直ＡＢＣ平面

證：

（一）

參考上圖

(1)a=c 時，球心在 b 之中點(Ｋ)

(2)a=0 時，參考引理Ａ、Ｂ，存在一點球心

(3) $\sqrt{b^2+c^2}>a>c$，球心在 EK 上

(4) $\sqrt{b^2+a^2}>c>a$，球心在 KF 上

(5)若 $c>\sqrt{b^2+a^2}$，設 $c=\sqrt{b^2+a^2}+p$，ｐ爲正數

設 M 爲 EF 射線上一点，但不在 EF 上，FM 爲 x => $DM^2=a^2+(b+x)^2$

$AM^2=c^2+x^2$ 代入 $c=\sqrt{b^2+a^2}+p$

使之相等，$a^2+(b+x)^2=a^2+b^2+2\sqrt{b^2+a^2}\,p+p^2$

$(b+x)^2=b^2+2\sqrt{b^2+a^2}\,p+p^2$

因爲 x 爲正數

$x=-b+\sqrt{b^2+2\sqrt{b^2+a^2}\,p+p^2}$

因爲 $\sqrt{b^2+2\sqrt{b^2+a^2}\,p+p^2}>\sqrt{b^2}=b$（ｐ爲正數）

x 存在且唯一(a,b,p 爲定值)

(6) $a > \sqrt{b^2 + c^2}$ 作法同上

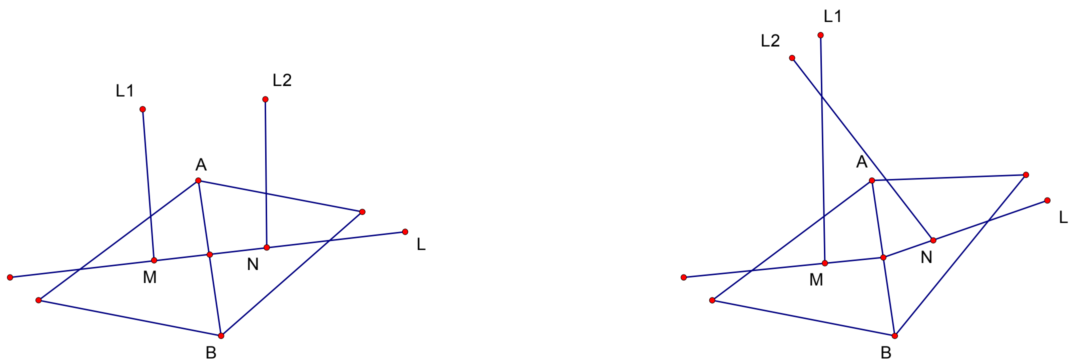
（二）

任一四面體皆無法脫出上述（一）之規定，上述之六種形式皆存在且唯一的解，所以任一四面體皆有外接球

由以上之證明，以及引理D，知四面體中，四條過三角形之外心且垂直四個平面的直線交於一點

四面體外接球之證明二

第二種證明法



說明：左圖爲四面體之相鄰二面之展開圖，圖中 L 線爲共邊(AB)之中垂線，M、N 爲二個三角形之外心，L1 垂直 ABM 所屬之平面，L2 垂直 ABN 所屬之平面，右圖爲二個三角形延 AB 所折出的圖。

證：

取四面體的任二相鄰面攤開，對公共邊 AB 作中垂線 L，則此二個三角形之外心(M、N)在 L 直線上，由於 ABMN 在尚未折疊時，四點共平面，所以 L1、L2 在同一平面上（垂直於同一平面之二垂直線必在同一平面上），由於 AB 垂直 MN，所以當 AB 爲折線時，L1、L2 還是在同一平面上，平面上的二直線，除了平行之外必有交點，而此二直線平行的條件爲此二面之夾角爲１８０or０度，因爲四面體的任二面不可能夾１８０or０度，所以此二直線必有一交點，且此交點到此四面體的四頂點等距，即爲球心。

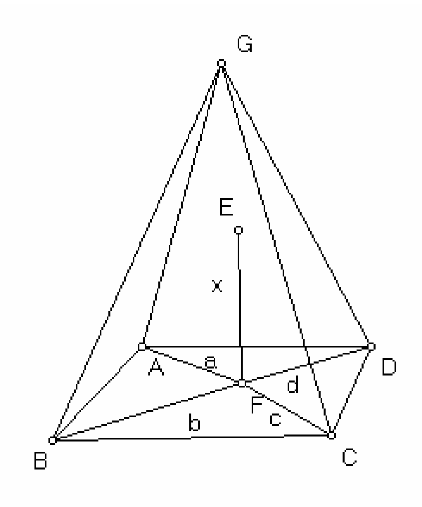
伍、研究結果

由以上之證明，可得知空間中的所有四面體皆有外接球。

陸、討論

一、　四角錐之外接球討論：

（一）　底面四邊形必為圓內接四邊形，且球心必在過四邊形圓心且垂直四邊形平面之直線上



證：

設四邊形四個頂點為 ABCD，球心為 E，E 對四邊形作投影點 F（F 為 ABCD 四邊形之外接圓圓心），EF 設為 x，F 到四邊形四個頂點距離依序為 a，b，c，d

$EA^2 = a^2 + x^2$ ， $EB^2 = b^2 + x^2$ ， $EC^2 = c^2 + x^2$ ， $ED^2 = d^2 + x^2$

因為 EA= EB=EC =ED

所以 $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$

a，b，c，d 為正數，所以 a=b=c=d(得證)

（二）四角錐底面是圓內接四邊形則一定有外接球

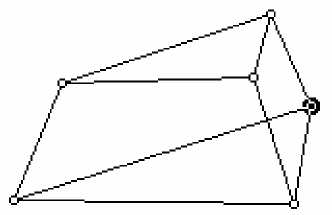
證：

作一直線垂直 ABCD 平面且過四邊形圓心，參考**四面體外接球之證明一**

（三）由上述二點知，四角錐底面是圓內接四邊形⇔四角錐有外接球

二、五面體之外接球討論：

（一）　上下面為二個三角形，側面皆為四邊形，上下面平行

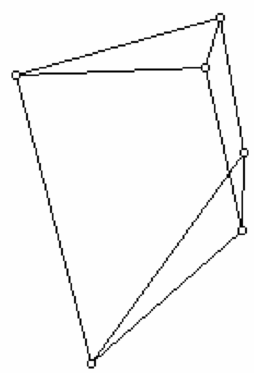


有球體之條件為：二個三角形之外心連線須垂直二平面

證：

球心必在垂直於三角形平面又過外心的直線上，所以要同時在二個三角形的過外心又垂直於三角形平面的直線上

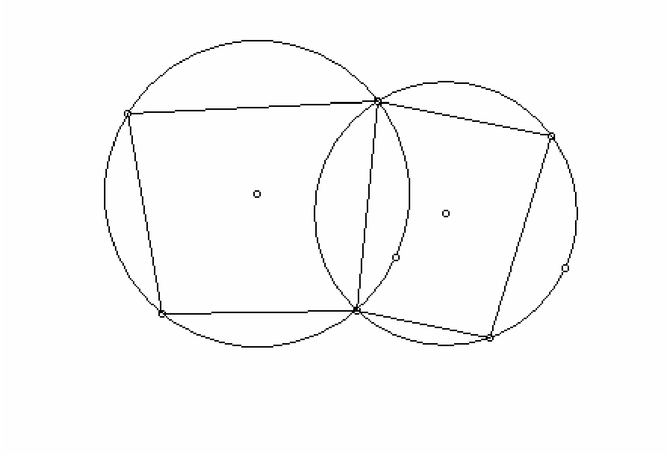
（二）　上下面為二個三角形，側面皆為四邊形，上下面不平行



條件：有二側面為圓內接四邊形

證：

取兩相鄰之**四邊形**展開

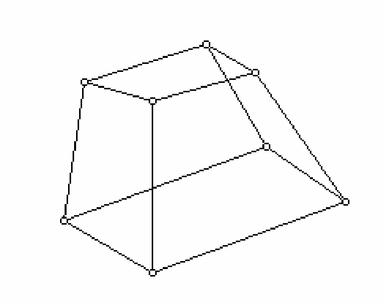


取公共邊之中垂線，作法同**四面體外接球之證明二**

三、六面體之外接球討論：

六面體目前先探討一種，各面皆為四邊形

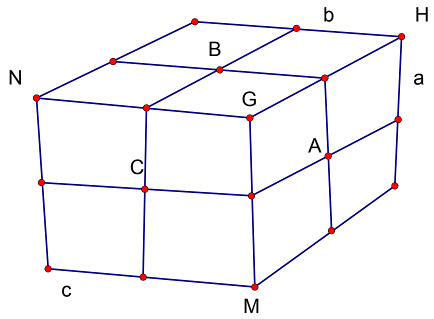
（一）　上下二面平行且上下二面皆為圓內接四邊形



條件：上下二面之外接圓圓心連線垂直於二面
證明同**五面體之討論**（一）

（二）　每面皆是四邊形的六面體，上下面不一定要平行
條件：有一組共一點的三面皆為圓內接四邊形

證：
　取共點三面ａ，ｂ，ｃ，四邊心圓心為Ａ，Ｂ，Ｃ



a 平面的外接圓圓心對與 b 面的共邊（GH），與 c 面的共邊（GM）作垂線，因為都為圓內接四邊形，所以此二線是二邊中垂線，同理 b、c 平面各作出二條線，a、b 面有共同一邊，又各有一中垂線過此邊中點，以此二中垂線得一平面設為m，m垂直 a、b 兩面，同理 a、c 面，c、b 面得 n ， t ，此三平面必交於一點，此點即為球心

四、類圓錐與圓柱之外接球討論

類圓錐：

參考**四面體外接球之證明一**，圓錐可得證皆有外接球
類圓柱：

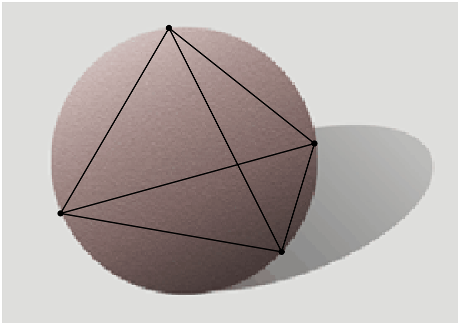
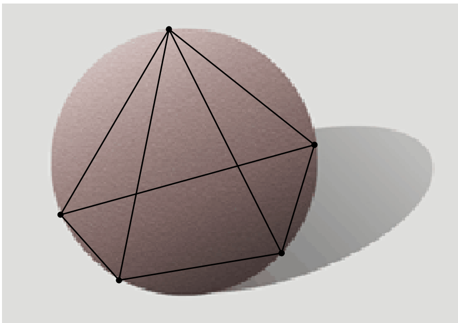
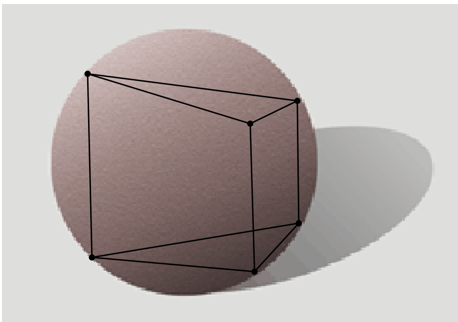
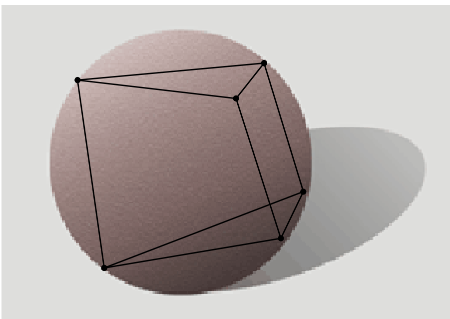
（一）　圓柱必有外接球（顯然）

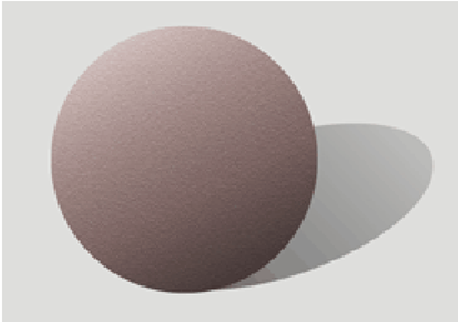
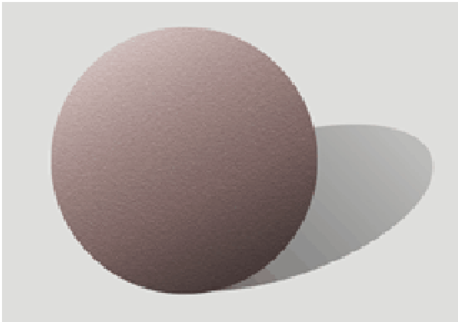
（二）　上下圓平行，大小不一定要相等，二圓心相連線垂直二圓，即有外接球
證明參考**五面體之外接球討論**（一）

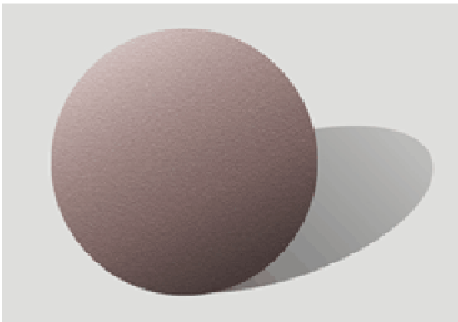
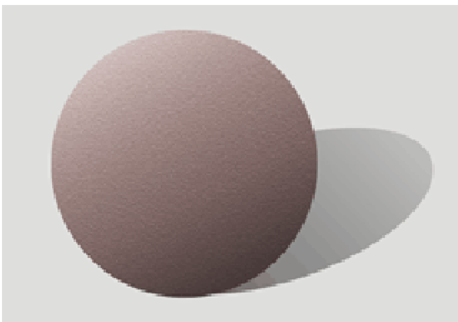
柒、結論

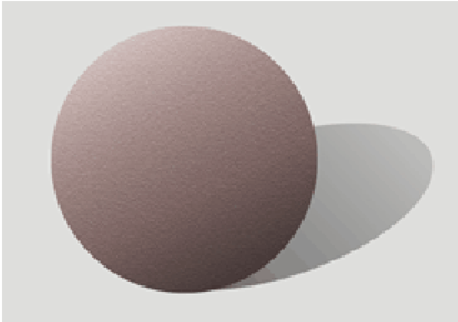
註：以下的多面體與外接球的條件皆是充分且必要，意即⇔

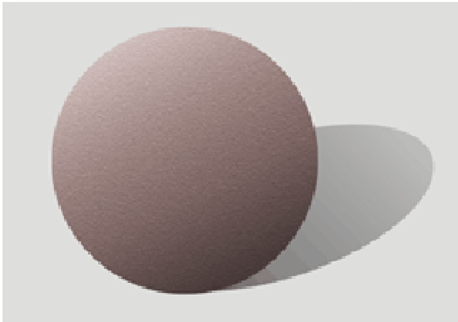
各多面體有外接球之條件

<table>
<tr><td>名稱</td><td>圖形</td><td colspan="2">判別條件</td></tr>
<tr><td>四面體</td><td></td><td colspan="2">全部皆有外接球</td></tr>
<tr><td>四角錐</td><td></td><td colspan="2">底面是圓內接四邊形</td></tr>
<tr><td>類三角柱
上下面平行
以下兩者只須成立一個即可</td><td></td><td>二個三角形之外心連線須垂直二平面</td><td>有二側面為圓內接四邊形</td></tr>
<tr><td>類三角柱</td><td></td><td colspan="2">有二側面為圓內接四邊形</td></tr>
</table>

<u>圓柱</u>		全部皆有外接球
<u>類圓柱</u>		二圓心相連線垂直二圓

<u>圓錐</u>		全部皆有外接球
<u>類圓錐</u>		全部皆有外接球

六面體 上下二面不一定平行		**有一組共一點的三面皆為圓內接四邊形**

六面體 上下二面平行 以下只須成立一個即可		**有一組共一點的三面皆為圓內接四邊形**	**上下二面為圓內接四邊形，且外心連線垂直於二面**

捌、參考資料及其他

高級中學數學課本第三冊。