中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第三名

080402

魔術紙牌遊戲之數理探究

學校名稱：臺中市北屯區松竹國民小學

作者：	指導老師：
小六 王慶宇 小六 陳俊廷 小六 林聖為	劉清宏 王惠冠

關鍵詞：數學遊戲、二進位

魔 術 紙 牌 遊 戲 之 數 理 探 討

摘要：

為了破解同學的市售魔術紙牌～可猜出心中所想的數字，我們展開了魔術紙牌遊戲數理探討之旅。研究結果與發現：

一、紙牌的原理：心中數為該數字所出現之各紙牌的第一個數字之和。

二、紙牌的數字分佈：數字出現次數剛好是巴斯卡三角數字，且可由 C(n,r)來算出。

三、製作三、四、……十進位的「傳統式」及「改良式」兩種紙牌。推翻*科學研習月刊*中指出：紙牌只適用於二進位數，不適用於其他進位法。

四、探究紙牌與另一道具「索引卡」之相關。

五、製作各種進位之索引卡。

六、製作出「非進位加法式」紙牌。

壹、研究動機

一天班上的同學拿來一份魔術紙牌，宣稱他可猜出我們心中所想的數字，我們試了好多次果然屢試不爽，我們都覺得很神奇。在老師的指導之下，我們展開了魔術紙牌遊戲之數理探討之旅。

貳、研究目的

一、探討紙牌的規律。

二、探討紙牌遊戲的猜數字原理。

三、探討二進位紙牌製作方式。

四、製作三進位、四進位、……十進位的紙牌。

五、探究紙牌與另一道具「索引卡」之相關。

六、製作各進位之索引卡。

七、製作出非進位加法式紙牌。

參、研究設備與器材

魔術紙牌、電腦、紙卡、打洞器、筆芯

肆、研究過程、結果與討論

研究一：探討六張紙牌的數字規律

（一）研究過程

1.我們把六張紙牌（如表一）中出現的數字（1～63），在表二～1 各欄內打勾，製作成表二～1。

（二）結果與討論

1. 數字在紙牌中的出現規律一：

第 n 張紙牌的數字從 2^{n-1} 開始，依序出現 2^{n-1} 個連續整數，然後空 2^{n-1} 個連續數，依序循環。

表一 魔術紙牌的數字

紙牌一	1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、23、25、27、29、31、33、35、37、39、41、43、45、47、49、51、53、55、57、59、61、63
紙牌二	2、3、6、7、10、11、14、15、18、19、22、23、26、27、30、31、34、35、38、39、42、43、46、47、50、51、54、55、58、59、62、63
紙牌三	4、5、6、7、12、13、14、15、20、21、22、23、28、29、30、31、36、37、38、39、44、45、46、47、52、53、54、55、60、61、62、63
紙牌四	8、9、10、11、12、13、14、15、24、25、26、27、28、29、30、31、40、41、42、43、44、45、46、47、56、57、58、59、60、61、62、63
紙牌五	16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30、31、48、49、50、51、52、53、54、55、56、57、58、59、60、61、62、63
紙牌六	32、33、34、35、36、37、38、39、40、41、42、43、44、45、46、47、48、49、50、51、52、53、54、55、56、57、58、59、60、61、62、63

表二～1 數字出現次數表

紙牌／數字	六	五	四	三	二	一	V出現次數
0							
1						V	1
2					V		1
3					V	V	2
4				V			1
5				V		V	2
6				V	V		2
7				V	V	V	3
8			V				1
9			V			V	2
10			V		V		2
11			V		V	V	3
12			V	V			2
13			V	V		V	3
14			V	V	V		3
15			V	V	V	V	4
16		V					1
17		V				V	2
18		V			V		2
19		V			V	V	3
20		V		V			2
21		V		V		V	3
22		V		V	V		3
23		V		V	V	V	4
24		V	V				2
25		V	V			V	3
26		V	V		V		3
27		V	V		V	V	4
28		V	V	V			3
29		V	V	V		V	4
30		V	V	V	V		4
31		V	V	V	V	V	5

紙牌／數字	六	五	四	三	二	一	V出現次數
32	V						1
33	V					V	2
34	V				V		2
35	V				V	V	3
36	V			V			2
37	V			V		V	3
38	V			V	V		3
39	V			V	V	V	4
40	V		V				2
41	V		V			V	3
42	V		V		V		3
43	V		V		V	V	4
44	V		V	V			3
45	V		V	V		V	4
46	V		V	V	V		4
47	V		V	V	V	V	5
48	V	V					2
49	V	V				V	3
50	V	V			V		3
51	V	V			V	V	4
52	V	V		V			3
53	V	V		V		V	4
54	V	V		V	V		4
55	V	V		V	V	V	5
56	V	V	V				3
57	V	V	V			V	4
58	V	V	V		V		4
59	V	V	V		V	V	5
60	V	V	V	V			4
61	V	V	V	V		V	5
62	V	V	V	V	V		5
63	V	V	V	V	V	V	6

表二～2 十進位與二進位的換算表

十進位數	六	五	四	三	二	一	1出現次數
	二進位數						
	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
0							
1						1	1
2					1	0	1
3					1	1	2
4				1	0	0	1
5				1	0	1	2
6				1	1	0	2
7				1	1	1	3
8			1	0	0	0	1
9			1	0	0	1	2
10			1	0	1	0	2
11			1	0	1	1	3
12			1	1	0	0	2
13			1	1	0	1	3
14			1	1	1	0	3
15			1	1	1	1	4
16		1	0	0	0	0	1
17		1	0	0	0	1	2
18		1	0	0	1	0	2
19		1	0	0	1	1	3
20		1	0	1	0	0	2
21		1	0	1	0	1	3
22		1	0	1	1	0	3
23		1	0	1	1	1	4
24		1	1	0	0	0	2
25		1	1	0	0	1	3
26		1	1	0	1	0	3
27		1	1	0	1	1	4
28		1	1	1	0	0	3
29		1	1	1	0	1	4
30		1	1	1	1	0	4
31		1	1	1	1	1	5

十進位數	六	五	四	三	二	一	1出現次數
	二進位數						
	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
32	1	0	0	0	0	0	1
33	1	0	0	0	0	1	2
34	1	0	0	0	1	0	2
35	1	0	0	0	1	1	3
36	1	0	0	1	0	0	2
37	1	0	0	1	0	1	3
38	1	0	0	1	1	0	3
39	1	0	0	1	1	1	4
40	1	0	1	0	0	0	2
41	1	0	1	0	0	1	3
42	1	0	1	0	1	0	3
43	1	0	1	0	1	1	4
44	1	0	1	1	0	0	3
45	1	0	1	1	0	1	4
46	1	0	1	1	1	0	4
47	1	0	1	1	1	1	5
48	1	1	0	0	0	0	2
49	1	1	0	0	0	1	3
50	1	1	0	0	1	0	3
51	1	1	0	0	1	1	4
52	1	1	0	1	0	0	3
53	1	1	0	1	0	1	4
54	1	1	0	1	1	0	4
55	1	1	0	1	1	1	5
56	1	1	1	0	0	0	3
57	1	1	1	0	0	1	4
58	1	1	1	0	1	0	4
59	1	1	1	0	1	1	5
60	1	1	1	1	0	0	4
61	1	1	1	1	0	1	5
62	1	1	1	1	1	0	5
63	1	1	1	1	1	1	6

2. 數字在紙牌中的出現規律二：

⑴我們發現 0-3、0-7、0-15……各組的數字中，出現次數剛好是巴斯卡三角數字。

⑵我們可發現可由 C(n,r)來算出巴斯卡三角數字。

⑶我們算出數字在紙牌出現次數 × 個數的乘積，並算出各乘積之累計（註：累計次數就是紙牌中的數字總個數），各組的乘積及累計如表三。

表三

	0～1			0～3				0～7				
出現在紙牌次數	0	1	累計	0	1	2	累計	0	1	2	3	累計
個數	1	1	2	1	2	1	4	1	3	3	1	8
次數×個數	0	1	1	0	2	2	4	0	3	6	3	12

	0～15						0～31							0～63							
出現在紙牌次數	0	1	2	3	4	累計	0	1	2	3	4	5	累計	0	1	2	3	4	5	6	累計
個數	1	4	6	4	1	16	1	5	10	10	5	1	32	1	6	15	20	15	6	1	64
次數×個數	0	4	12	12	4	32	0	5	20	30	20	5	80	0	6	30	60	60	30	6	192

⑷紙牌中的數字總個數＝0×C(n,0)+1×C(n,1)+2×C(n,2)+……+n×C(n,n)。

⑸我們發現各乘積的累計是 1、4、12、32、80、192。而分析數字剛好可以寫成 2^{1-1}×1、2^{2-1}×2、2^{3-1}×3、2^{4-1}×4、2^{5-1}×5、……2^{n-1}×n。另外，我們發現：後一個累積次數＝前一個累計次數×2+前一個數字個數，例如 192＝80×2+32。

研究二：探討魔術紙牌的奧秘

（一）研究過程

1.我們觀看各數字會在哪些紙牌出現。我們可以直接觀察紙牌或表二～1。

（二）結果與討論

1.我們發現數字 1 只在第一張紙牌出現且是紙牌的第一個數字；而數字 2 只在第二張紙牌出現且是紙牌的第一個數字；數字 3 在第一、二張紙牌出現，而數字 3 剛好是二張紙牌的第一個數字之和；數字 4 在第三張紙牌出現且是紙牌的第一個數字；數字 5 在第一、三張紙牌出現，而數字 5 剛好是二張紙牌的第一個數字之和。

2.推論：所有的數字都會剛好是數字所出現之各紙牌的第一個數字之和。

3.我們驗證從 1 到 63 各數字都符合我們的推論。

4.魔術紙牌的奧秘：心中所想數字＝有出現心中所想數字之各紙牌的第一個數字之和。

例如：心中想的數字 7＝1+2+4（第一、二、三張紙牌的第一個數字之和）。

研究三：魔術紙牌和二進位的關係

（一）研究過程

1.我們發現 63＝1+2+4+8+16+32，這和我們所知的二進位換算成十進位似乎有關係。

2.我們把表二～1 中打勾處轉換成 1（代表有在紙牌出現），沒有打勾的空白處補上 0（代表沒有出現在紙牌），轉換成表二～2，表二～2 就是數的二進位數表示法。

（二）結果與討論

1.如甲心中所想數字爲 53。甲說在第一、三、五、六張紙牌中出現，則第一、三、五、六張紙牌的第一個數字之和＝1+4+16+32＝53＝$2^0+2^2+2^4+2^5$。

我們可把 53 寫成二進位的 110101。

2.從表二～1 及表二～2 中我們可發現把 1 到 63 的各數化爲二進位法都剛好有一種組成方式，所以各數都可以用 1、2、4、8、16、32（就是 2^0、2^1、2^2、2^3、2^4、2^5）來組成。

3..在第 n 張紙牌的所有數字，換算成二進位的數，第 N 位數（2^{n-1}）都是 1。例如：在第二張紙牌的所有數字，換算成二進位的數，第二位數（2^1）都是 1。

研究四：二進位紙牌的製作方式

（一）研究過程

1. 我們把表二～2 中從 1 到 63 的各數(十進位)化爲二進位時，第一位數（2^0）是 1 的數寫進第一張紙牌；第二位數（2^1）是 1 的數寫進第二張紙牌；……依序完成第三、四、五、六張紙牌即可完成所有紙牌製作。

（二）結果與討論

1. 6 張紙牌則可以包含 1～63 的整數。原因：略。
2. 每張紙牌都有 32 個數。原因：略。
3. 製作共 n 張紙牌的方法：

方法一：依據十進位換算成二進位的方法。

方法二：依據研究一之紙牌的數字規律。第 n 張紙牌的數字從 2^{n-1} 開始，依序出現及空 2^{n-1} 個連續整數。

4.我們依照上面的紙牌製作方法歸納出；紙牌「張數」和「可猜的整數個數」及「每張紙牌數字個數」關係如表四。

表四 二進位紙牌張數之相關數學歸納

紙牌張數	1	2	3	4	5	6	n
可猜的整數個數	0~1	0~3	0~7	0~15	0~31	0~63	0~（2^n-1）
每張紙牌的整數個數	1	2	4	8	16	32	2^{n-1}
每張紙牌的最小數	1	1、2	1、2、4	1、2、4、8	1、2、4、8、16	1、2、4、8、16、32	1、2、4……2^{n-1}

表五　十進位與三進位的換算表

十進位數	三進位數	十進位數	三進位數	十進位數	三進位數
		27	1 0 0 0	54	2 0 0 0
1	1	28	1 0 0 1	55	2 0 0 1
2	2	29	1 0 0 2	56	2 0 0 2
3	1 0	30	1 0 1 0	57	2 0 1 0
4	1 1	31	1 0 1 1	58	2 0 1 1
5	1 2	32	1 0 1 2	59	2 0 1 2
6	2 0	33	1 0 2 0	60	2 0 2 0
7	2 1	34	1 0 2 1	61	2 0 2 1
8	2 2	35	1 0 2 2	62	2 0 2 2
9	1 0 0	36	1 1 0 0	63	2 1 0 0
10	1 0 1	37	1 1 0 1	64	2 1 0 1
11	1 0 2	38	1 1 0 2	65	2 1 0 2
12	1 1 0	39	1 1 1 0	66	2 1 1 0
13	1 1 1	40	1 1 1 1	67	2 1 1 1
14	1 1 2	41	1 1 1 2	68	2 1 1 2
15	1 2 0	42	1 1 2 0	69	2 1 2 0
16	1 2 1	43	1 1 2 1	70	2 1 2 1
17	1 2 2	44	1 1 2 2	71	2 1 2 2
18	2 0 0	45	1 2 0 0	72	2 2 0 0
19	2 0 1	46	1 2 0 1	73	2 2 0 1
20	2 0 2	47	1 2 0 2	74	2 2 0 2
21	2 1 0	48	1 2 1 0	75	2 2 1 0
22	2 1 1	49	1 2 1 1	76	2 2 1 1
23	2 1 2	50	1 2 1 2	77	2 2 1 2
24	2 2 0	51	1 2 2 0	78	2 2 2 0
25	2 2 1	52	1 2 2 1	79	2 2 2 1
26	2 2 2	53	1 2 2 2	80	2 2 2 2

研究五：如何應用三進位數魔術紙牌來猜數字

（一）研究過程

1.之前我們可運用二進位的原理來猜別人心中所想的數，我們想是否可進一步運用三進位的原理來猜別人心中所想的數呢？（註：在參考文獻～*科學研習月刊*中指出紙牌遊戲只適用於二進位數，不適用於其他進位。）

2.首先製作十進位數字轉換成三進位的表格如表五。

3.接著，我們仿照二進位方法，用表五來製作三進位的紙牌。

（二）結果與討論

1.我們發現了三進位數中的數字，有 0、1、2 三個數字。

2.要區分 0、1、2 三個數字，如果把 1、2 寫在同一張紙牌上，我們無法區分是 1 或 2。所以必須把 1、2 寫在不同的紙牌上。

3. 因此當所要猜的數字爲一位的三進位數時$(0)_3$～$(2)_3$即 0～2 時應有 2 張紙牌。

表六～1

1	2

4.當所要猜的數字爲二位的三進位數時$(01)_3$～$(22)_3$即 0～8 紙牌數應有 4 張，每張紙牌有 3 個整數。

表六～2

	×1	×2
3^0	1、4、7	2、5、8
3^1	3、4、5	6、7、8

5.當所要猜的數字爲三位的三進位數時$(001)_3$～$(222)_3$即 0～26 紙牌數應有 6 張，每張紙牌有 9 個整數。

表六～3

	×1	×2
3^0	1.4.7.10.13.16.19.22.25	2.5.8.11.14.17.20.23.26
3^1	3.4.5.12.13.14.21.22.23	6.7.8.15.16.17.24.25.26
3^2	9.10.11.12.13.14.15.16.17	18.19.20.21.22.23.24.25

6.當所要猜的數字為四位的三進位數時$(0001)_3$～$(2222)_3$即 0～80 紙牌數應有 8 張，每張紙牌有 27 個整數。

表六～4

		×1		×2
3^0	第一張	1.4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.37.40.43.46.49.52.55.58.61.64.67.70.73.76.79	第二張	2.5.8.11.14.17.20.23.26.29.32.35.38.41.44.47.50.53.56.59.62.65.68.71.74.80
3^1	第三張	3.4.5.12.13.14.21.22.23.30.31.32.39.40.41.48.49.50.57.58.59.66.67.68.75.76.77	第四張	6.7.8.15.16.17.24.25.26.33.34.35.42.43.44.51.52.53.60.61.62.69.70.71.78.79.80
3^2	第五張	9.10.11.12.13.14.15.16.17.36.37.38.39.40.41.42.44.63.64.65.66.67.68.69.70.71	第六張	18.19.20.21.22.23.24.25.26.45.46.47.48.49.50.51.52.53.72.73.74.75.76.77.78.79.80
3^3	第七張	27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.44.45.46.47.48.49.50.51.52.53	第八張	54.55.56.57.58.59.60.61.62.63.64.65.66.67.68.69.70.71.72.73.74.75.76.77.78.79.80

7.數字在紙牌中的出現規律：略。

8.我們可發現紙牌的第一個數字 1、2、3、6、9、18、27、54 即為 1×3^0、2×3^0、1×3^1、2×3^1、1×3^2、2×3^2、1×3^3、2×3^3。

9.應用三進位紙牌來猜數字時，心中所想的數字會剛好是該數字所出現之各紙牌的第一個數字之和。

10. 比較使用「二進位數紙牌」及「三進位數紙牌」來猜數字，我們可發現：同樣是六張紙牌，使用二進位數可猜 64 個數字，用三進位數只可猜 27 個數字。這和我們先前的想法：「使用三進位需較少的紙牌數」相反。我們想是否可改良我們的紙牌呢？

註：17＝$(122)_3$＝$(10001)_2$　　三進位的表示法較二進位簡短。

研究六：改良三進位數魔術紙牌來猜數字

（一）研究過程

1.爲了使用三進位需較少的紙牌數，我們開始做魔術紙牌的改良。

2.我們發現原來三進位數紙牌中，出現在第一張紙牌的數字（因含有 1×3^0）絕對不會出現在第二張紙牌（因含有 2×3^0）（註：任何數的三進位數的一位數數字只有可能是 0、1、2 中的其中一個）；出現在第三張紙牌的數字（因含有 1×3^1）絕對不會出現在第四張紙牌（因含有 2×3^1）（註：任何數的三進位數的二位數數字只有可能是 0、1、2 中的其中一個）。

3. 若我們把原來的紙牌（表七）中的兩小張合併成一大張。即第一張紙牌和第二張紙牌合併成一大張編號 A（表七～1）；原來的紙牌中的第三張紙牌和第四張紙牌合併成一大張編號 B（表七～2）。

表七 原來三進位紙牌

	×1		×2	
3^0	第一張	$1=1\times3^0$ $4=1\times3^0+1\times3^1$ $7=1\times3^0+2\times3^1$	第二張	$2=2\times3^0$ $5=2\times3^0+1\times3^1$ $8=2\times3^0+2\times3^1$
3^1	第三張	$3=\quad 1\times3^1$ $4=1\times3^0+1\times3^1$ $5=2\times3^0+1\times3^1$	第四張	$6=\quad 2\times3^1$ $7=1\times3^0+2\times3^1$ $8=2\times3^0+2\times3^1$

表七～1

3^0	×1	×2
第一張 A	1、4、7	2、5、8

表七～2

3^1	×1	×2
第二張 B	3、4、5	6、7、8

4. 運用改良三進位數紙牌來猜數字時，要問數字是否在該紙牌中且進一步問是在紙牌的第一欄或第二欄？我們只要把數字所在紙牌那欄的第一個數字加起來即是該數字；。例如數字 7＝（21）$_3$＝1+6＝$1\times3^0+2\times3^1$，即第一張的第一個數字 1 加第二張第二欄第一個數字 6。

5. 我們發現在同一張的第二欄第一個數字恰好是第一欄第一個數字的兩倍。

6. 我們運用改良三進位數紙牌來猜數字時，使用六張紙牌可猜小於 $0 \sim 3^6-1$ 的數共 3^6 個（729 個）；使用 n 張紙牌可猜小於 $0 \sim 3^n-1$ 的數共 3^n 個，詳如表八。

表八

紙牌張數	1	2	3	4	5	6	n
可猜的整數個數	0~2	0~8	0~26	0~80	0~242	0~728	0~（3^n-1）
每張紙牌的整數個數	2= 2×3^0	6= 2×3^1	18= 2×3^2	54= 2×3^3	162= 2×3^4	486= 2×3^5	$2\times3^{n-1}$
每張紙牌的最小數	1	1、3	1、3、9	1、3、9、27	1、3、9、27、81	1、3、9、27、81、243	1、3、9……$2\times3^{n-1}$

（二）結果與討論

1. 我們發現使用改良的三進位數紙牌來猜數字，符合我們原來的想法：使用三進位比二進位需較少的紙牌數。

2. 我們可使用同樣的方法來製作四進位、五進位……的紙牌。

研究七：十進位的魔術紙牌

（一）研究過程

1.為了使用較少的紙牌就可猜較多的數字，我們嘗試做十進位的紙牌（表九）。

（二）結果與討論

1. 十進位數的紙牌讓我們可以清楚的看清紙牌的奧秘：第一張紙牌將個位數字相同的寫在同一欄，當測試者說數字在第幾欄時，則數字的個位數就是 1×欄別；第二張紙牌將十位數字相同的寫在同一欄，當測試者說數字在第幾欄時，則數字的十位數就是 10×欄別。

2.運用十進位數紙牌來猜數字時，要問數字是否在紙牌且進一步問是在紙牌的第幾欄？我們只要把數字所在紙牌那欄的第一個數字加起來即是該數字。

例如：數字 $79=9+70=9\times10^0+7\times10^1$，即第一張的第九欄第一個數字 9 加第二張第七欄第一個數字 70。

3. 我們發現在同一張的第 n 欄第一個數字恰好是第一欄第一個數字的 n 倍。

4. 我們運用十進位數紙牌來猜數字時，使用 2 張紙牌可猜小於 $0 \sim 10^2-1$ 的數共 10^2 個（100 個）。使用 n 張紙牌可猜小於 $0 \sim 10^n-1$ 的數共 10^n 個。

5. 而二、三……十進位紙牌中，因十進位每張紙牌數包含較多的數字，所以十進位所用的紙牌張數需最少。

6. K＝可猜整數個數÷（比較紙牌張數×每張紙牌包含個數）。（註：K 值較大代表用總數較少的個數就可猜出固定的數字）。當張數值固定時，K 之值以二進位紙牌爲最大；當可猜整數個數值固定時，K 之值以十進位紙牌爲最大，詳如表十。

表九 十進位數紙牌

第一張紙牌 10^0	第1欄	第2欄	第3欄	第4欄	第5欄	第6欄	第7欄	第8欄	第9欄
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	41	42	43	44	45	46	47	48	49
	51	52	53	54	55	56	57	58	59
	61	62	63	64	65	66	67	68	69
	71	72	73	74	75	76	77	78	79
	81	82	83	84	85	86	87	88	89
	91	92	93	94	95	96	97	98	99

第二張紙牌 10^1	第1欄	第2欄	第3欄	第4欄	第5欄	第6欄	第7欄	第8欄	第9欄
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	11	21	31	41	51	61	71	81	91
	12	22	32	42	52	62	72	82	92
	13	23	33	43	53	63	73	83	93
	14	24	34	44	54	64	74	84	94
	15	25	35	45	55	65	75	85	95
	16	26	36	46	56	66	76	86	96
	17	27	37	47	57	67	77	87	97
	18	28	38	48	58	68	78	88	98
	19	29	39	49	59	69	79	89	99

表十

紙牌進位方式	二進位	三進位	四進位		十進位
紙牌張數（A）	n	n	n		n
可猜的整數個數（B）	2^n	3^n	4^n	…	10^n
每張紙牌的整數個數（C）	2^{n-1}	$2\times3^{n-1}$	$3\times4^{n-1}$		$9\times10^{n-1}$
K＝B÷（A×C）	2/n	3/(n×2)	4/(n×3)		10/(n×9)

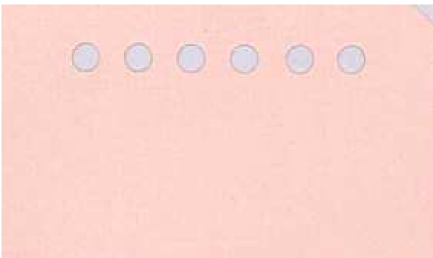
研究八：二進位魔術紙牌和魔術道具～索引卡

（一）研究過程

1.由研究三我們知道十進位數字可換算成唯一的二進位數字，結合二進位紙牌，我們另外發現了一個配合道具～索引卡的玩法。

2.拿 63 張卡片分別編號寫上 1～63，在每張卡片邊緣打六個圓孔（如圖一），在圓孔下方寫上編號數字之二進位，將代表數字 0 的圓孔上方剪一個 U 形缺口。U 形缺口代表 0，圓孔代表 1（如圖二）。

3.使用此 63 張卡片配合紙牌即可猜出心中的數字。方法為：問第一張紙牌時，拿一根原子筆芯穿過並排紙卡的最右邊圓孔（註：2^0 位）並提起，此時會有一半紙卡被提起。若數字有出現在紙牌則留下筆芯上的紙卡；若沒出現則去掉筆芯上的紙卡留下筆芯下方之紙卡，依序完成一～六張紙牌，則最後會留下一張紙卡，該紙卡的數字即為心中所想的數字。



圖一 索引卡

圖二 索引卡　 數字 5

（二）結果與討論

1.此索引卡亦是運用二進位的原理。

2.此索引卡可配合「生物基因輪」的使用。

3.拿一根原子筆芯穿過並排索引卡的最右邊圓孔（註：2^0 位）並提起，此時會有一半索引卡被提起。將被提起的索引卡置於未被提起索引卡後方；由右至左依序完成六個圓孔，則卡片會由 1～63 依序排好。

4.電腦 Excel 程式的「排序」功能是方便的進階排序工具。

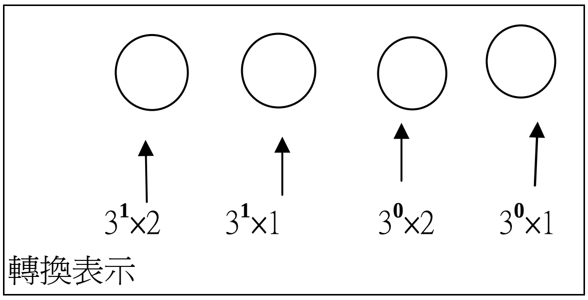
研究九、三進位索引卡

（一）研究過程

我們嘗試製作三、四……進位索引卡。

1.首先製作三進位索引卡：0～8 中，$8=(22)_3$，需要 4 孔，由右而左分別是 $3^0\times1$，$3^0\times2$，$3^1\times1$，$3^1\times2$。

2.拿 8 張卡片分別編號寫上 1～8，在每張卡片邊緣打四個圓孔（如圖三），在圓孔下方寫上編號數字之三進位轉換表示法（該圓孔所代表值之係數 1 或 0），將代表數字 0 的圓孔上方剪一個 U 形缺口。U 形缺口代表 0，圓孔代表 1。



圖三　三進位索引卡

（二）結果與討論

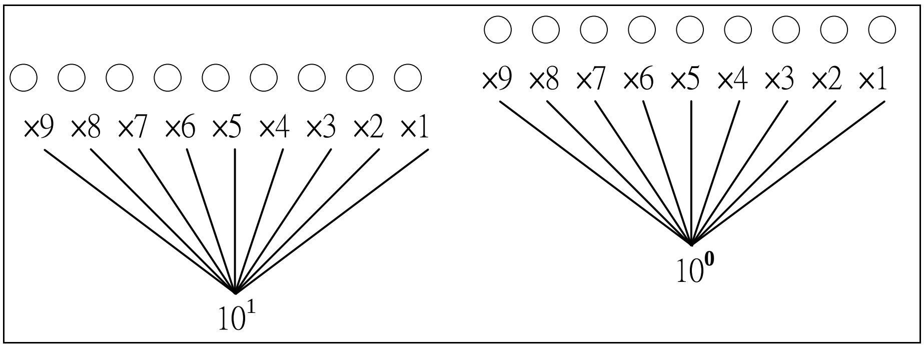
1.使用此 8 張三進位索引卡亦可配合紙牌猜出心中的數字。方法爲：問第一張紙牌時，拿一根原子筆芯穿過並排卡片的所代表圓孔（第一孔＝$3^0\times1$，或第二孔＝$3^0\times2$）並提起，保留此 1/3 被提起紙卡。（若未出現在第一張紙牌，則保留穿過一、二孔後未被提起的卡片）依序完成各張紙牌，最後會留下心中數之索引卡。

2.我們也可以將三進位的索引卡排序，做法跟二進位一樣。首先將筆芯穿過第一個孔，如果第一位數是 1 會被提起，第一位是 0、2(第一孔是 0)的就會掉下去，然後再將被提起的卡片放到掉下去的後面。之後換第二孔，我們將筆芯穿過第二孔，如果第一位是 2(第二孔是 1 的)就會被提起，第一位是 0、1(第二孔是 0)的話就會掉下去，然後再將被提起的卡片放到掉下去的後面。依此類推即可完成三進位索引卡的排序。

研究十、十進位索引卡

（一）研究過程

1.拿 99 張卡片分別編號寫上 1～99，在每張卡片邊緣打 18 個圓孔（如圖四），在圓孔下方寫上編號數字之十進位轉換表示法（該圓孔所代表值之係數 1 或 0），將代表數字 0 的圓孔上方剪一個 U 形缺口。U 形缺口代表 0，圓孔代表 1。



（猜 0～99 個數字）

圖四 十進位索引卡

（二）結果與討論

1.此十進位索引卡可依三進位方式輕鬆排序。

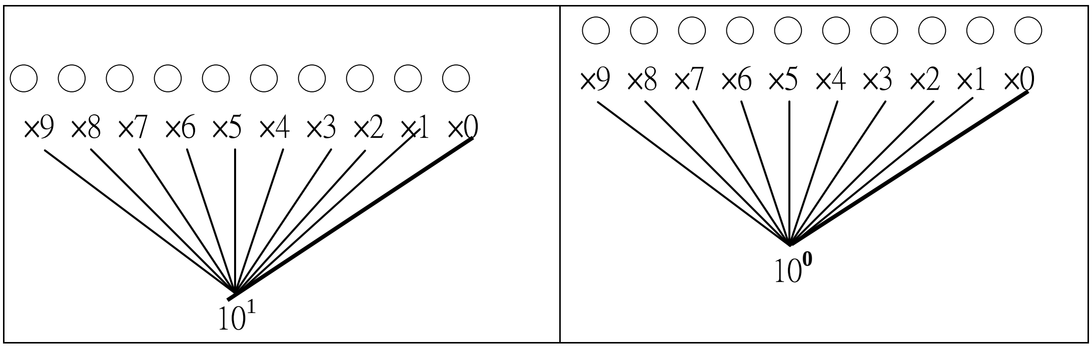
2.此十進位索引卡配合魔術紙牌猜心中數時：①若數字不含 0 則可用兩次就檢索出（個位、十位各一次）；②但若個位數字含 0，則個位就需 9 次才能檢索出。

3.將索引卡增加 10^0×0 及 10^1×0 兩孔時，索引次數可大大的降低。

4.比較二進位和十進位的索引卡，十進位猜 100 個數字需要 20 個孔，而二進位猜 128 個數字需要 7 個孔，由此可見十進位的索引卡，需要的孔較多。

5.比較二進位和十進位的索引卡，十進位猜 1000 個數字需要 30 個孔，而二進位猜 1024 個數字需要 10 個孔，由此可見十進位的索引卡，需要的孔較多。

6.2^{1000}≒1.0715E+301，二進位需 1000 次檢索，十進位需 301×10 次檢索，所以十進位的檢索次數約是二進位的 3 倍。這是電腦使用二進位的好處。



圖四～1 改良式十進位索引卡)

研究十一、非進位加法式魔術紙牌
（一）研究過程
之前我們製作了二進位、三進位……十六進位的魔術紙牌，我們嘗試以非進位加法來製作新的魔術紙牌。

表十一 非進位加法式魔術紙牌

第一張	1	5	6		8		10
第二張	2		6			9	10
第三張	3		6	7	8	9	10
第四張	4	5		7	8	9	10

1.做法：首先看我們要猜幾個數字，如果要猜 1～10 個數字，我們每張紙牌的第一個數字分別是 1、2、3、4 這樣加起來才會=10，然後再寫各紙牌裡的數字（表十一）。例如:數字 5=1+4，所以要寫進第一、四張依此類推。

2 猜法：同二進位魔術紙牌。
（二）結果與討論
1.我們所猜的數字不可以超過各張紙牌的第一個數字之和。

2.數字 5=1+4，也可以拆成 2+3，但是只能選一組寫進紙牌，如果我們把全部都寫進去，就會重複計算。

3.我們每個人所做的紙牌不會一樣，但是結果還是一樣。

伍、結論
一、魔術紙牌數字的規律：

（一）在第 n 張紙牌的所有數字，換算成二進位的數，第 n 位數（2^{n-1}）都是 1。

（二）觀察紙牌的數字分佈發現：

1.數字出現次數的個數剛好是巴斯卡三角數字。

2.可由 C(n,r)來算出巴斯卡三角數字。

3. 紙牌中的數字總個數＝$0\times C(n,0)+1\times C(n,1)+2\times C(n,2)+\ldots\ldots+n\times C(n,n)$。

二、十進位與二進位的關係：

1 到 63 的各數化為二進位法都剛好有一種組成方式，所以各數都可以用 1、2、4、8、16、32（就是 2^0、2^1、2^2、2^3、2^4、2^5）來組成。

三、魔術紙牌遊戲猜數字的方法：應用紙牌來猜數字時，心中所想的數字是該數字所出現之各紙牌的第一個數字之和。

四、二進位魔術紙牌的製作方式

將十進位化爲二進位，再把第 N 位數（2^{n-1}）是 1 的數寫進第 n 張紙牌。

五、二進位魔術紙牌「張數」和「可猜的整數個數」及「每張紙牌數字個數」關係如研究四之表。

六、我們可使用二進位紙牌的製作方式來製作三進位、四進位、五進位……的魔術紙牌。且每種進位法皆有傳統式及改良式之兩種紙牌。推翻*科學研習月刊*中指出：紙牌遊戲只適用於二進位數，不適用於其他進位法。

七、使用改良的三進位數魔術紙牌來猜數字時，因每張紙牌數包含較多的數字，所以比二進位需較少的紙牌數。而二、三……十進位魔術紙牌中，以十進位所用的張數需最少。

八、運用十進位數魔術紙牌來猜數字時，可以容易清楚的破解魔術紙牌的奧秘。

九、K＝可猜整數個數÷（比較紙牌張數×每張紙牌包含個數)。(註：K 值較大代表用總數較少的個數就可猜出固定的數字)。當張數值固定時，K 之值以二進位紙牌爲最大；當可猜整數個數值固定時，K 之值以十進位紙牌爲最大。

十、探究紙牌與另一道具「索引卡」之相關。

十一、製作各種進位之索引卡。

十二、製作出「非進位加法式」紙牌。

陸、參考資料

翰林出版社。公因數與公倍數。國小數學第九冊。台南市：翰林。

克萊德・華特生。二進位數（5 版)。台北：漢聲 民 79

德田雄洋。0 與 1 的世界。台北：凱信 民 83

(8n+1)工作坊（2008)。《數學教室》X 地來的 Y 小姐。科學研習月刊，NO.47-3。28-40

猜心數。取自：http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/c08/080411.pdf

【評語】080402

本件作品兼具數學性、趣味性和實用性。利用「n 進位」以探討紙牌原理，討論完整、分析細緻，並由此製作出傳統式和改良式的紙牌，以及「索引卡」。將數學做了很好的應用，值得嘉許。