

中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

最佳創意獎

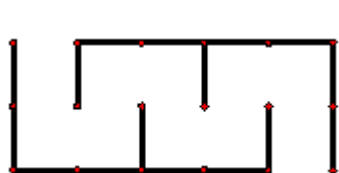
030424

圍地盤遊戲的必勝策略

學校名稱：國立科學工業園區實驗高級中學

作者： 國二 劉佩雯 國二 韓杰霖 國二 陳怡君 國二 陳奕達	指導老師： 徐俊男
---	------------------

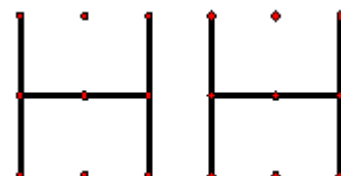
關鍵詞：窮舉法、線對稱圖形、必勝圖



進出不同型



進出相同型



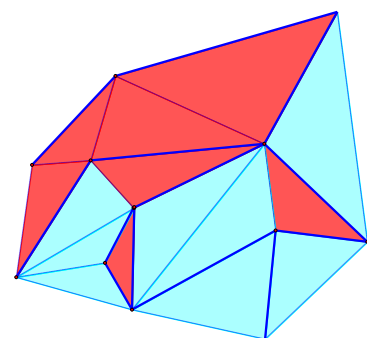
三筆畫結束型

壹、研究動機

記得國一時，班上很流行玩圍地盤的遊戲，圍地盤這個遊戲的玩法簡單、工具又少，只需要有筆和紙，隨時隨地都可以玩。而且我們在國一時正好教到平面座標，所以當時同學們就用方格紙來玩。

因為這個遊戲的規則非常簡單易懂，隨時都可以玩，而且我們當時覺得這個遊戲只是靠運氣，沒什麼小技巧，只要夠細心，小心別送地給對手，應該就不會輸的太難看。但如今找了幾個同學玩，發現不只是靠運氣，這個遊戲似乎有什麼必勝的圖形，於是我們二話不說，馬上著手研究。

於是我們從網站 - UEPLAY 遊藝館 <http://blog.ueplay.com> - 找到了相關資料。起初此遊戲的玩法是雙方必須先在紙上點幾個點，輪流將點和點之間用線相連。然後最先完成一個三角形的最後一筆者就可以擁有那一塊地，圖形不可有重疊。當遊戲結束時，統計雙方的得地數目，得到最多地的人就是贏家，如右圖，紅：藍=7：8，藍方獲勝。



而後此遊戲則進階到較有規律性的玩法，因此我們對此”有規律性圍地盤”遊戲有了好奇的想法，想知道此遊戲是否有其必勝圖，還是只是像我們在國一玩這個遊戲時的想法一樣-靠運氣-呢？也因此我們得到了一個有趣的研究題材。

貳、研究目的

- 一、探討 3×3 地盤後下者與先下者的必勝技巧，找出 3×3 地盤之必勝策略？
- 二、探討 3×5 地盤的必勝技巧，找出 3×5 地盤之必勝策略？
- 三、探討 $3 \times (2k + 1)$ 地盤的必勝技巧是否可由前者推廣出來？
- 四、探討 3×4 地盤後下者與先下者的必勝技巧，找出 3×4 地盤之必勝策略？
- 五、探討 3×6 地盤的必勝技巧，找出 3×6 地盤之必勝策略？
- 六、探討 $3 \times 2k$ 地盤的必勝技巧是否可由前者推廣出來？
- 七、探討 4×4 地盤的必勝技巧，找出 4×4 地盤之必勝策略？
- 八、探討 6×6 地盤的必勝技巧，找出 6×6 地盤之必勝策略？
- 九、歸納 2×2 地盤、 4×4 地盤及 6×6 地盤的相關性，探討 $2k \times 2k$ 地盤的必勝策略？

參、研究器材

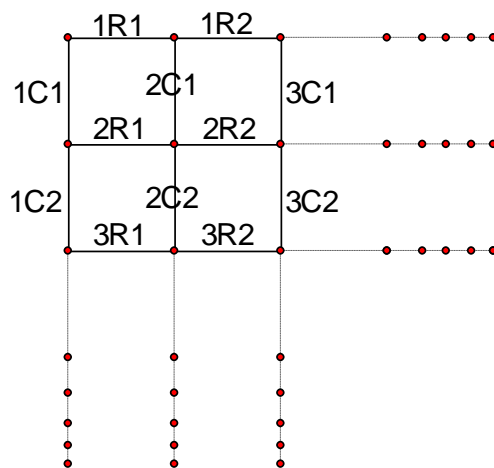
紙、筆、方格紙、小白板及電腦(使用 GSP 軟體繪圖)

肆、研究過程與方法

一、名詞解釋與定義：

(一)定義代號：

爲了方便研究，我們將每一條線都取了代號，以 3×3 地盤(3列 row \times 3行 column)爲例，第一列的第1條稱爲『1R1』、第一列的第2條稱爲『1R2』、第一行的第1條稱爲『1C1』、第二行的第1條稱爲『2C1』、第三行的第1條稱爲『3C1』、 \dots ，依此類推。如下圖：



即是第 j 列的第 k 條稱爲『 jRk 』、第 j 行的第 k 條稱爲『 jCk 』， $j, k \in N$ 。

(二)研究過程中分先下者與後下者。定義在一個 $m \times n$ 地盤中，先下者所圍地盤數以 $f_{m \times n}$ 表示，後下者所圍地盤數則以 $b_{m \times n}$ 表示。

二、定義遊戲規則：

(一)玩法：

圍地盤是一個兩人以上的紙筆遊戲。遊戲前，先用筆在紙上隨意點一些點，然後輪流在點和點之間連線，將連線區域封閉的人就佔有那個區域，可用不同顏色的筆或不同的記號來區別每個區域的擁有者，在此我們以紅色代表先下者所得之地盤，以藍色代表後下者所得之地盤。

(二)勝負判定：

在 $m \times n$ 地盤中，若 $m+n$ 爲偶數，則對後下者有利(必至少可圍一塊)。反之，若 $m+n$ 爲奇數，則對先下者有利。故得勝的條件如下：

1.若 $m+n$ 爲偶數--稱之爲偶數型，則

先下者得勝條件： $f_{m \times n} \geq b_{m \times n}$ (即 先下者所圍地盤 \geq 後下者所圍地盤)

後下者得勝條件： $b_{m \times n} > f_{m \times n}$ (即 後下者所圍地盤數 $>$ 先下者所圍地盤數)

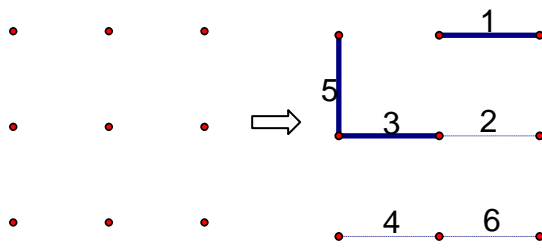
2.若 $m+n$ 爲奇數--稱之爲奇數型，則

先下者得勝條件： $f_{m \times n} > b_{m \times n}$ (即 先下者所圍地盤 $>$ 後下者所圍地盤)

後下者得勝條件： $b_{m \times n} \geq f_{m \times n}$ (即 後下者所圍地盤數 \geq 先下者所圍地盤數)

三、舉例說明：

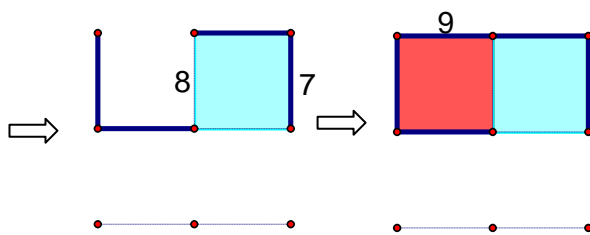
(一)以3×3地盤為例，先下者以實線（-）表示、後下者以虛線（--）表示。下圖步驟為一個3×3地盤玩法的部分過程。



先下者順序：1R2, 2R1, 1C1
後下者順序：2R2, 3R1, 3R2

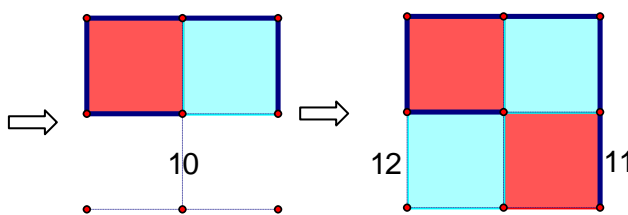
到此每個區塊都只剩 2 條邊能下，下一手就只能開始送地，我們也稱此狀況為收割。

(二)接下來，先下者3C1送了一塊地(後下者2C1得到一塊地-藍色區域)，先下者1R1則得一塊地(紅色區域)



先下者順序：..3C1, 1R1
後下者順序：..2C1,

(三)接下來，後下者必須送地，畫2C2...



先下者順序：... , 3C2。
後下者順序：..2C2, 1C2。

(四)結果 $f_{3 \times 3} : b_{3 \times 3} = 2 : 2$ ，因為3+3為偶數，故依據規則得知 先下者得勝。

四、研究過程

為方便我們做研究，我們從最小的3×3地盤開始，陸續探討偶數型3×5地盤、...等；
接下來繼續探討奇數型3×4地盤、3×6地盤、...等。

(一)3×3地盤(屬於偶數型)必勝策略之探討：

經過一番的輪流對戰後，我們歸納找出了後下者必勝的四種必勝圖，如下：

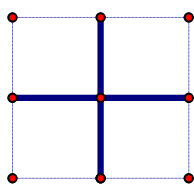


圖 1-1

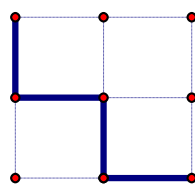


圖 1-2

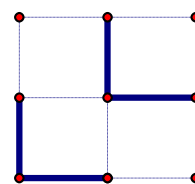


圖 1-3

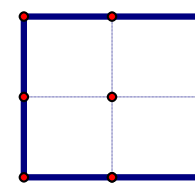
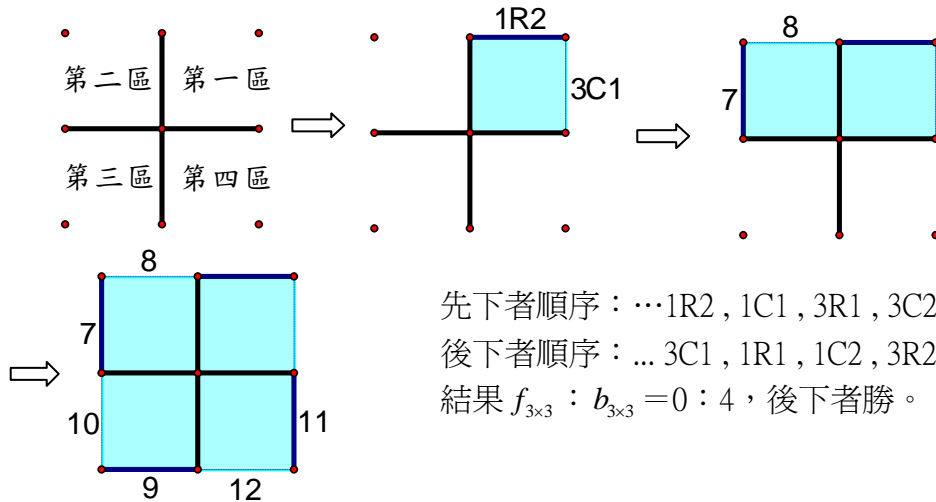


圖 1-4

接下來，我們證明圖 1-1~圖 1-4 為3×3地盤中後下者的必勝圖，分別如下：

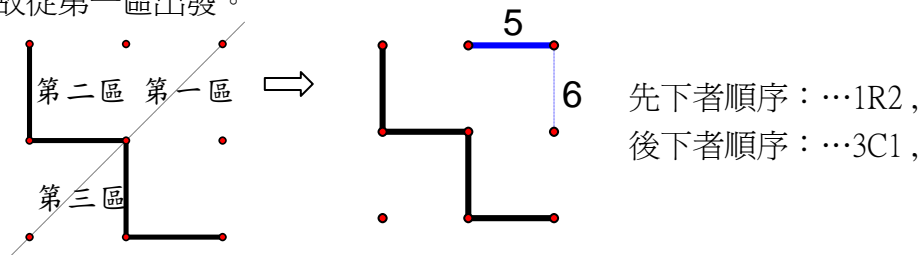
1.證明圖 1-1 為後下者之第一個必勝圖：

首先，將圖 1-1 先分 4 區。在第一區中，如果先下者第一手下 1R2，則後下者就下 3C1；反之則相反。其它區狀況同第一區，則結果 $f_{3 \times 3} : b_{3 \times 3} = 0 : 4$ ，後下者勝。

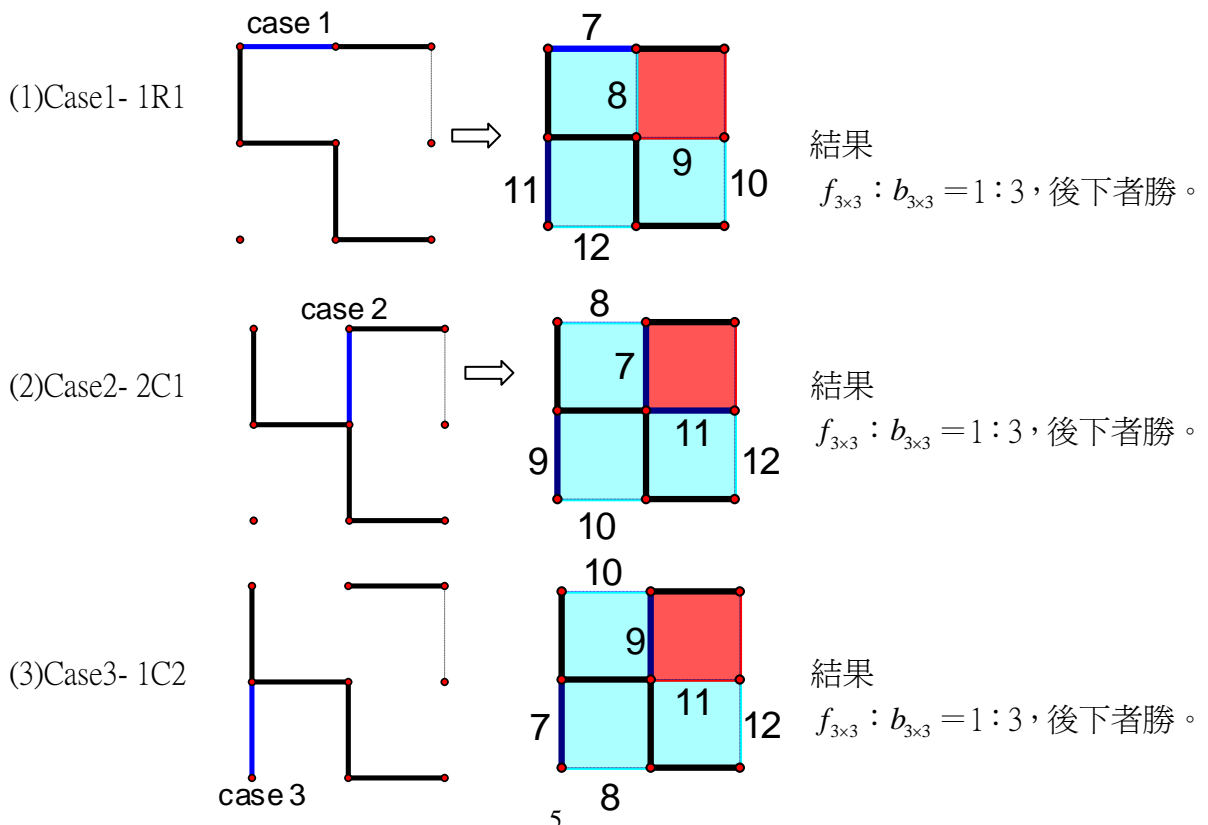


2.證明圖 1-2 為後下者之第二個必勝圖：

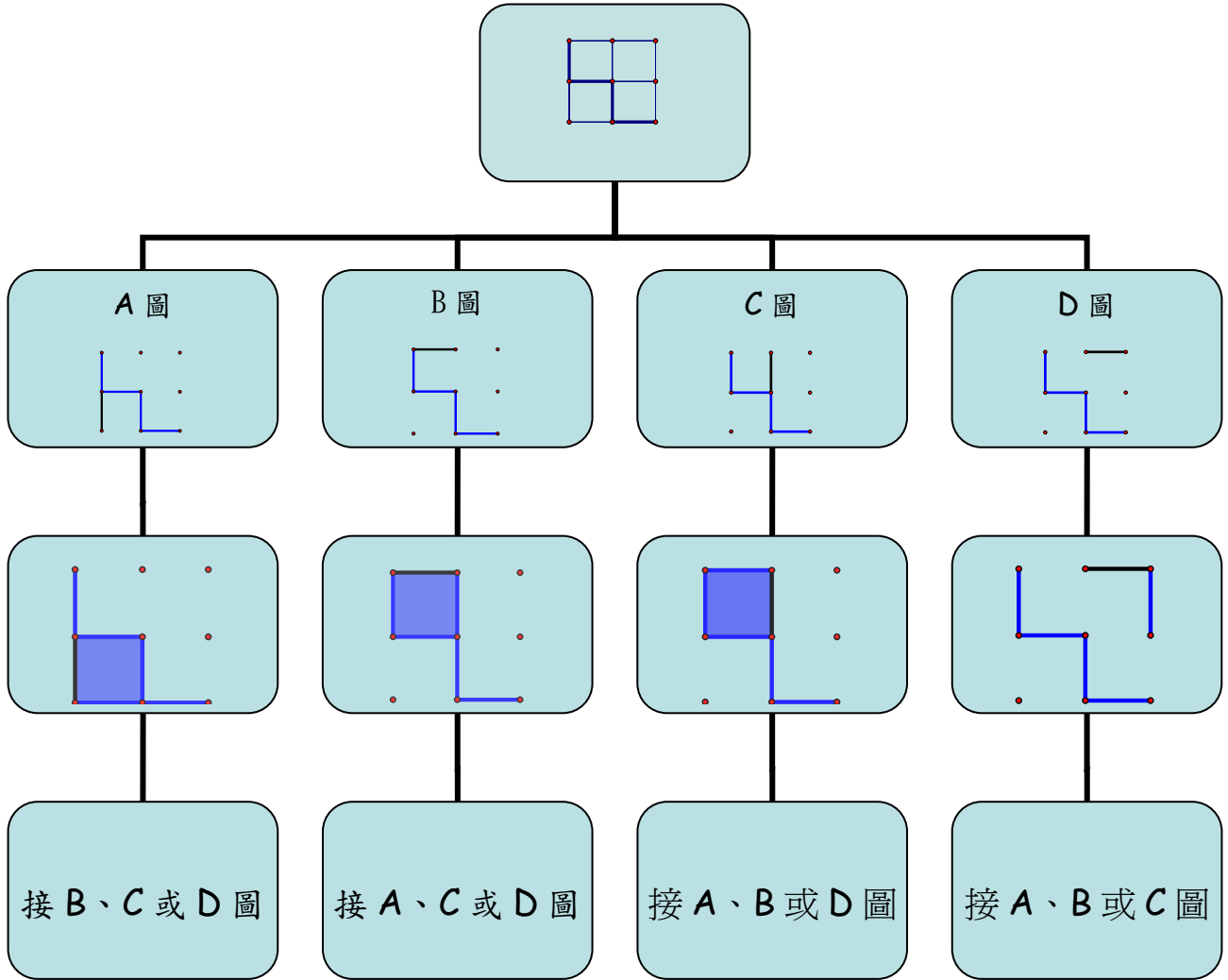
因為圖 1-2 為對稱圖形，所以我們考慮其中一側即可。其中第二區、第三區會有送地危機，故從第一區出發。



接下來先下者有三種下法，但結果 $f_{3 \times 3} : b_{3 \times 3} = 1 : 3$ ，皆為後下者獲勝。



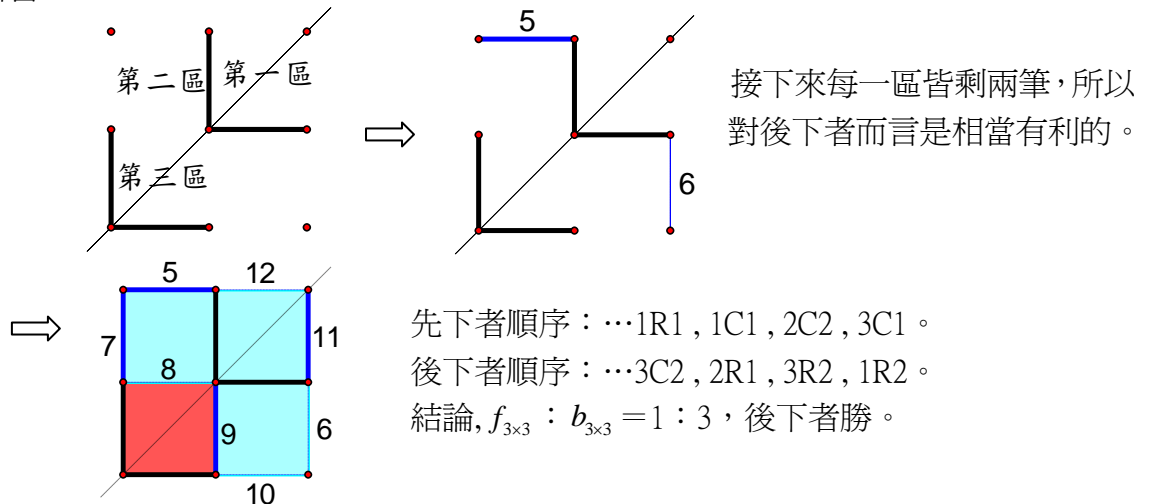
接下來分析如下：~~以下為後下者之必勝圖 1-2 之流程~~



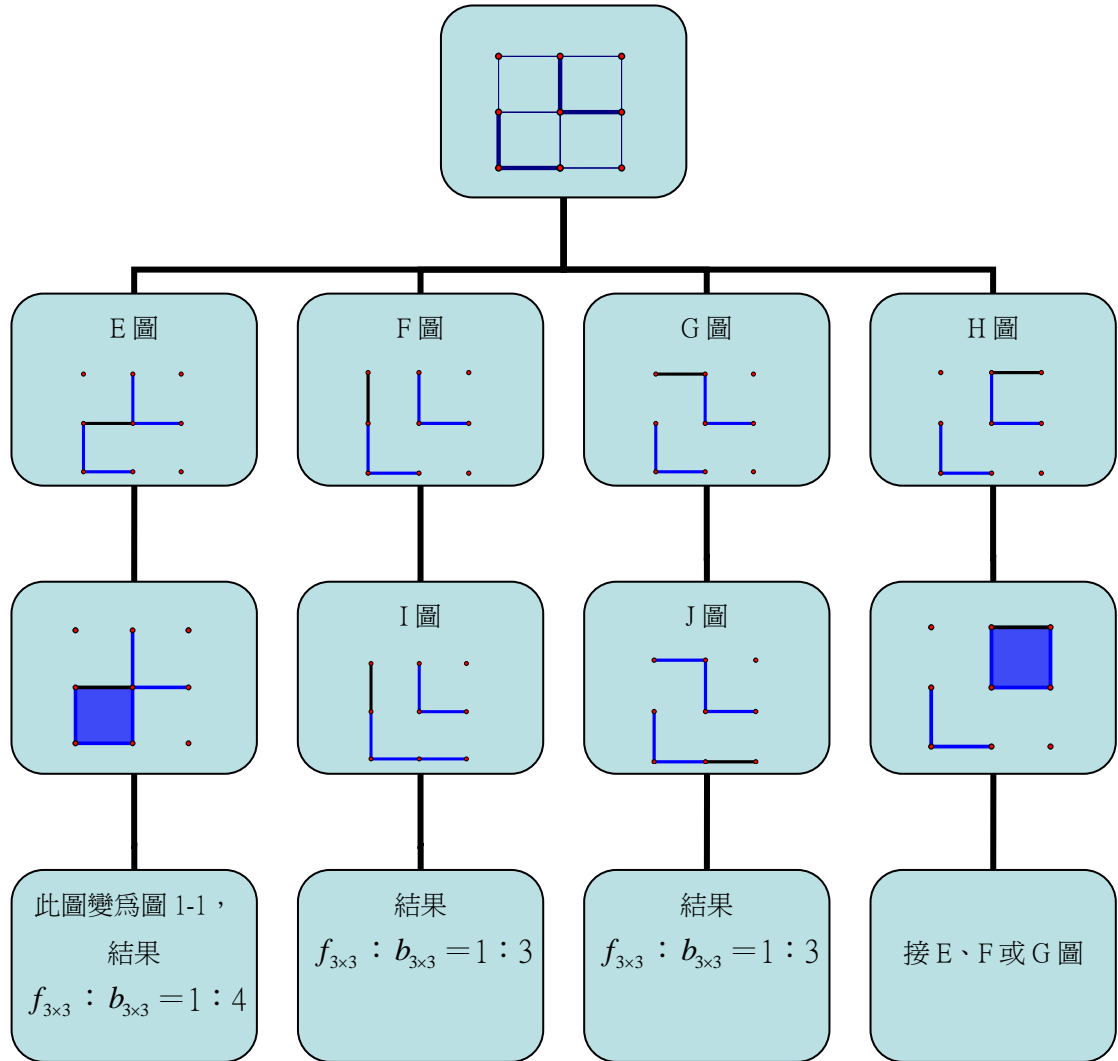
⇒ 必勝圖 1-2 結論：得出 $f_{3 \times 3} : b_{3 \times 3} = 1 : 3$ ，則後下者勝。

3. 證明圖 1-3 為後下者之第三個必勝圖：

圖 1-3 也為一個線對稱圖形，所以也考慮其中一側即可。而先下者若選擇第一區的 1R2 或第三區的 2R1，則勢必會送地，故先下者應該要選擇第二區的 1R1 或 1C1 較為恰當。



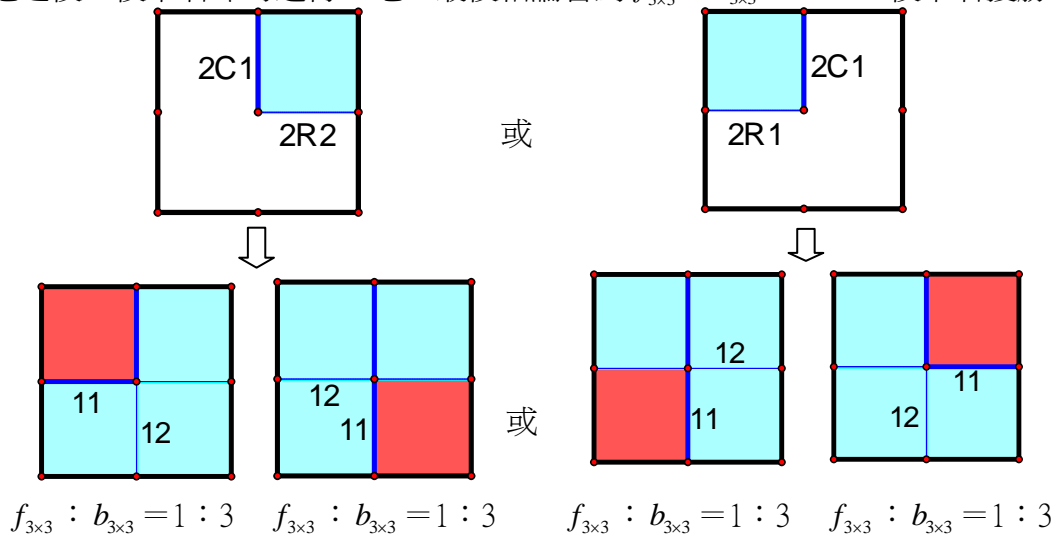
接下來分析如下：~~以下為後下者之必勝圖 1-3 之流程



最後結論為後下者獲勝。

4. 證明圖 1-4 為後下者之第四個必勝圖：

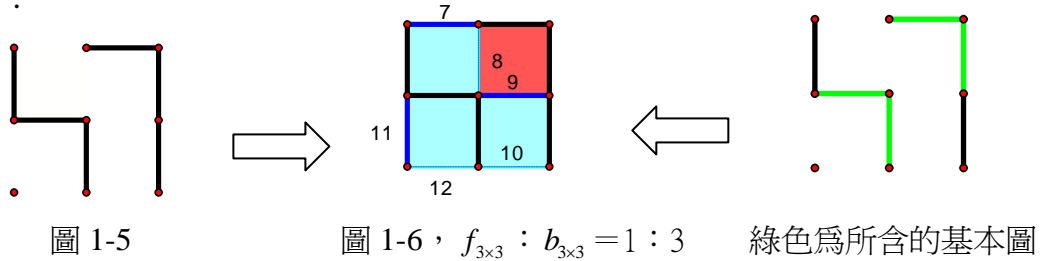
圖 1-4 中，如果先下者下 2C1，則後下者就下 2R2 or 2R1 得一地；接下來先下者得一地之後，後下者即可連得二地，最後結論皆為 $f_{3 \times 3} : b_{3 \times 3} = 1 : 3$ ，後下者獲勝。



5. 證明3×3地盤僅有此4個必勝圖：

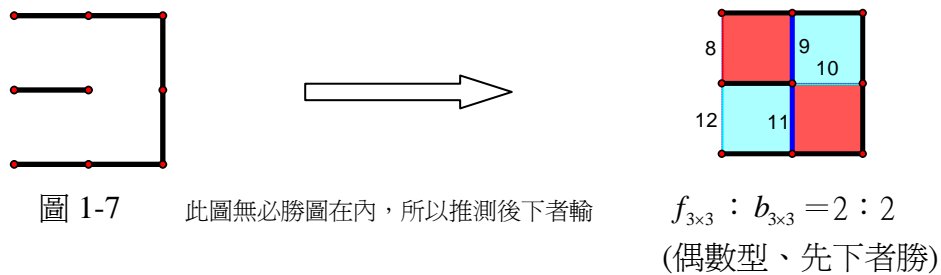
經過上述的證明，可以知道圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3、圖 1-4 皆為3×3地盤後下者的必勝圖。但是僅有此4個必勝圖嗎？答案是肯定的。

經過我們更進一步的研究，發現後下者所有的勝利情況皆能包含此4種必勝的基本圖，即是只要下出來的圖形中出現上述4種必勝圖的圖案，則此圖結果必為後下勝。證明如下：



因為圖中含有必勝圖(1-3)，如圖 1-6 所標示，因此當看到類似圖 1-5 這種圖形時，我們便能直接下定論：**不管如何此圖後下者必勝**。相反的如果圖中不含有此4種必勝圖，在不送地的情形下，則為後下者皆會輸。

以下舉例：



結論：由上述的許多流程圖中可看出3×3地盤的所有後下者必勝的圖形皆至少包含一種基本必勝圖(即是圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3、圖 1-4)，我們利用窮舉法 (Brute force attack) 驗證了3×3地盤後下者必勝的4個必勝圖。相反的，如果先下者想獲勝，則必須破壞後下者這4個必勝圖策略，這也就是先下者的必勝策略了。

6. 討論：由觀察可知，3×3地盤僅有的4個必勝圖皆為**線對稱圖形**，這就讓我們想到一個問題-『是否所有的線對稱圖形皆為必勝圖型呢？』，於是我們又著手檢視了上面的步驟，最後我們發現了一個結論為：必勝圖型必為線對稱圖形，但線對稱圖形不一定是必勝圖形，反例如下圖 1-8 及圖 1-9。

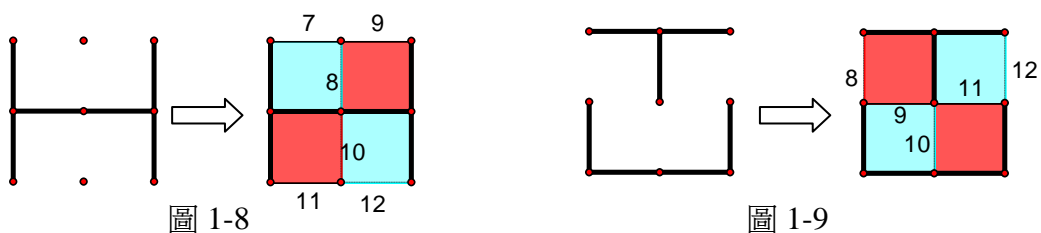


圖 1-8 及圖 1-9 皆為 $f_{3 \times 3} : b_{3 \times 3} = 2 : 2$ (偶數型、先下者勝)，所以說 線對稱圖形非為必勝圖型。

(二) 3×5 地盤(屬於偶數型)必勝策略之探討：

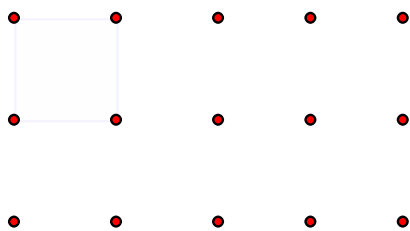


圖 2-1

如上圖 2-1，

1.此情況的總邊數是22條邊($(3-1) \times 5 + 3 \times (5-1) = 22$)，也就是說在這種情況下先下者與後下者雙方的總筆數加起來會等於22(偶數)，對後下者有力，因此依據規則

(1)先下者得勝條件： $f_{3 \times 5} \geq b_{3 \times 5}$ (即 先下者所圍地盤 \geq 後下者所圍地盤)

(2)後下者得勝條件： $b_{3 \times 5} > f_{3 \times 5}$ (即 後下者所圍地盤數 $>$ 先下者所圍地盤數)

2.所以在處理 3×5 地盤圖形時，對後下者而言，我們嘗試把他分為 2 個 3×3 地盤，再利用 3×3 地盤原本的必勝圖作組合。做法如下：想像從中切一線，左右兩側皆為一個 3×3 地盤的必勝圖，如圖 2-1-1。

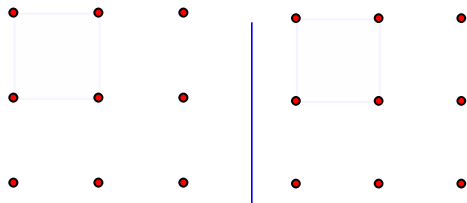


圖 2-1-1

因為如果下了此特別區域那就等於在左右 2 個 3×3 地盤各下一手，即表示其中一個 3×3 地盤變成先下者，另一個則為後下者，所以必須兩筆皆不畫或兩筆皆畫才能依照我們的想法讓後下者獲勝。而先下者要能獲勝的方法就是此兩筆僅畫其中一筆即可。

3.舉例說明如下：

如圖 2-1-2 所示。藍色框框為特別區，如果下了此特別區那就等於在左右 2 個 3×3 地盤各下一手，即表示其中一個 3×3 地盤變成先下者，另一個則為後下者，所以在下法上不管先下者或後下者，若能增取為每一區的後下者，則勝的機會就比較大。

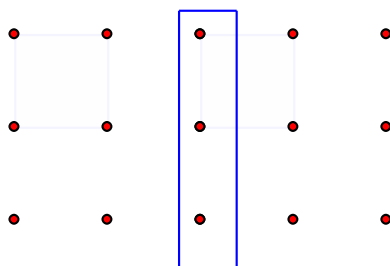


圖 2-1-2

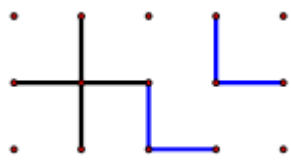


圖 2-3-1

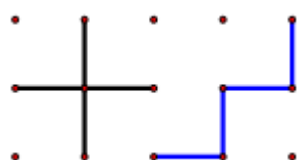


圖 2-3-2

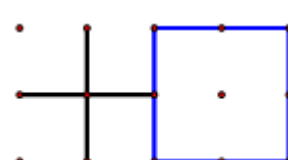


圖 2-3-3

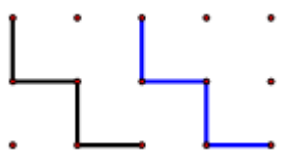


圖 2-3-4

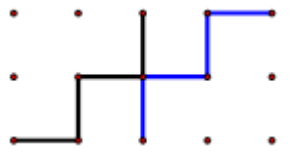


圖 2-3-5

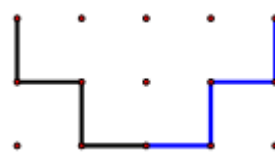


圖 2-3-6

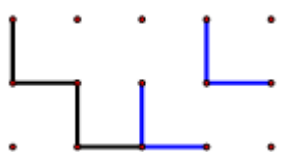


圖 2-3-7



圖 2-3-8

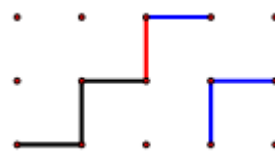


圖 2-3-9

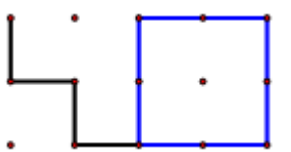


圖 2-3-10

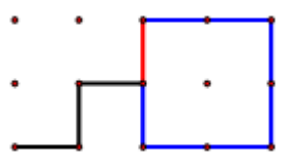


圖 2-3-11

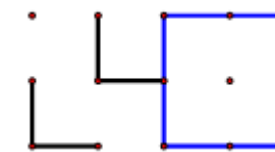


圖 2-3-12

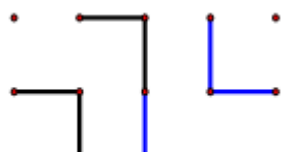


圖 2-3-13

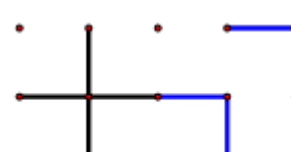


圖 2-3-14

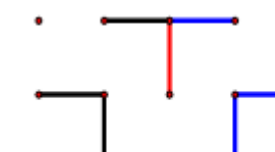


圖 2-3-15

舉一些例子證明如下：

a. 如圖 2-3-2a 為圖 2-3-2 的結果圖，其為 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 3 : 5$ ，後下者獲勝。

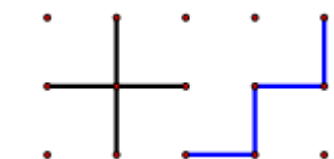


圖 2-3-2

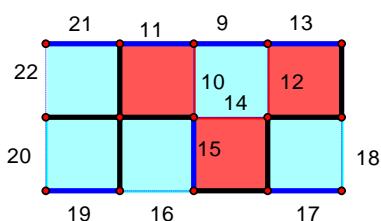


圖 2-3-2a

(2) 第二類---有輸有贏型：共有 6 種，分別證明如下：

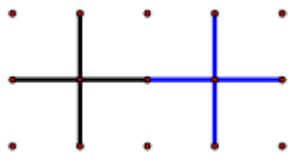


圖 2-3-16

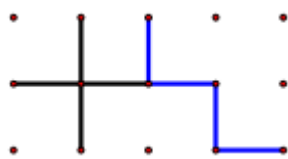


圖 2-3-17

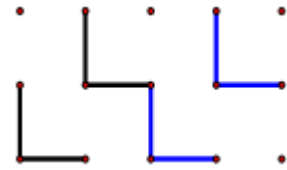


圖 2-3-18

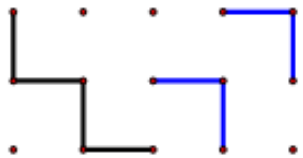


圖 2-3-19

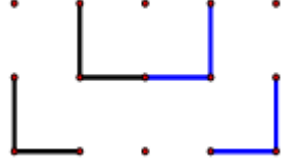


圖 2-3-20

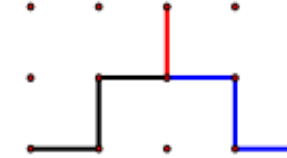


圖 2-3-21

- a. 如圖 2-3-16a 為圖 2-3-16 先下者勝之結果圖，其為 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 4 : 4$ ，先下者獲勝。而圖 2-3-16b 為圖 2-3-16 後下者勝之結果圖，其為 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 4 : 4$ ，後下者獲勝。其勝負關鍵為在圖 2-3-16c 中後下者接下來的這一步。若後下者下在 3C2、3R2 或 3R3 中，則 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 2 : 6$ ，後下者必勝；否則結果為 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 4 : 4$ ，先下者獲勝。

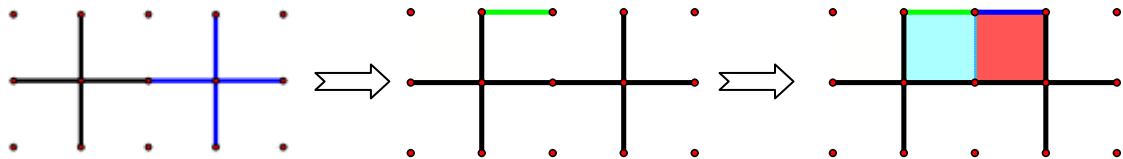


圖 2-3-16

圖 2-3-16c

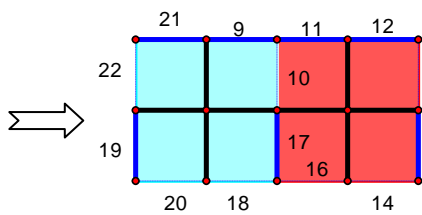


圖 2-3-16a

或

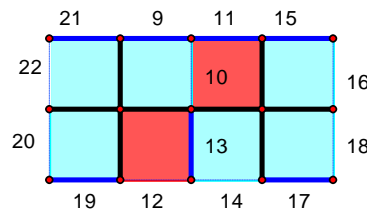


圖 2-3-16b

- b. 如圖 2-3-17a 為圖 2-3-17 先下者勝之結果圖，其為 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 6 : 2$ ，先下者獲勝。而圖 2-3-17b 為圖 2-3-17 後下者勝之結果圖，其為 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 3 : 5$ ，後下者獲勝。其勝負關鍵為在圖 2-3-17c 中的 A、B 區。若後下者下在 A 區，先下者獲勝；若後下者下在 B 區，則後下者獲勝。

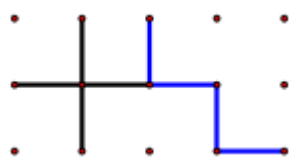


圖 2-3-17

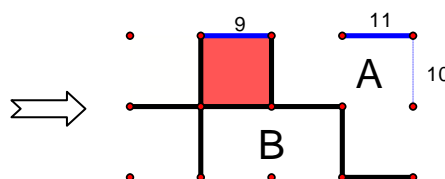
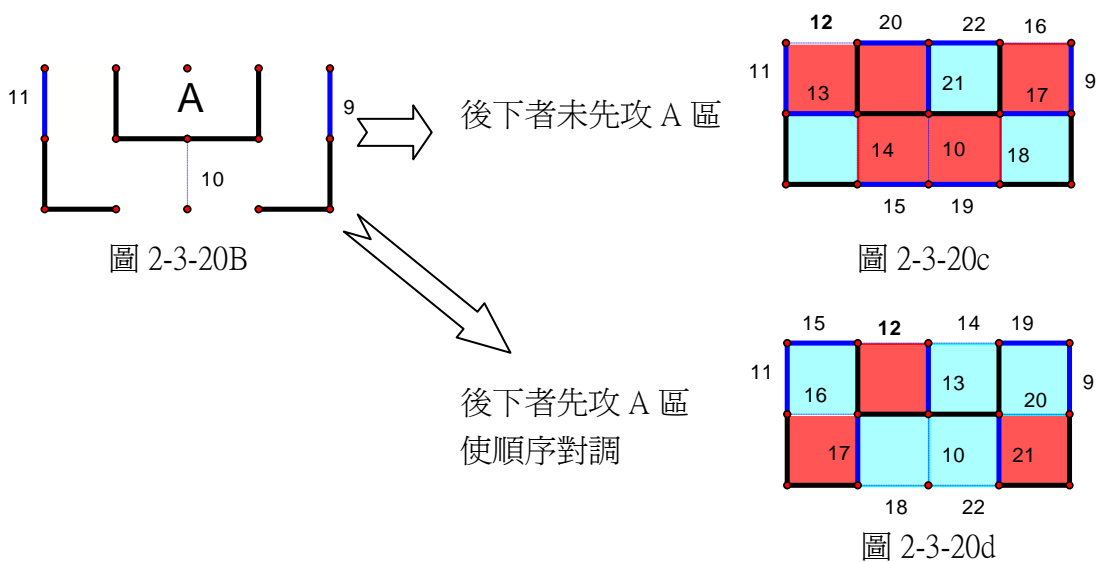
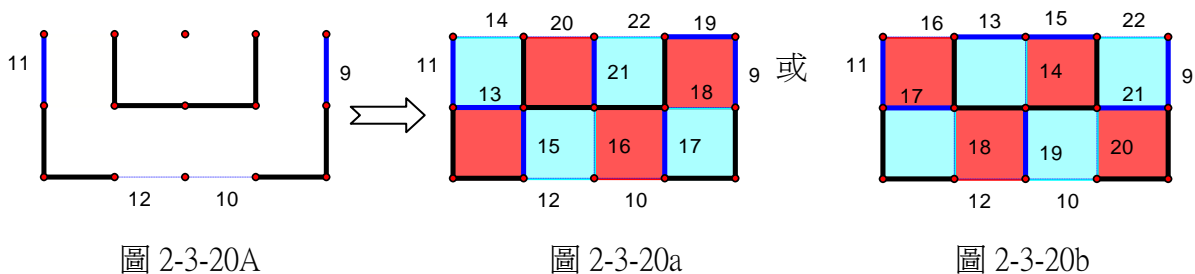
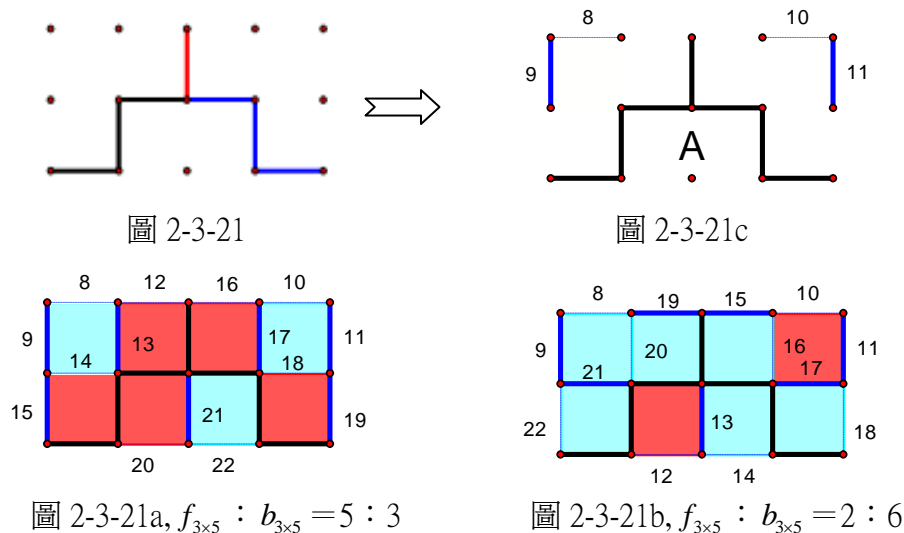


圖 2-3-17c

e. 如圖 2-3-20a、2-3-20b 及 2-3-20c 為圖 2-3-20 先下者勝之結果圖，其為 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 4 : 4$ 或 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 5 : 3$ ，先下者獲勝。而圖 2-3-20d 為圖 2-3-20 後下者勝之結果圖，其為 $f_{3 \times 5} : b_{3 \times 5} = 3 : 5$ ，後下者獲勝。其勝負關鍵為在圖 2-3-20 中的補法不同上。當補法為 [1C1、3C2、3R3、5C1] 如圖 2-3-20A，則先下者勝；當補法為 [1C1、3C2、5C1] 如圖 2-3-20B，若後下者先攻 A 區可使順序對調，而造成後下者獲勝，如圖 2-3-20d。



f. 圖 2-3-21 勝負關鍵在於 A 區。在圖 2-3-21c 中，若後下者下在 A 區，則後下者獲勝，如圖 2-3-21b；若後下者非下在 B 區，則先下者獲勝，如圖 2-3-21a。



3. 「三筆畫+連續」型：此類型為一個三筆畫結束的圖形加上一個「連續」型的圖形，若是三筆畫結束的圖形先下，下法為[先者下一筆-後者吃-先者吃-後者下一筆-先者吃-後者吃-先者吃…同樣一直吃到底]，或是先下「連續」型之圖形[先者下一筆-後者吃-先者吃…吃到不能再吃後先者下一筆-後者吃-先者吃]，但不管先下哪裡，結果都相同，雙方各吃三塊，達到平手，同樣為**後下者獲勝**，如圖 4-7,圖 4-8。

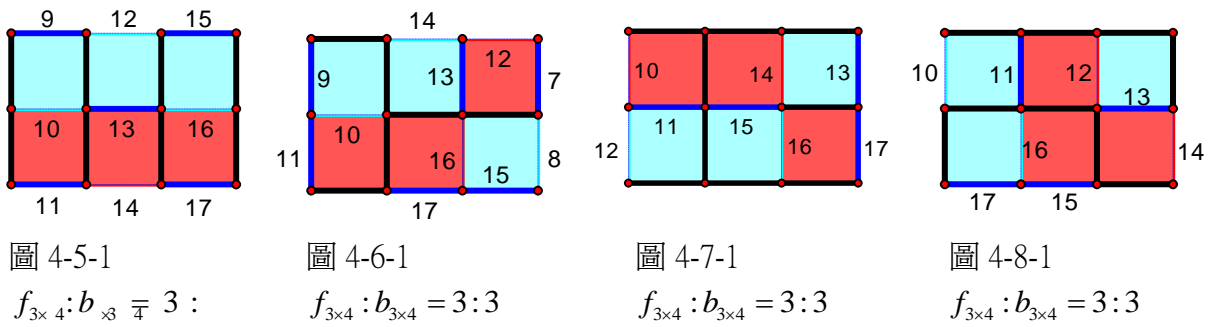
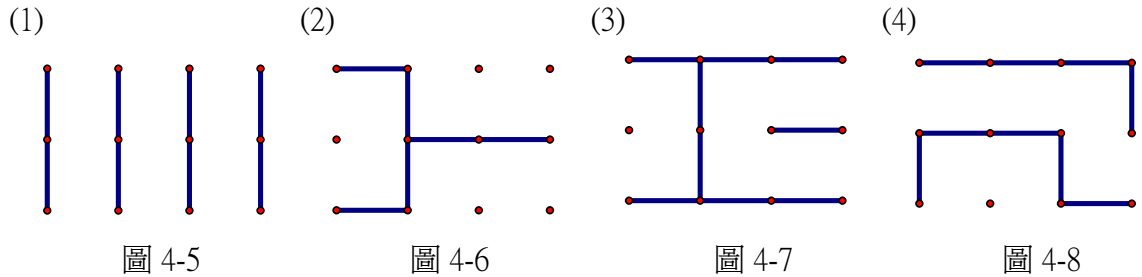


圖 4-5-1

$$f_{3 \times 4} : b_{3 \times 4} = 3 : 3$$

圖 4-6-1

$$f_{3 \times 4} : b_{3 \times 4} = 3 : 3$$

圖 4-7-1

$$f_{3 \times 4} : b_{3 \times 4} = 3 : 3$$

圖 4-8-1

$$f_{3 \times 4} : b_{3 \times 4} = 3 : 3$$

4. 「封閉」型：封閉圖的圖形有兩種可能性，第一種為 3*3 圖形大小的封閉圖形，若是先下者要先送一塊地的話，按照 3*3 必勝圖的理論，誰先下封閉圖形誰輸，所以先下者要先下別的地方，等待後下者下封閉圖形才會贏。第二種為 3*4 大小的封閉圖形，就直接按照[先者下一筆-後者下一筆-先者吃-後者吃-先者吃-後者吃-先者吃]的步驟，結果為 $f_{3 \times 4} : b_{3 \times 4} = 4 : 2$ ，**先下者獲勝**，如下列各圖：

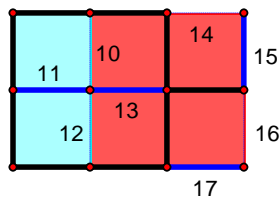
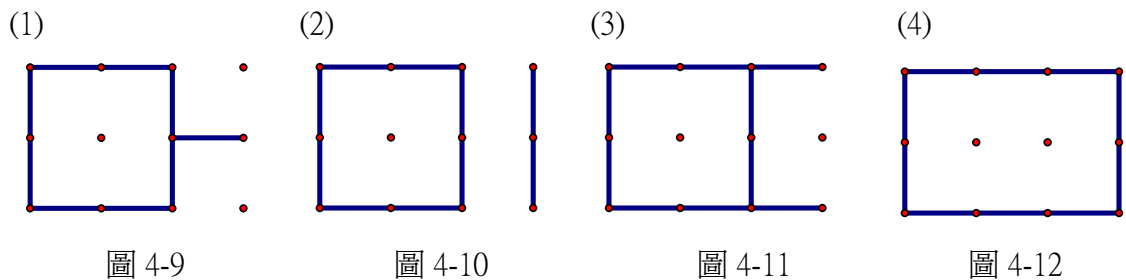


圖 4-9-1

$$f_{3 \times 4} : b_{3 \times 4} = 4 : 2$$

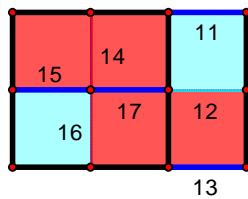


圖 4-10-1

$$f_{3 \times 4} : b_{3 \times 4} = 4 : 2$$

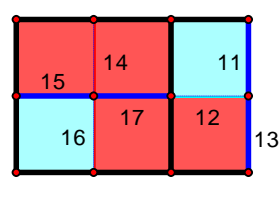


圖 4-11-1

$$f_{3 \times 4} : b_{3 \times 4} = 4 : 2$$

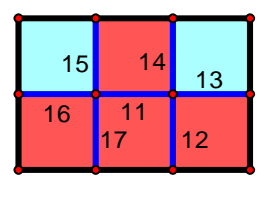
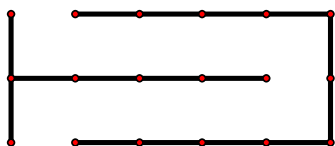
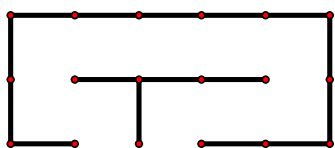
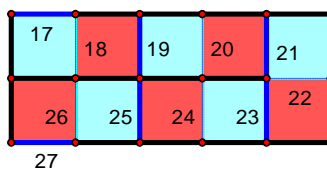


圖 4-12-1

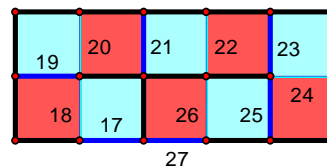
$$f_{3 \times 4} : b_{3 \times 4} = 4 : 2$$



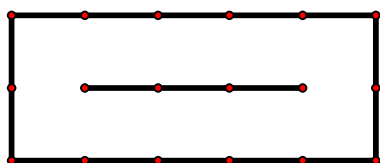
5 : 5



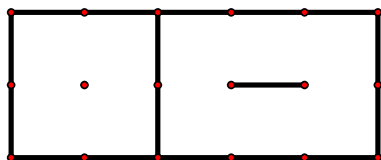
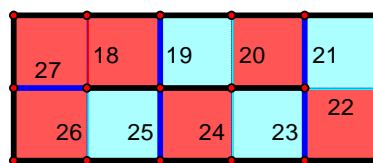
5 : 5



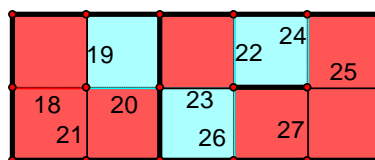
(2)進出相同型：



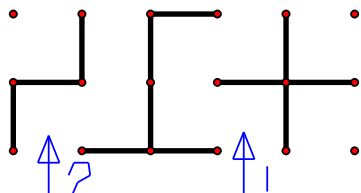
6 : 4



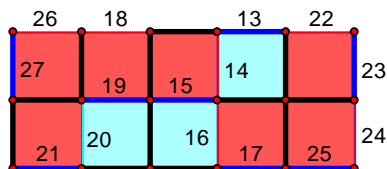
7 : 3



(3)其他類型：



7 : 3

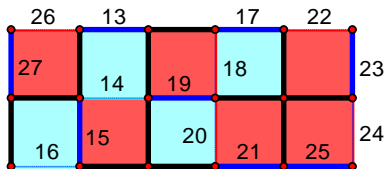


換先下，先下勝，但要先下箭頭處！

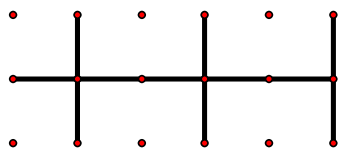
↑₁ → 箭頭1 結果

換先下者下,先下者一定要下箭頭處,其中箭頭1處可以改變順序,使後下者必須先下左上,右上,右下的L形區域

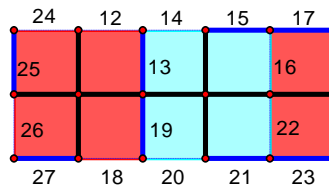
6 : 4



↑₂ → 箭頭2 結果



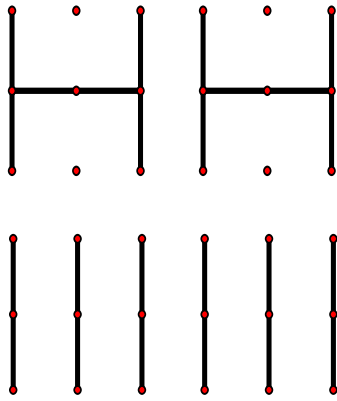
6 : 4



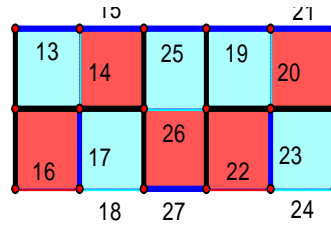
換後下，先下勝

換後下下,再換了四次順序後,由後下者必須畫下左上和左下的第一筆,使那兩塊地都給先下者吃去了

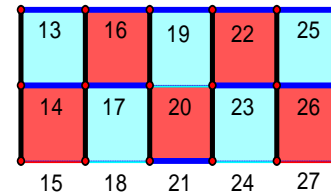
(4)三筆畫結束型：



5 : 5



5 : 5



(六)探討 $3 \times 2n$ 及 $(2h+1) \times 2n$ 地盤之後下者的必勝技巧，是否與前者奇數型有相關？此類型地盤比較變化多端，目前正積極研究中。

(七) 4×4 地盤(屬於偶數型)之探討：

經過我們分析研究後，發現 4×4 地盤的勝負關係大多皆為後下者勝，如圖 7-1~圖 7-15。而少數狀況會根據不同下法而使先下者可反敗為勝，如圖 7-16、圖 7-17-2、圖 7-18-2、圖 7-19-2 等。

分析方式為依據不送地的概念有如下數個基本圖，分析方式如下：

(1)

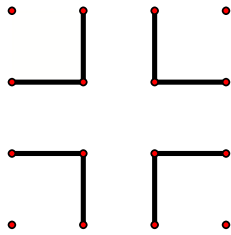


圖 7-1

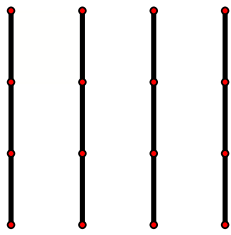


圖 7-2

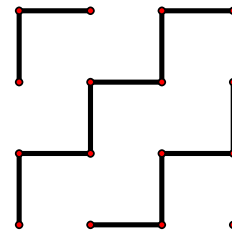


圖 7-3

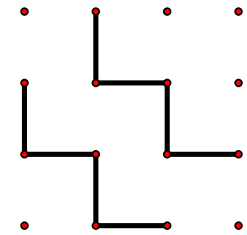


圖 7-4

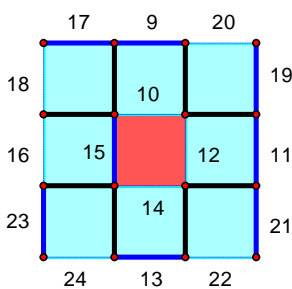


圖 7-1-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 1 : 8$$

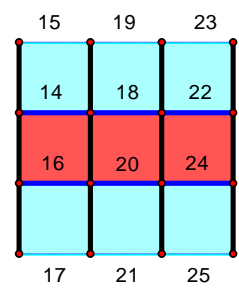


圖 7-2-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 3 : 6$$

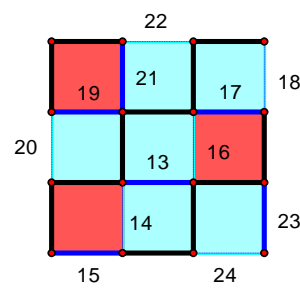


圖 7-3-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 3 : 6$$

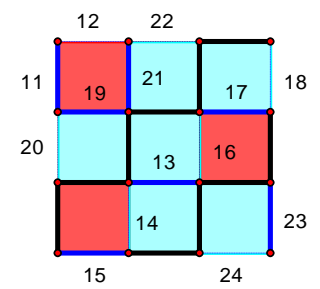


圖 7-4-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 3 : 6$$

(2)

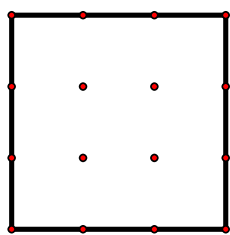


圖 7-5

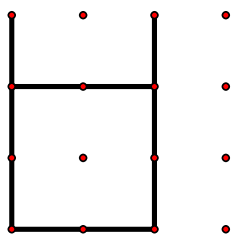


圖 7-6

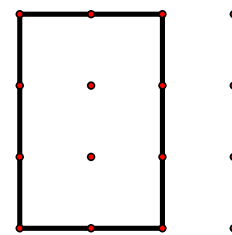


圖 7-7

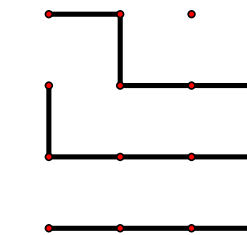


圖 7-8

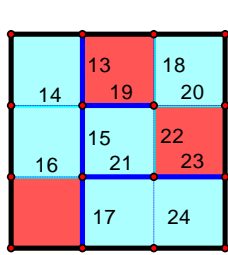


圖 7-5-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 3 : 6$$

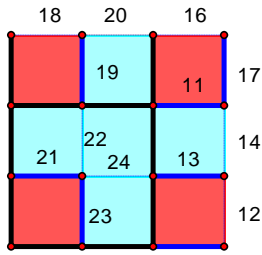


圖 7-6-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 4 : 5$$

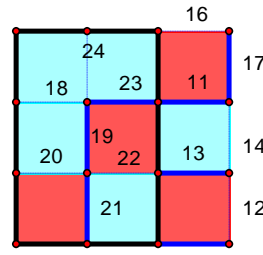


圖 7-7-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 4 : 5$$

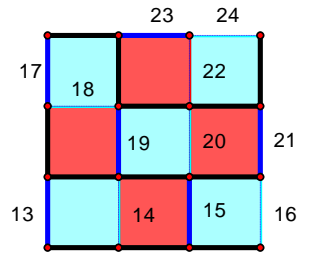


圖 7-8-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 4 : 5$$

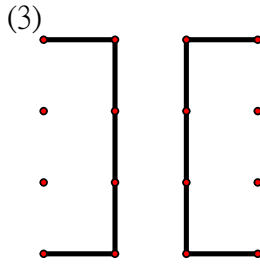


圖 7-9

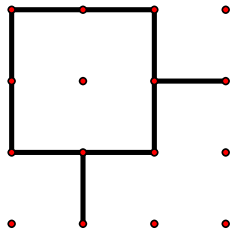


圖 7-10

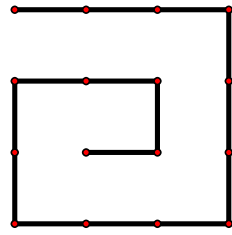


圖 7-11

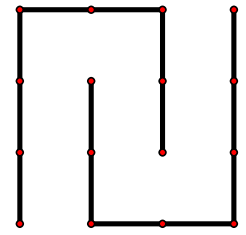


圖 7-12

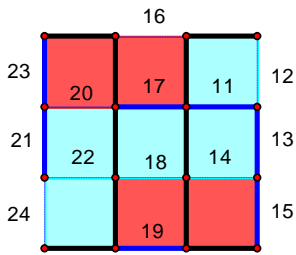


圖 7-9-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 4 : 5$$

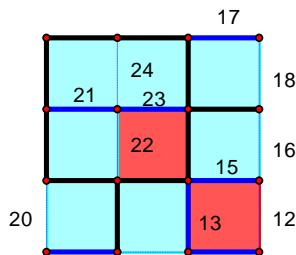


圖 7-10-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 2 : 7$$

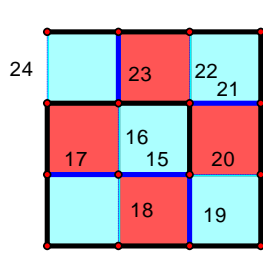


圖 7-11-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 4 : 5$$

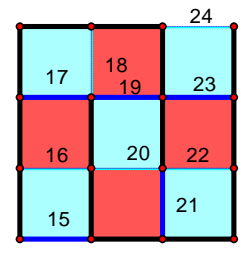


圖 7-12-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 4 : 5$$

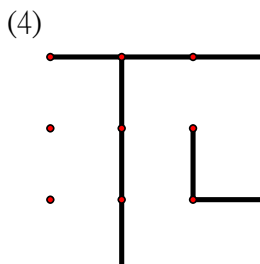


圖 7-13

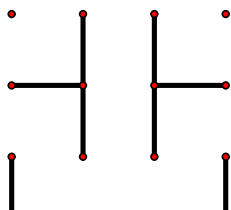


圖 7-14

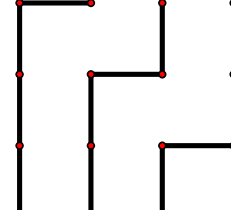


圖 7-15

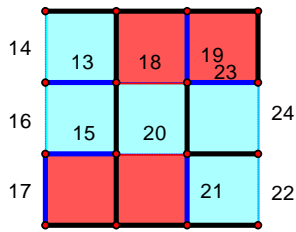


圖 7-13-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 4 : 5$$

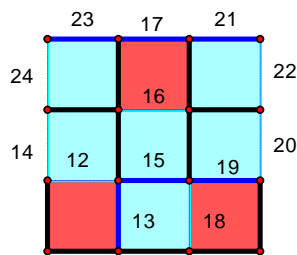


圖 7-14-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 3 : 6$$

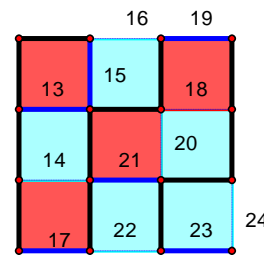


圖 7-15-1

$$f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 4 : 5$$

結論：圖 7-18 關鍵處的兩處若皆下或皆不下，則後下者勝；若僅下一處，則先下者勝。

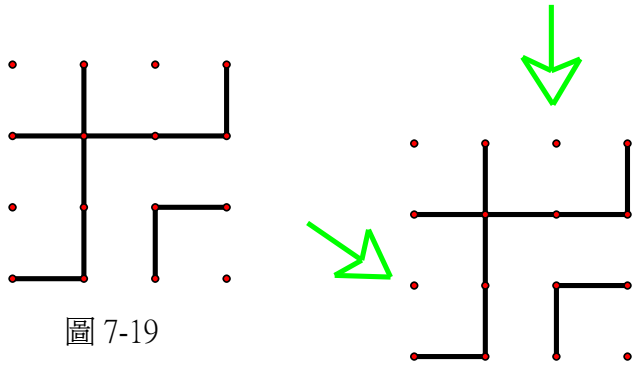


圖 7-19

圖 7-19 勝負關鍵為箭頭所指的這兩處。

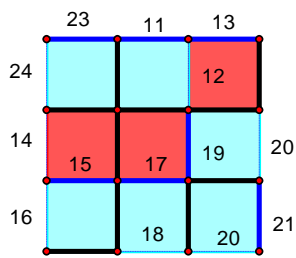


圖 7-19-1：兩處皆下
 $f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 3 : 6$

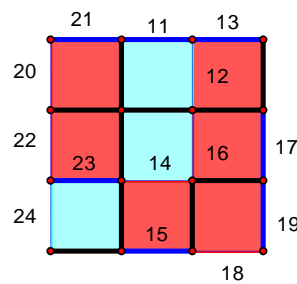


圖 7-19-2：僅下一處
 $f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 6 : 3$

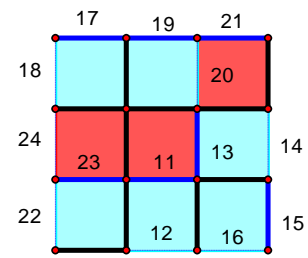


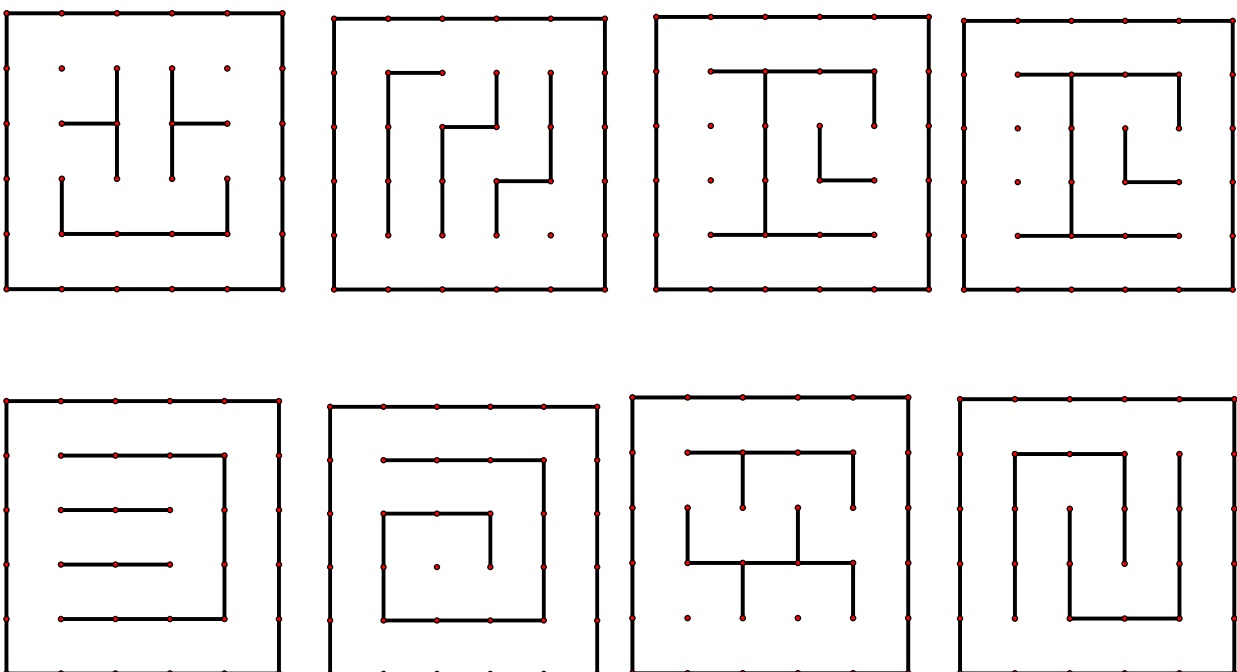
圖 7-19-3：兩處皆不下
 $f_{4 \times 4} : b_{4 \times 4} = 3 : 6$

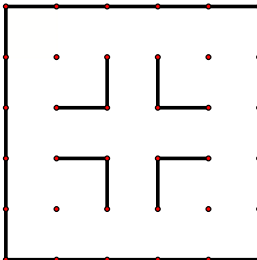
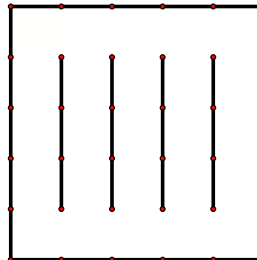
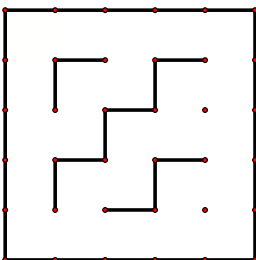
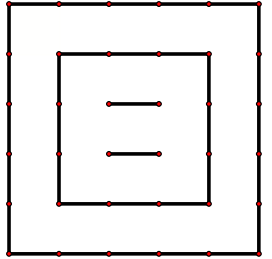
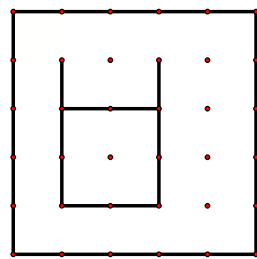
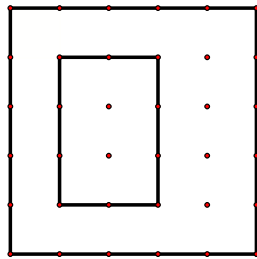
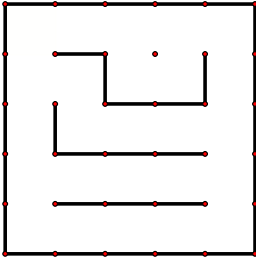
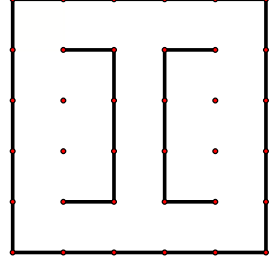
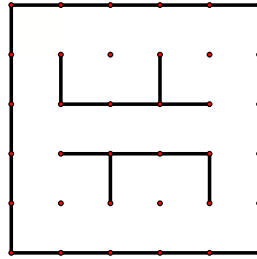
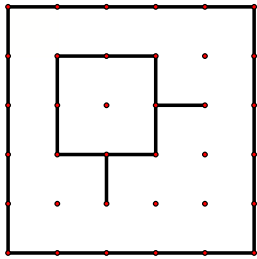
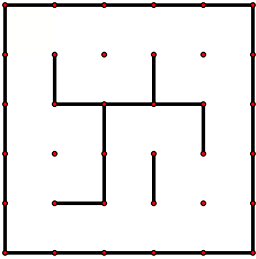
結論：圖 7-19 關鍵處的兩處若皆下或皆不下，則後下者勝；若僅下一處，則先下者勝。

(八) 6×6 地盤(屬於偶數型)之探討：

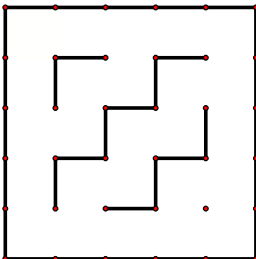
與 4×4 地盤的想法一致，我們一樣從不讓地的走法開始探討。

(1) 『外圍一圈型』：此類型皆為後下者勝。

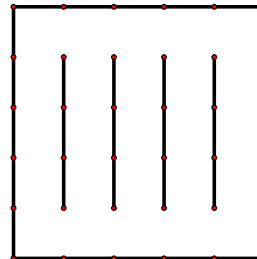




11 : 14



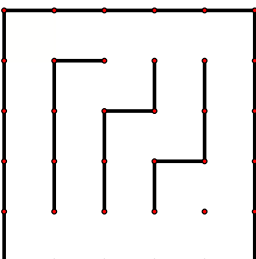
50	49	48	39	40
51	45	46	37	41
52	44	35	36	42
53	33	34	59	43
54	55	56	60	57



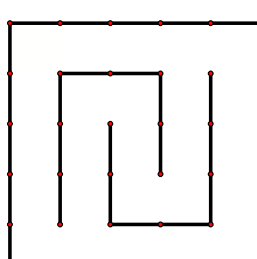
12 : 13

35	40	33	50	60	59
36	41	48	51	58	
37	42	47	52	57	
38	43	46	53	56	
39	44	45	54	55	

12 : 13



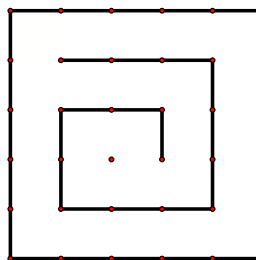
46	45	60	59	58
47	35	36	39	56
48	34	41	40	55
49	33	42	44	43
50	51	52	53	



11 : 14

39	40	41	42	53	54
38	46	47	52	55	
37	45	48	51	56	
36	44	49	50	57	
35	43	60	59	58	

12 : 13



35	36	37	38	39	40
51	52	53	54	41	
50	59	60	55	42	
49	58	57	56	43	
48	47	46	45	44	

※證明： $2n \times 2n$ 地盤 ($n \in N$) 在不讓地原則下，每種基本圖後下者皆必有獲勝機會。

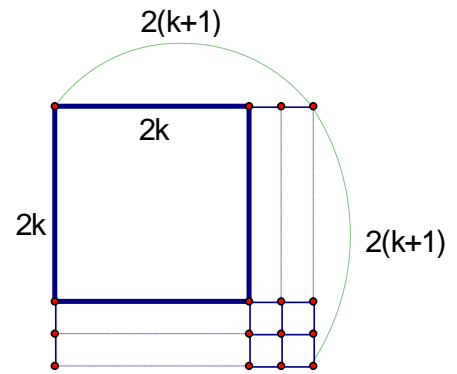
1⁰ 已知 $n=1$ 時， $f_{2 \times 2} : b_{2 \times 2} = 0 : 1$ 恆成立。

2⁰ 設 $n=k$ 時，此命題成立，

即是 $f_{2k \times 2k} < b_{2k \times 2k}$ 。

則

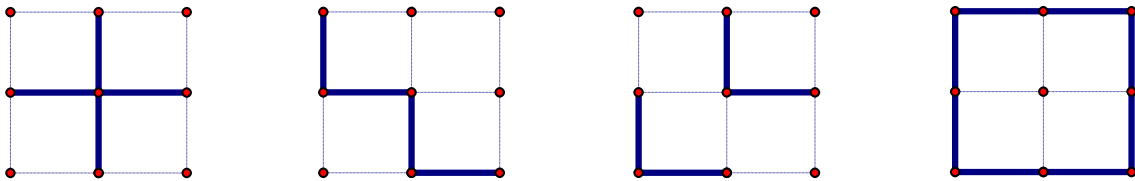
當 $n=k+1$ ，如右圖可知 $2(k+1) \times 2(k+1)$ 地盤比 $2k \times 2k$ 地盤多出來的部分正好為一個 $3 \times 4k$ 地盤，而依據 $3 \times 2k$ 地盤的結論可知，只要能夠適當注意順序調換問題，後下者必能有獲勝機會。



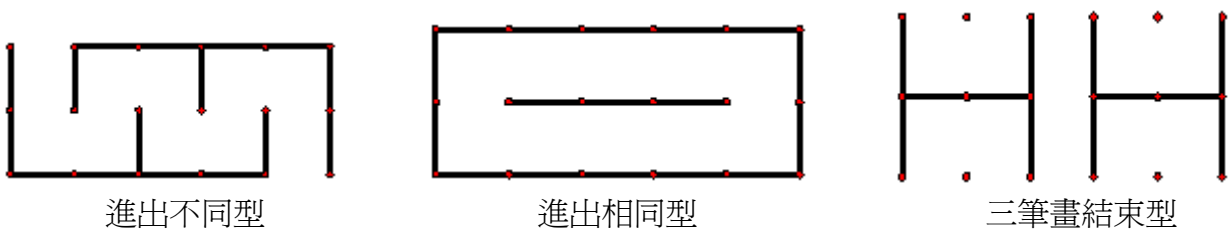
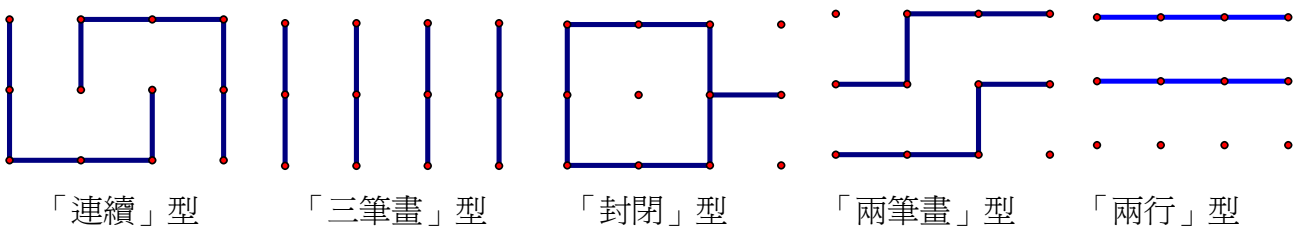
3⁰ 由數學歸納可知，原命題成立。

伍、研究結果

以 3×3 地盤必勝策略的 4 種必勝圖(如下 4 圖)為基本元素做為策略做推廣而達到必勝的目的。



使能推廣至 3×5 地盤..等進而推出 $3 \times (2k+1)$ 地盤的必勝技巧。接下來，再探討奇數型地盤必勝圖，以 3×4 地盤、 3×6 地盤為基礎推廣出 $3 \times 2k$ 地盤的必勝技巧，其中必勝圖則分類分為「連續」型、「三筆畫」型、「封閉」型、「兩筆畫」型及「兩行」型等來作為歸納及勝負的判斷，舉例如下：

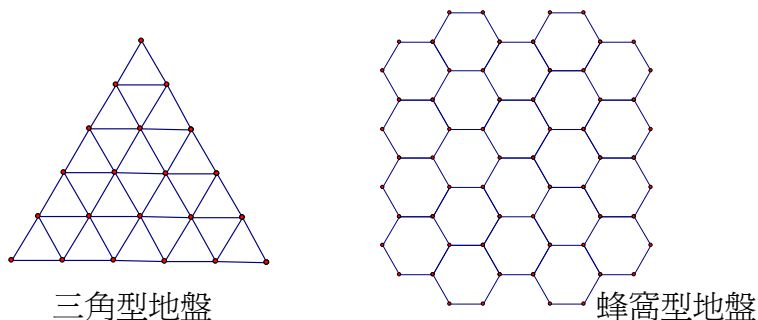


而後再研究 2×2 地盤、 4×4 地盤及 6×6 地盤的相關性，並探討 $2k \times 2k$ 地盤的必勝策略。我們也發現了必勝圖型必為線對稱圖形，但線對稱圖形不一定是必勝圖形之特性。

陸、討論

此題目對於國中生而言是相當有挑戰性及有趣性，特別是探討 $m \times n$ 地盤時是無法舉例說明的，必須利用歸納、推廣的結果來作推論。

另外，可推廣的類似方向尚有許多種類，諸如：三角型地盤、蜂窩型地盤等，如下圖。



而在規則上對於玩法也可以做許多變動，例如：當一方得一地後，可立即再下一筆的玩法，皆是相當有趣、有挑戰性的。

參考文獻

壹、中文部分

【一本書】

夏興國（1999）。數學歸納法縱橫談。台北市：九章。

貳、網路資源

【分享網站】

UEPlay 游藝館：<http://blog.ueplay.com/>。一個探討童玩、玩具、遊戲、游藝、教育的空間。紙筆遊戲-圍地盤(Dots and Boxes)，取自：<http://blog.ueplay.com/?p=1723>

【評語】 030424

本作品作者群利用圍地盤遊戲進行窮舉法探討，進而延伸討論展現團體創意，唯必勝策略的思考若能重新定義（比照井字遊戲……），及進行 $N \times N$ 的延伸，將會使此作品，更具意義！