中華民國第52屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030414

m×n 硬幣移位與數列關聯性的探討

學校名稱：新北市立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 鄔能興	黃元占
國二 鄧景升	洪駿源
國三 鄔瑞珍	

關鍵詞：巴斯卡三角形、指數律、二進位

$m \times n$ 硬幣移位與數列關聯性的探討

摘要

將$m \times n$個矩形排列的硬幣，依序予以編號，並按照研究規則作移位，最後將$m \times n$個硬幣疊成一柱。首先，我們根據遊戲規則並利用巴斯卡三角數列，得到$m \times n$完成移位方法數的通式：$f(m \times n) = g_{s+1}(t+1) \times 2^{s+t}$　(其中$2^{s-1} < m \le 2^s$，$2^{t-1} < n \le 2^t$)。

接著，我們探討硬幣排列操作所得數列間之關聯性，找到「行列操作互換」、「逆排列」以及「擴增數列」等性質，以二進位表示法的觀念，利用「**錯序**」、「**補 0**」和「**移序**」的方法，將1×2^t排列推廣到$1 \times n$排列，再推廣至$m \times n$排列。

壹、研究動機

學校資優營隊老師問我們「1×10的硬幣排列透過向右、左、上、下堆疊方式把硬幣疊成一柱，最後硬幣排列的順序會是如何呢？」看似簡單的題目引起我們想玩的動機。繁鎖的操作過程中，我們很好奇最後排列順序彼此之間是否有關聯性？甚至是我們是否有辦法從只利用 1 枚硬幣輕鬆的推論出$m \times n$個硬幣排列的結果呢？於是我們就一頭栽入這奇妙的硬幣排列世界中。

貳、研究目的

一、$m \times n$的硬幣排列之方法數的尋找。

二、對於1×2^t的硬幣排列，當完成操作，其數列間的關聯性。

三、對於$2^s \times 2^t$的硬幣排列，當完成操作，其數列間的關聯性。

四、對於$1 \times n$的硬幣排列，當完成操作，其數列間的關聯性。

五、對於$m \times n$的硬幣排列，當完成操作，其數列間的關聯性。

參、研究設備及器材

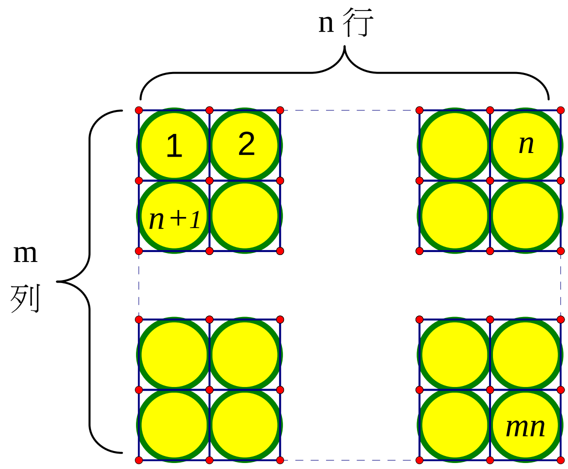
一、有編號之遊戲紙牌

二、電腦與 GSP 幾何繪圖軟體

肆、研究過程

※硬幣移位之規則※

硬幣編號：給定排列為矩形之相同硬幣 $m \times n$ 個，我們規定 m 為「橫列」數，n 為「直行」數，對於每個硬幣由左而右、由上而下依序予以編號(1、2、3、…、$m \times n$)，如下圖：



[步驟一]：沿著矩形 $m \times n$ 任選一條對稱軸(註)，將此對稱軸兩側中其中一側的硬幣做向右(R)，或向左(L)，或向下(D)，或向上(U)的平移至對稱軸的另一側，並與另一側的硬幣重疊，此時硬幣排列成

$$\left[\frac{m+1}{2}\right] \times n \text{或} m \times \left[\frac{n+1}{2}\right] \text{之矩形。}$$

註：若為正方形排列，我們不採用以對角線為對稱軸。因為如此的平移並不能將對稱軸兩側的硬幣重疊。[ ]：表是高斯記號。

[步驟二]：同[步驟一]的操作方式，將硬幣沿著矩形 $\left[\frac{m+1}{2}\right] \times n$ 或 $m \times \left[\frac{n+1}{2}\right]$ 的對稱軸，做向右(R)，或向左(L)，或向下(D)，或向上(U)的平移至對稱軸的另一側且與另一側的硬幣重疊。

重複上述步驟，當所有硬幣疊成一堆，這種過程，稱為一種操作方法。

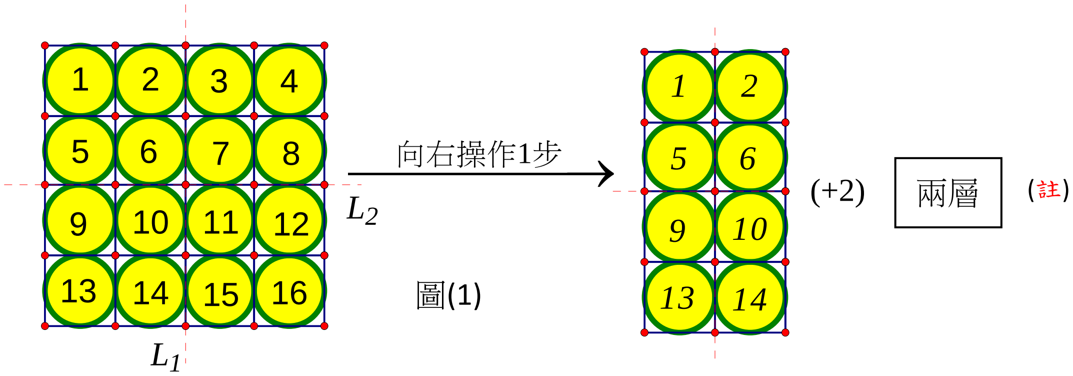
我們稱上述的每次[步驟]完成，稱為「操作一次」，簡記為「一步」。

為方便敘述，我們做以下定義：

根據遊戲規則，我們可依據對稱軸是否通過硬幣來定義：

1. 完全堆疊

對於 $m \times n$ 的硬幣排列，當考慮一步的移位，其對稱軸不通過硬幣，稱為[**完全堆疊**]。如圖(1)。

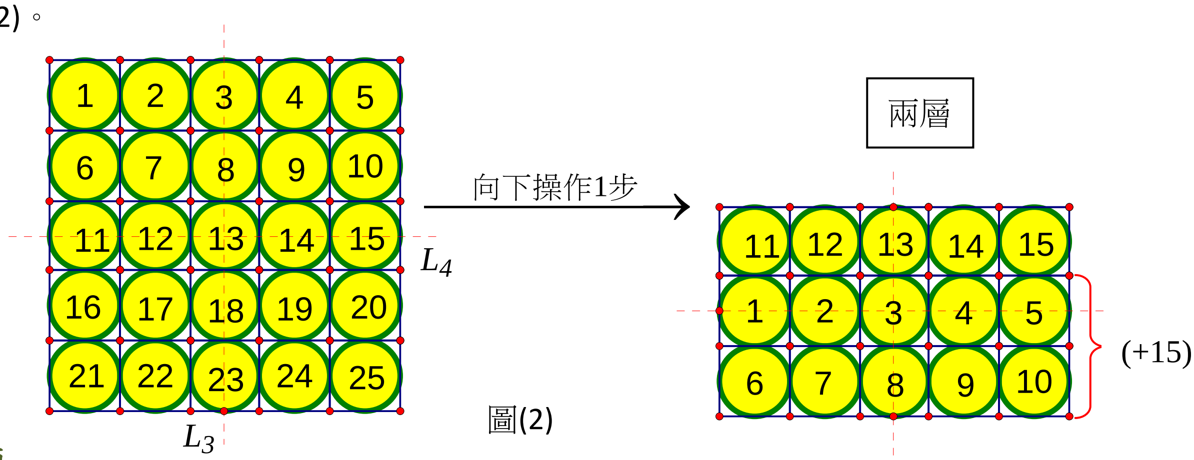


圖(1)

(註)：(+2)表示圖中硬幣編號，下一層比上一層多 2。

2. 不完全堆疊

對於 $m \times n$ 的硬幣排列，當考慮一步的移位，其對稱軸通過硬幣，稱為[**不完全堆疊**]。如圖(2)。



圖(2)

3. 完美類

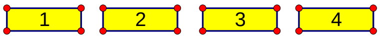
對於 $m \times n$ 的硬幣排列，當操作完成，過程中每步皆以[完全堆疊]來操作，稱之。

根據定義，顯然 $m \times n$ 排列若為[完美類]，則必型如 $2^s \times 2^t$ 。

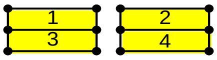
4. 不完美類

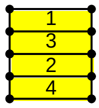
對於 $m \times n$ 的硬幣排列，當操作完成，不屬於[完美類]者，稱之。

【實例】: 1×2^2 排列 [RR]　　　　　[起始位置]



第 1 步　R(向右)操作　　　　　　第 2 步　R(向右)操作





$\Rightarrow$ 可得數列：1，3，2，4

圖形說明：1.第 1 步、第 2 步為[完全堆疊]。

2.因為過程中皆為[完全堆疊]，所以為 1×2^2 [完美類]。

3.[RR]稱為 1×2^2 的一種操作方法。

根據研究目的與遊戲規則，我們擬出研究主題如下：

【研究一】 $m\times n$ 硬幣排列之方法數的推導

【研究二】 [完美類]硬幣排列操作之數列的關聯性

【研究三】 [不完美類]硬幣排列操作之數列的關聯性

接著進入我們的研究：

【研究一】 $m\times n$ 硬幣排列之方法數的推導

一、$2^s\times 2^t$ 排列操作完成之方法數研究

1. 1×2^t 排列操作完成之方法數：

由於每 1 步的操作，只能 R(右)、L(左)兩種選擇，且操作完成需要 t 步。

因此方法數，共有 2^t 種。

2. $2^s\times 2^t$ 排列操作完成之方法數：

定義 $f(2^s\times 2^t)$：表示依據本研究的遊戲規則，將 $2^s\times 2^t$ 個硬幣疊成一柱之方法數。

根據遊戲規則

[步驟一]：若向右(或向左)移位，則行數減半。即 $2^s\times 2^t\rightarrow 2^s\times 2^{t-1}$

[步驟二]：若向上(或向下)移位，則列數減半。即 $2^s\times 2^t\rightarrow 2^{s-1}\times 2^t$

可得下面關係式：

$$f(2^s \times 2^t) = 2f(2^{s-1} \times 2^t) + 2f(2^s \times 2^{t-1})$$

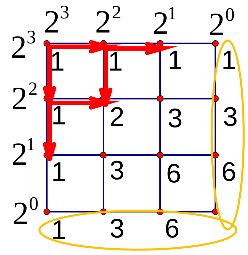
利用此關係式，並重複上述步驟，可得完成操作過程中不同移位產生方法數的變化累積表：

(1) $2^3 \times 2^3$ 排列

說明：① 左上角為起始位置，表示為 $2^3 \times 2^3$ 排列，有兩個方向選擇(如右表中的箭號方向。)

② 表中 1 單位移動表示 1 步移位。

③ 每 1 步移位有兩種變化(左與右或上與下)

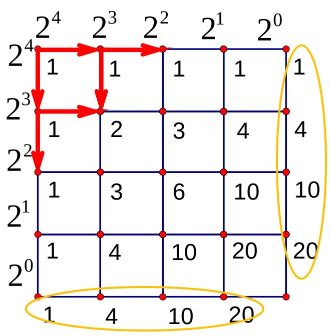


邊界係數

因此，從右表中可得移動完成的方法數： $f(2^3 \times 2^3) = 2(1+3+6) \times 2^6 = 1280$

同樣的方式，我們可得下面例子的方法數：

(2) $2^4 \times 2^4$

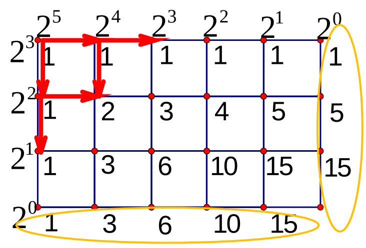


邊界係數

移動完成的方法數：

$$f(2^4 \times 2^4) = 2(1+4+10+20) \times 2^8$$
$$= 17920$$

(3) $2^3 \times 2^5$



邊界係數

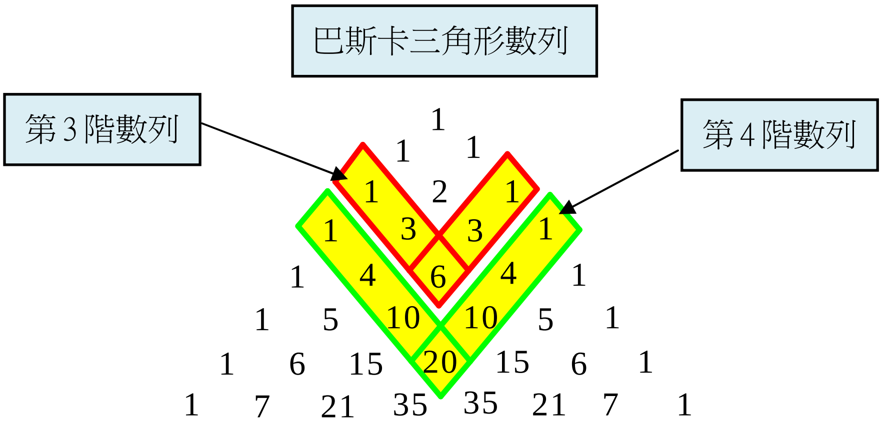
移動完成的方法數：

$$f(2^3 \times 2^5) = (1+3+6+10+15+1+5+15) \times 2^8$$
$$= 14336$$

進一步，我們可推廣到 $2^s \times 2^t$ 排列，以累積表找出「邊界係數」，計算出方法數。至於，通式如何推導？以下是我們的探討：

$f(2^s \times 2^t)$通式的推導：

由上述累積表，我們可發現其產生的方式與巴斯卡三角形數列的產生類似。



比較兩者的關係發現：

<發現 1> $f(2^3 \times 2^3)$與 $f(2^4 \times 2^4)$ 其累積表完成時的邊界係數，分別為巴斯卡三角形紅框與綠框之數列(上圖中，斜向 45° 第 3 階的前 3 項與第 4 階的前 4 項)。

<發現 2> 利用巴斯卡三角數列，我們找到第 3 階的前 3 項之和等於第 4 階第 3 項；第 4 階的前 4 項之和等於第 5 階第 4 項。

<發現 3> 因此，我們可將 $f(2^4 \times 2^4)$的方法數求得的方式改成下面過程：

假設斜向 45° 第 n 階的數列為$\langle g_n \rangle$，則：

$$f(2^4 \times 2^4) = 2[g_4(1) + g_4(2) + g_4(3) + g_4(4)] \times 2^{4+4}$$

$$= 2g_5(4) \times 2^8$$

$$= 2 \times 35 \times 256 = 17920$$

同樣的方式，我們可推出下列一般化的通式：

1. $f(2^t \times 2^t) = 2[g_t(1) + g_t(2) + \cdots + g_t(t)] \times 2^{2t} = 2g_{t+1}(t) \times 2^{2t}$ ----------- (公式 1)

2. 對於 $f(2^s \times 2^t)$

我們先觀察巴斯卡三角數列，

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

可得下列關係式

(1) $g_n(k) = g_{n-1}(1) + g_{n-1}(2) + \cdots + g_{n-1}(k)$

(2) $g_n(k) = g_k(n)$

(3) $g_n(k) = g_{n-1}(k) + g_n(k-1)$

利用上述關係式，可推得

$$f(2^s \times 2^t) = \{[g_t(1) + g_t(2) + \cdots + g_t(s)] + [g_s(1) + g_s(2) + \cdots + g_s(t)]\} \times 2^{s+t}$$

$$= [g_{t+1}(s) + g_{s+1}(t)] \times 2^{s+t}$$

$$= [g_{t+1}(s) + g_t(s+1)] \times 2^{s+t}$$

$$= [g + (s+1) + g_{t+1}(s)] \times 2^{s+t}$$

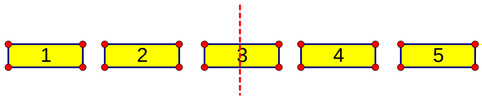
$$= g_{t+1}(s+1) \times 2^{s+t}$$

或 $= g_{s+1}(t+1) \times 2^{s+t}$ -----------(公式 2)

二、 $m\times n$ 排列操作完成之方法數研究

(一) $1\times \boldsymbol{n}$ 排列($\boldsymbol{n}$ 不是型如 2^t 之樣式)方法數的推導

1、以 1×5 排列為例： [起始位置]



我們窮舉如下：

① $[RRR]$：1，4，3，2，5 ② $[RRL]$：3，2，5，1，4

③ $[RLR]$：2，5，3，1，4 ④ $[RLL]$：1，4，2，5，3

⑤ $[LLL]$：5，2，3，4，1 ⑥ $[LRR]$：5，2，4，1，3

⑦ $[LRL]$：4，1，3，5，2 ⑧ $[LLR]$：3，4，1，5，2

從上述的數列中，我們發現 1×5 的數列共有 8 個，與 1×2^3 的方法數相同。

2、$1\times n$ 排列的方法數推導：

(1) 我們從 1×5 排列的窮舉中，很容易的可知道 1×6 排列、1×7 排列、1×2^3 排列其操作步數皆為 3 步，所以其方法數都為 8 種。

(2) 同樣的，我們也可得到 $1\times 9 \sim 1\times 2^4$ 排列其操作步數皆為 4 步，方法數都為 16 種。如此下去，可得

(3) $2^{t-1} < n \le 2^t$ 其操作步數皆為 t 步，所以 $1\times n$ 排列的方法數為 2^t -----(公式 3)

(二) $\boldsymbol{m}\times \boldsymbol{n}$ 排列($\boldsymbol{m}$ 、 $\boldsymbol{n}$ 不同時為 2^t 之樣式)方法數的推導

當 $2^{s-1} < m \le 2^s$ ， $2^{t-1} < n \le 2^t$ 利用(公式 2)，可推得

$$f(m\times n) = f(2^s \times 2^t) = [g_{t+1}(s) + g_{s+1}(t)]\times 2^{s+t}$$

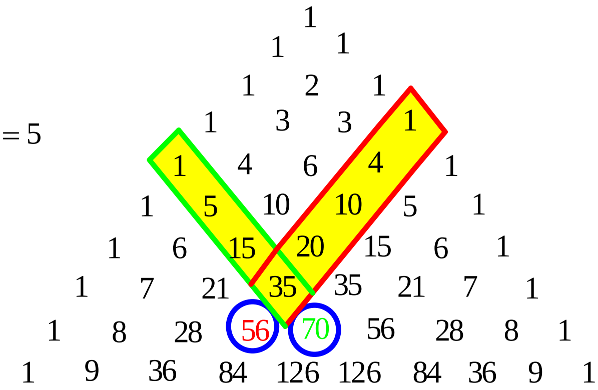
$$= g_{t+1}(s+1)\times 2^{s+t} \quad \text{或} \quad = g_{s+1}(t+1)\times 2^{s+t} \text{ -----(公式 4)}$$

【實例】 13×27 排列方法數

因為 $2^3 < 13 \le 2^4$ ， $2^4 < 27 \le 2^5$ ，可得 $\boldsymbol{s}=4$ ， $\boldsymbol{t}=5$

所以 $f(13\times 27) = f(2^4 \times 2^5) = (56+70)\times 2^9$

$$= g_6(5)\times 2^9 = g_5(6)\times 2^9 = 64512$$

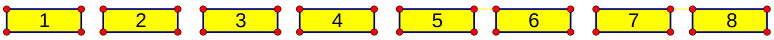


【研究二】[完美類]硬幣排列操作之數列的關聯性

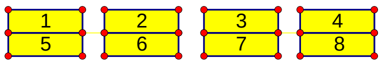
【研究二之 1】1×2^t[完美類]硬幣排列操作之數列的關聯性：

一、1×2^t 排列 R、L 互換與數列的關聯性

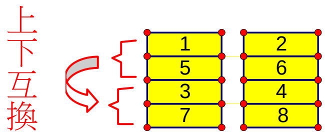
以1×2^3排列為例　　　　　　　　起始位置

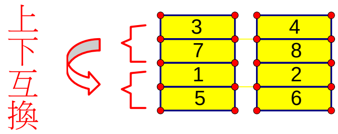


第 1 步　R 操作

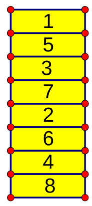


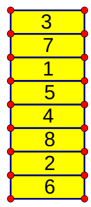
第 2 步　R 操作　　　　　　第 2 步　L 操作





第 3 步　R 操作　　　　　　第 3 步　R 操作





分析：上述兩種操作[RRR]與[RLR]，只有在第 2 步 R 與 L 互換，其他操作方向皆相同，又因為完成第 1 步時共兩層，所以兩種數列的結果，只要透過下面操作，皆可互推完成：

依序由上而下每 2 個數一組，且依序兩兩一組上下互換而成。

我們將上述只有在 1 步不同的操作寫成 <性質 1>

<性質 1> 對於1×2^t 排列，當操作完成，過程中僅第 i 步不同(即第 i 步左右互換)時，則產生的兩數列，其關聯性依序由上而下每 2^{i-1} 個數一組，且依序兩兩一組上下互換而成。

理由：因為前 $i-1$ 步相同表示操作 $i-1$ 次，所以產生 2^{i-1} 層。因此，當第 i 步左右互換後，必然會形成每 2^{i-1} 個數一組，依序由上而下，每相鄰兩組順序對調。

【實例】1×2^4 排列

[$RRRR$]　$\boxed{1，5，9，13}$，$\boxed{3，7，11，15}$，$\boxed{2，6，10，14}$，$\boxed{4，8，12，16}$

[$RRLR$]　$\boxed{3，7，11，15}$，$\boxed{1，5，9，13}$，$\boxed{4，8，12，16}$，$\boxed{2，6，10，14}$

二、逆排列

當所有的操作皆形成 R 與 L 互換，此時兩種操作，可視為將原硬幣的編號由左而右，改成由右而左。換言之，原編號 k 改成以編號 (2^t-k+1) 來替代，即可讓兩種數列互推完成。因此，我們可將此條件下得到的結果，寫成 <性質 2>

<性質 2> 對於 1×2^t 排列，當操作完成，過程中 R 與 L 完全互換(例：$[LRL]$，$[RLR]$)，則兩數列皆可透過將編號 k 改成編號 (2^t-k+1) 來完成。即此兩數列會形成「**逆排列**」。

【實例】 1×2^3 排列 $[LRL]$： 6，2，8，4，5，1，7，3

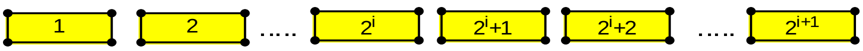
$[RLR]$： 3，7，1，5，4，8，2，6

三、尋找 1×2^i 排列的擴增數列

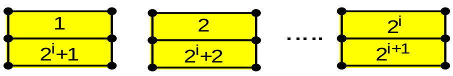
$1\times 2^{i+1}$ 排列之 $[\underbrace{RRR...R}_{\text{共 } i+1 \text{ 個}}]$ 產生的數列可由 1×2^i 之 $[\underbrace{RR...R}_{\text{共 } i \text{ 個}}]$ 產生的數列得到。

理由：對於 $1\times 2^{i+1}$ 排列的操作

起始位置



$\boxed{\text{第一步}}$ R 操作



1、將上述兩層視為一大層，則後續 i 次的 R 操作，顯然上層硬幣編號的排序與 1×2^i 的操作所產生的數列順序相同。只是我們需把下層的編號依序填入，即編號 1 接編號 2^i+1；編號 2 接編號 2^i+2； …；編號 2^i 接編號 2^{i+1}。

2、若 $1\times 2^{i+1}$ 排列的第一步操作改為 L 操作，則需在編號 1 上層接編號 2^i+1，編號 2 上層接編號 2^i+2，…，編號 2^i 上層接編號 2^{i+1}。

我們將上述結果寫成<性質 3>

<性質 3> $1\times 2^{i+1}$ 排列之 $[RX]$ 或 $[LX]$ 產生的數列可由 1×2^i 排列之 $[X]$ 產生的數列得到，其中 $[X]$ 為 1×2^i 的任意一種操作方法。

【實例】 1×2^2 排列 $[LR]$：3，1，4，2

在編號 3 後接編號 2^2+3；編號 1 後接編號 2^2+1；編號 4 後接編號 2^2+4；編號 2 後接編號 2^2+2，得到 1×2^3 排列 $[RLR]$ 數列：3，7，1，5，4，8，2，6

【研究二之 2】$2^s\times 2^t$ 硬幣排列操作之數列的關聯性：

一、行方向之性質與列方向相同：

<性質 4> 對於 $2^s\times 2^t$ 排列，當操作完成，過程中僅第 i 步不同(即第 i 步左右互換或上下互換時)，則產生的兩數列，其關聯性依序由上而下每 2^{i-1} 個數一組，且依序兩兩一組上下互換而成。

【實例】2×2^3 排列 $[RDRR]$：1，5，9，13，3，7，11，15，2，6，10，14，4，8，12，16

$[RDLR]$：3，7，11，15，1，5，9，13，4，8，12，16，2，6，10，14

<性質 5> 對於 $2^s\times 2^t$ 排列，當操作完成，過程中 R 與 L 完全互換(例：「$LDRL$」,「$RDLR$」)，則所得的兩數列形成「**列逆排列**」。

【實例】2×2^3 排列

「$LDRL$」：6，2，14，10，8，4，16，12，5，1，13，9，7，3，15，11

「$RDLR$」：3，7，11，15，1，5，9，13，4，8，12，16，2，6，10，14

各列分別作逆排列即可互推完成，同理「**行逆排列**」亦同。

<性質 6> 尋找 $2^s\times 2^i$ 排列的擴增數列

$2^s\times 2^{i+1}$ 之 $[RX]$ 或 $[LX]$ 產生的數列可由 $2^s\times 2^i$ 之 $[X]$ 產生的數列得到。

其中 $[X]$ 為 $2^s\times 2^i$ 的任意一種操作方法。同理 $[DX]$ 或 $[UX]$ 亦同。

以 2×2^3 第 1 步 R 操作為例

第 1 步 R 操作

1	2	3	4
9	10	11	12

2×2^2 排列

1	2	3	4
5	6	7	8

如何從 2×2^2 排列得到 2×2^3 排列之操作呢？

步驟 1　第 1 列不變，第 2 列各數加 4

步驟 2　所有編號後面加上 1 個編號多 4 的數

【實例】2×2^2 $[LDR]$：3，1，7，5，4，2，8，6

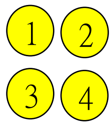
步驟 1　3，1，11，9，4，2，12，10

步驟 2　2×2^3 $[RLDR]$：3，7，1，5，11，15，9，13，4，8，2，6，12，16，10，14

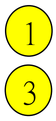
二、***R* 或 *L* 與 *D* 或 *U* 之間互換**：由於操作過程中，有 R，L，D，U 四種操作方式，於是我們想進一步瞭解，當 R (或 L) 與 D (或 U)之間互換時，數列是否也有關聯性？以下是我們的研究：

列方向操作與行方向操作互換

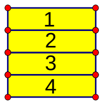
1、以 2×2 為例，我們作[RD]與操作[DR]

起始位置 

(1) [RD] $\boxed{\text{第 1 步}}$ R 操作 $\boxed{\text{第 2 步}}$ D 操作

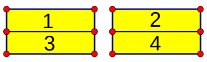


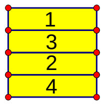
(+1)



$\Rightarrow$ 完成數列：1，2 ，3，4

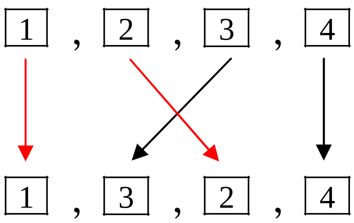
(2) [DR] $\boxed{\text{第 1 步}}$ D 操作 $\boxed{\text{第 2 步}}$ R 操作





$\Rightarrow$ 完成數列：1，3，2 ，4

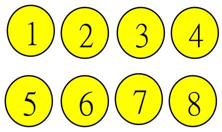
我們比較上述兩種操作方法，當從[RD]變成[DR]時，也就是作 R 、 D 互換，可視為 R 向後(或 D 向前)作一次互換。



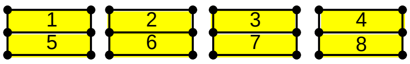
數列會以箭頭所示產生移動。

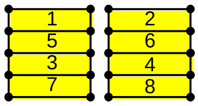
2、以2×4排列為例，我們作[DRR]與[RRD]操作

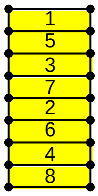
起始位置



(1) [DRR] $\boxed{\text{第 1 步}}$ D操作 $\boxed{\text{第 2 步}}$ R操作 $\boxed{\text{第 3 步}}$ R操作

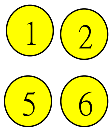




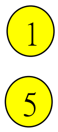


$\Rightarrow$得數列：1，5，3，7，2，6，4，8

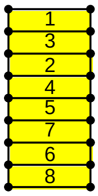
(2) [RRD]$\boxed{\text{第 1 步}}$$R$ 操作 $\boxed{\text{第 2 步}}$$R$ 操作 $\boxed{\text{第 3 步}}$$D$ 操作



(+2)



$(+2)(-1)(+2)$ (註)



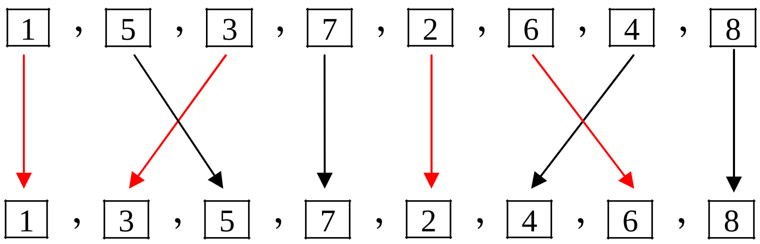
$\Rightarrow$得數列：1，3，2，4，5，7，6，8

註：$(+2)(-1)(+2)$表示圖中硬幣下方有三層，編號依序比上一層多 2，少 1，多 2。

3、依據2×2排列例子的結果，我們若想將[DRR]變成[RRD]，可做以下兩個步驟：

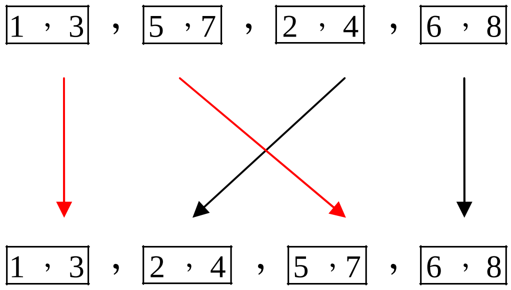
(1) 先從[DRR]變成 [RDR]

由於$\boxed{\text{第 1 步}}$不同，因此先將數列每2^0個數分成1組，然後將各組作D向後一次互換。



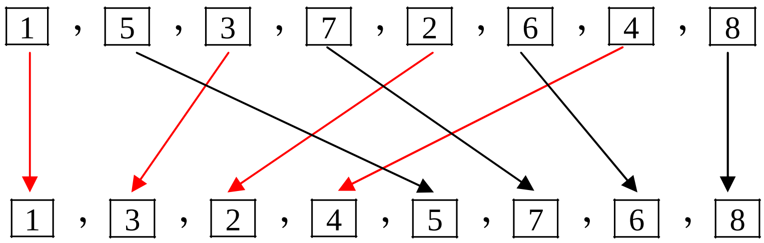
(2) 再從[RDR]變成[RRD]

由於第 1 步相同，因此先將數列每 2^1 個數分成1組，然後將各組作 D 向後一次互換。



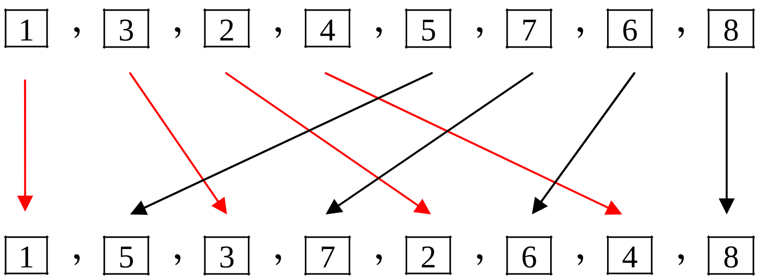
$\Rightarrow$ 得[RRD]數列：1，3，2，4，5，7，6，8

倘若我們直接比較[DRR]與[RRD]這兩個數列，發現從[DRR]變成[RRD]，也可說是 D 向後作連續二次 R 、 D 互換。



數列會以箭頭所示產生移動，因此可直接從數列1，5，3，7，2，6，4，8 得到數列1，3，2，4，5，7，6，8。

反過來看，若從[RRD]變成[DRR]，則可視為 D 向前作連續二次 R 、 D 互換

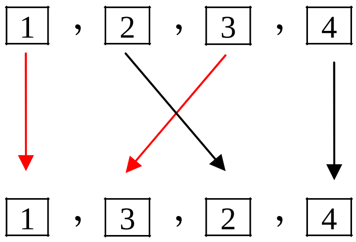


數列會以箭頭所示產生移動，因此可直接從數列1，3，2，4，5，7，6，8 得到數列1，5，3，7，2，6，4，8。

由以上例子我們可以看出：向前互換為向後互換之逆操作。

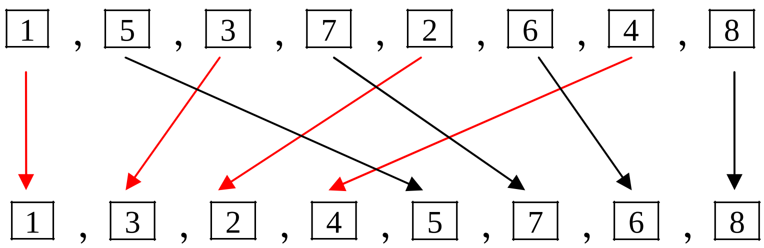
4、因為 $m \times n$ 排列之操作過程中，沿著列方向之操作(R 或 L)與沿著行方向之操作(D 或 U)進行連續向後互換，所產生之數列會產生交錯排列的現象，我們稱之為「錯序」。

(1) 在 2×2 排列例子中，$[RD]$ 變成 $[DR]$



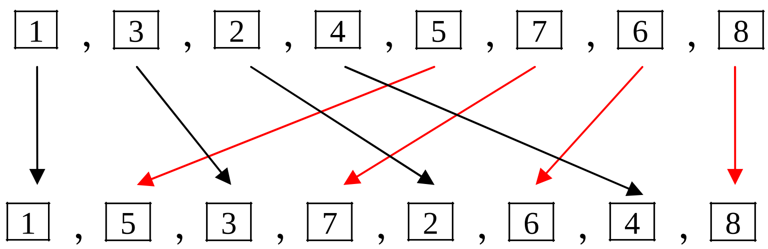
可視為 R 向後作一次 R 、 D 互換，方法為將數列 1，2，3，4 中依序由上而下每 2^2 個數，第 1，3 位置的數依序移至第 1，2 位置，第 2，4 位置的數依序移至第 3，4 位置，得到數列 1，3，2，4。

(2) 在 2×4 排列例子中，$[DRR]$ 變成 $[RRD]$



可視為 D 向後作二次連續 R 、 D 互換，方法為將數列 1，5，3，7，2，6，4，8 依序由上而下每 2^3 個數，第 1，3，5，7 位置的數依序移至第 1，2，3，4 位置，第 2，4，6，8 位置的數依序移至第 5，6，7，8 位置，得數列 1，3，2，4，5，7，6，8。

(3) 在 2×4 排列例子中，$[RRD]$ 變成 $[DRR]$



可視為 D 向前作二次連續 R 、 D 互換，方法為「錯序」之逆操作。

由以上三個例子，我們得到 **<性質 7>**

<性質 7> 對於 $m \times n$ 排列，當操作完成，過程中僅$\boxed{\text{第} i \text{步}}$ R (或 L)操作連續向後與 D (或 U) 操作作 k 次互換；或過程中僅$\boxed{\text{第} i \text{步}}$ D (或 U)操作連續向後與 R (或 L)操作作 k 次互換，則產生的兩數列，可透過下面兩步驟完成：

(1) 依序由上而下每 2^{i-1} 個數為一組。

(2) 每 2^{k+1} 個組作「錯序」操作。

同理，對於 $m \times n$ 排列，當操作完成，過程中僅$\boxed{\text{第} i \text{步}}$ R (或 L)操作連續向前與 D (或 U)操作作 k 次互換；或過程中僅$\boxed{\text{第} i \text{步}}$ D (或 U)操作連續向前與 R (或 L)操作作 k 次互換，則產生的兩數列，可透過下面兩步驟完成：

(1) 依序由上而下每 2^{i-k-1} 個數為一組。

(2) 每 2^{k+1} 個組作「錯序」之逆操作。

【研究三】[不完美類]硬幣排列操作之數列的關聯性

【研究三之 1】$1 \times n$ [不完美類]硬幣排列操作之數列的關聯性：

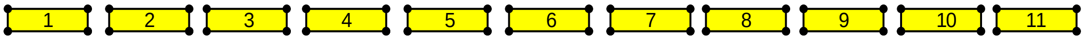
因為 $1 \times n$ 排列為[不完美類]，所以操作過程中必會產生[不完全堆疊]。當產生[不完全堆疊]時，則各行的硬幣數量會產生不等現象。此時在【研究二】中得到的性質，將無法適用。針對此問題，我們想到一個解決的方式，如下：

因為[完美類]的型態必為 $2^s \times 2^t$ 排列。所以，對於 $1 \times n$ 排列當產生[不完全堆疊]時，我們予以「**補 0**」的方式**(註)**，讓每行的硬幣編號數量形成等數量，則當操作完成，其型態可視為 1×2^t 。

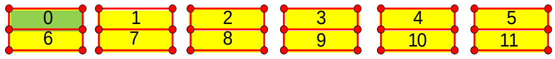
註：「0」是我們假想出來的硬幣編號，實際上並無此硬幣。因此，正確的數列並沒有「0」，但為了觀察方便，以下的研究仍會在數列中顯現出「0」。

以1×11排列為例

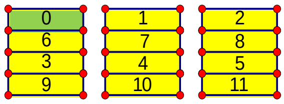
起始位置



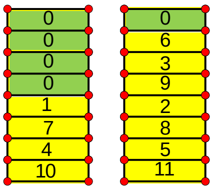
第 1 步　R操作



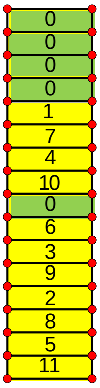
第 2 步　R操作



第 3 步　R操作



第 4 步　R操作



由上述動作可以提出以下說明：

一、使 [不完美類] 轉化為 [完美類]

我們發現第 1 步為「不完全堆疊」，因此補1個「0」，第 2 步為「完全堆疊」不必補「0」，第 3 步為「不完全堆疊」，因此補4個「0」，第 4 步為「完全堆疊」不必補「0」，所得數列為：0，0，0，0，1，7，4，10，0，6，3，9，2，8，5，11，共有16個數，所補之「0」使得1×11變為1×2^4型態。

從以上例子得知：

1. 若第 1 步為「不完全堆疊」，須補2^0個「0」，

   若第 2 步為「不完全堆疊」，須補2^1個「0」，

   若第 3 步為「不完全堆疊」，須補2^2個「0」，

   因此若第 i 步為「不完全堆疊」，則須補 2^{i-1} 個「0」。

2. 最後一步必為「完全堆疊」。

3. 操作完成後，數列必有 2^t 個數(包含「0」)。

我們發現每次操作，若為「不完全堆疊」，所須補 0 之個數必為 2^i 之型態，因此總共須補 $k_1 2^0 + k_2 2^1 + k_3 2^2 + \ldots + k_{i+1} 2^i$ 個 0，(其中若第 i 次操作為「不完全堆疊」，則 $k_i = 1$，否則 $k_i = 0$)。

這個結果與二進位表示法的觀念相同，因此我們引用二進位的方法來找補 0 之個數。

二、$1 \times n$ 排列「補 0」之步驟

(1) 因為 $2^{t-1} < n \le 2^t$ ，設 $n = 2^t - q \quad (0 \le q < 2^{t-1})$

(2) 將 q 表示成二進位，由右而左，當第 k 個數是1，則在第 k 步操作時，補上 2^{k-1} 個「0」。

【實例】 1×55 排列

(1) $2^5 < 55 \le 2^6$

(2) $q = 2^6 - 55 = 9 \Rightarrow$ 須補 9 個「0」$\Rightarrow$ 9 表示成二進位，$9 = 1001_2$

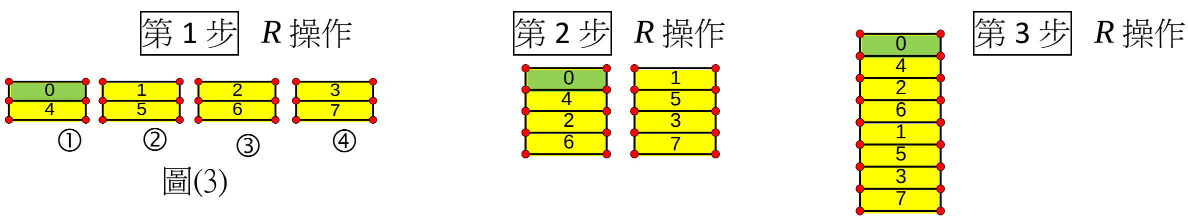
第一次操作補1個「0」，第四次操作補 $2^3 = 8$ 個「0」，共補9個「0」，使得 1×55 變成 1×2^6 的型態。

三、移序

雖然我們已經將數列補「0」成 1×2^t 排列的型態，但當行數是奇數時，該操作除了須補「0」之外，還有一個很重要的特性：R 操作時，硬幣是由對稱軸的左邊移位到對稱軸的右邊，因此對稱軸通過之行會留在最左邊；L 操作時，硬幣是由對稱軸的右邊移位到對稱軸的左邊，因此對稱軸通過之行會留在最右邊。這種會因左右操作不同而導致移位後位置不同的現象，我們稱之為「移序」。

以 1×7 排列為例：

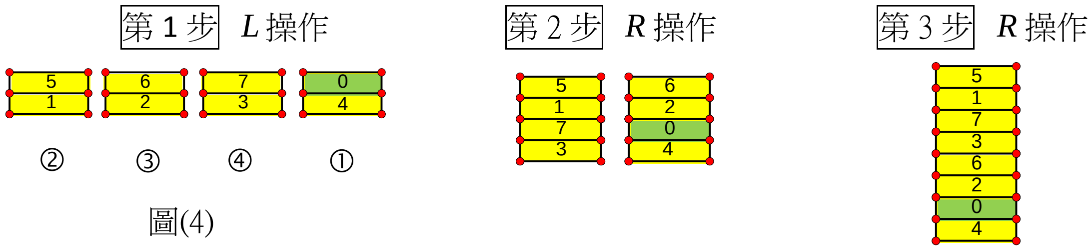
(1) $[RRR]$ 起始位置 ：



圖(3)

$\Rightarrow$ 數列：0，4，2，6，1，5，3，7

(2) $[LRR]$



圖(4)

$\Rightarrow$完成數列：5，1，7，3，6，2，0，4

當操作由$[RRR]$換成$[LRR]$時，我們比較圖(3)與圖(4)，除了第一層與第二層互換之外(「0」一定補在上面，所以不必換)，還發現將圖(3)中之第①組$\boxed{0，4}$抽出移至最右側即可得到圖(4)，也可以看成將圖(3)中之①換成②，②換成③，③換成④，④換成①即可得到圖(4)，除了④之外，其他各組都是增加1，我們稱之為「+1移序」；同理，當操作由$[LRR]$換成$[RRR]$時，除了第一層與第二層互換之外(「0」一定補在上面，所以不必換)，將圖(4)中②換成①，③換成②，④換成③，①換成④，即可得到圖(3)，除了①之外，其他各組都是減少1，我們稱之為「−1移序」。

四、「補 0」與「移序」的操作

由於「補 0」與「移序」是相伴而生，因此在操作時可將其一併處理。我們以1×7為例：

1、從$[RRR]$變成$[LRR]$時，

由於$2^2 < 7 \le 2^3$可得$q = 2^3 - 7 = 1 \Rightarrow$須補1個「0」

$1 = 1_2 \Rightarrow$第一次操作為「不完全堆疊」，須補1個「0」，然後作「+1移序」。

$[RRR] \Rightarrow$完成數列：0，4，2，6，1，5，3，7

依據【研究二】<性質 1>可知：$\boxed{第 1 步}$由R換成L

(1) 將數列每2^0個數分成1組兩兩互換

$\boxed{0}，\boxed{4}，\boxed{2}，\boxed{6}，\boxed{1}，\boxed{5}，\boxed{3}，\boxed{7}$

$\downarrow$

$\boxed{0}，\boxed{4}，\boxed{6}，\boxed{2}，\boxed{5}，\boxed{1}，\boxed{7}，\boxed{3}$

「0」一定補在上面，所以不必換。

(2) 將數列每 2^1 個數分成1組，作「+1 移序」(其中，最大的數換成最小的數)

$\boxed{0，4}$，$\boxed{6，2}$，$\boxed{5，1}$，$\boxed{7，3}$

$\downarrow$

$\boxed{5，1}$，$\boxed{7，3}$，$\boxed{6，2}$，$\boxed{0，4}$

得數列5，1，7，3，6，2，0，4即為 $[LRR]$。

2、從 $[LRR]$ 變成 $[RRR]$ 時

由於 $2^2 < 7 \le 2^3$ 可得 $q = 2^3 - 7 = 1 \Rightarrow$ 須補 1 個「0」

$1 = 1_2 \Rightarrow$ 第一次操作為「不完全堆疊」，須補1個「0」，然後作「-1移序」。

$[LRR] \Rightarrow$ 5，1，7，3，6，2，0，4

依據【研究二】<性質1>，見 P_9，可知：

(1) 將數列每 2^0 個數分成1組兩兩互換

$\boxed{5}$，$\boxed{1}$，$\boxed{7}$，$\boxed{3}$，$\boxed{6}$，$\boxed{2}$，$\boxed{0}$，$\boxed{4}$

$\downarrow$

$\boxed{1}$，$\boxed{5}$，$\boxed{3}$，$\boxed{7}$，$\boxed{2}$，$\boxed{6}$，$\boxed{0}$，$\boxed{4}$

(2) 將數列每 2^1 個數分成1組，作「-1移序」(其中，最小的數換成最大的數)

$\boxed{1，5}$，$\boxed{3，7}$，$\boxed{2，6}$，$\boxed{0，4}$

$\downarrow$

$\boxed{0，4}$，$\boxed{2，6}$，$\boxed{1，5}$，$\boxed{3，7}$

得數列0，4，2，6，1，5，3，7 即為 $[RRR]$

同樣的方式，我們可將結果一般化，寫成**<性質 8>**

<性質 8>

對於 $1 \times n$ 排列，當操作完成，過程中僅第 i 步不同(即第 i 步左右互換)時，則產生的兩數列，可透過下面步驟完成：

(1) 依序由上而下每 2^{i-1} 個數一組，且依序兩兩一組上下互換。(0 不必替換)

(2) 若第 i 步為「不完全堆疊」，則依序由上而下每 2^i 個數一組，作「+1移序」(若 R 變成 L)或「-1移序」(若 L 變成 R)。

五、$1\times n$的逆排列：

對於$1\times n$排列，過程中R與L完全互換(例：$[RLR]$、$[LRL]$)，則所得兩數列為「逆排列」，顯然與【研究二】之<性質 2>：1×2^{t}逆排列的結果相同。

【實例】1×7排列

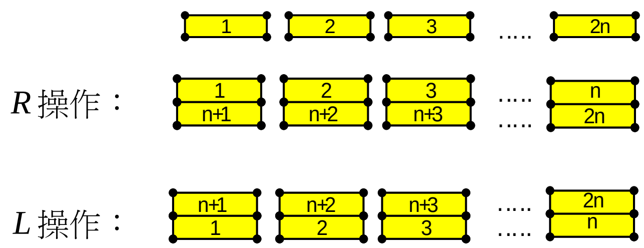
$[RLR]$：2，6，0，4，3，7，1，5

$[LRL]$：6，2，0，4，5，1，7，3

六、$1\times 2n$或$1\times(2n-1)$擴增數列：可從$1\times n$數列中求出來。

1、 對於$1\times 2n$排列的$\boxed{\text{第 1 步}}$操作：

起始位置



將上述的兩層視為一大層，若後續的操作和$1\times n$排列的步驟相同，則硬幣編號的排序也和$1\times n$排列的操作所產生的數列順序相同，只是我們把編號$n+1$，$n+2$，...，$2n$填入。

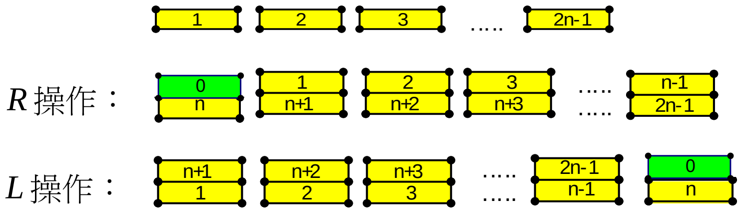
(1) 若$\boxed{\text{第 1 步}}$為R操作，即在數列之中編號1的後面接編號$n+1$，編號2的後面接編號$n+2$，...，編號n的後面接編號$2n$。

(2) 若$\boxed{\text{第 1 步}}$為L操作，即在編號1的前面接編號$n+1$，編號2的前面接編號$n+2$，...，編號n的前面接編號$2n$。

【實例】利用1×7 $[RLR]$操作所產生的數列：2，6，4，3，7，1，5，則對於1×14 $[RRLR]$操作，即在1×7排列 $[RLR]$數列中的每個數後面加上一個比它大7的數，所產生的1×14排列 $[RRLR]$為2，9，6，13，4，11，3，10，7，14，1，8，5，12。同理，1×14 $[LRLR]$操作，即在1×7 $[RLR]$數列之每個數前面加上一個比它大7的數，所產生的1×14 $[LRLR]$數列為9，2，13，6，11，4，10，3，14，7，8，1，12，5

2、 對於$1\times(2n-1)$的$\boxed{\text{第 1 步}}$操作：

起始位置



因為 $2n-1$ 為奇數，因此 $\boxed{\text{第 1 步}}$ 操作為「不完全堆疊」，須補 1 個「0」，若後續的操作和 $1\times n$ 的步驟相同，則硬幣編號的排序也和的 $1\times n$ 操作所產生的數列順序相同。

(1) 若 $\boxed{\text{第 1 步}}$ 為 L 操作，即在數列之中編號 1 的前面接編號 $n+1$，編號 2 的前面接編號 $n+2$，…，最後 1 個編號 n 的前面則須接編號 0 或不接。

(2) 若 $\boxed{\text{第 1 步}}$ 為 R 操作，則須先將 $1\times n$ 所得之數列作「-1移序」後，再在數列中編號 1 的後面接編號 $n+1$，編號 2 的後面接編號 $n+2$，⋯，最後 1 個編號 n 的前面則須接編號 0 或不接。

【實例】1×7 排列

$[RLR]$ 操作所產生的數列：2，6，4，2，7，1，5　則對於 1×13 $[RRLR]$ 操作，

即先將 2，6，4，2，7，1，5 作「-1移序」。

得數列 1，5，2，2，6，0，4 然後在每個數後面加上一個比它大 7 的數，

所產生的數列為 1，8，5，12，3，10，2，9，6，13，0，7，4，11。

由以上說明，我們可得到 **<性質 9>**

<性質 9> 尋找 $1\times n$ 排列的擴增數列

$1\times 2n$ 與 $1\times(2n-1)$ 之 $[RX]$ 或 $[LX]$ 產生的數列可由 $1\times n$ 之 $[X]$ 產生的數列得到。

($[X]$ 為 $1\times n$ 之一種操作方法)。

1. $1\times 2n$ $[RX]$ 所產生的數列：可由 $1\times n$ $[X]$ 所得之數列，其中編號 1 後面接編號 $n+1$，編號 2 後面接編號 $n+2$，⋯，編號 n 後面接編號 $2n$；

   $1\times 2n$ $[LX]$ 所產生的數列：可由 $1\times n$ $[X]$ 所得之數列，其中編號 1 前面接編號 $n+1$，編號 2 前面接編號 $n+2$，⋯，編號 n 前面接編號 $2n$。

2. $1\times(2n-1)$ $[LX]$ 所產生的數列：可由$1\times n$ $[X]$ 所得之數列，其中編號1前面接編號 $n+1$，編號2前面接編號$n+2$，⋯，編號n前面接編號0 或不接；

$1\times(2n-1)$ $[RX]$ 所產生的數列：將$1\times n$ $[X]$ 所得之數列作「-1移序」後，接著在編號1後面接編號$n+1$，編號2後面接編號$n+2$，⋯，編號n前面接編號0 或不接。

【研究三之 2】$m\times n$ [不完美類] 硬幣排列操作之數列的關聯性：

【研究二之 2】 <性質 4>，見P_{11}，依然適用

一、將【研究二之 2】<性質 5> $2^s\times 2^t$的逆排列推廣到$m\times n$排列。

【實例】2×5排列

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

$[RDLR]$：2，5，7，10，0，3，0，8，0，0，0，0，1，4，6，9

$[LDRL]$：4，1，9，6，0，3，0，8，0，0，0，0，5，2，10，7

我們將$[RDLR]$數列中1換成5；2換成4；3不變；4換成2；5換成1，同理6換成10；7換成9；8不變；9換成7；10換成6，即可得$[LDRL]$之數列(**註**)。

註：因為沿著「行」方向之操作不變，沿著「列」方向之操作R、L完全互換，因此只要先將各「列」之起始位置的順序倒過來再進行操作，即可得到R、L完全互換之數列。

【實例】5×2排列

$[DURD]$：3，9，0，5，4，10，0，6，0，0，1，7，0，0，2，8

$[UDRU]$：7，1，0，5，8，2，0，6，0，0，9，3，0，0，10，4

我們將$[DURD]$數列中 1 換成9；3 換成 7；5 不變；7 換成 3；9 換成 1；

同理 2 換成 10；4 換成 8；6 不變；8 換成 4；10 換成 2；即可得到$[UDRU]$之數列。

由以上例子我們得到 <性質 10>

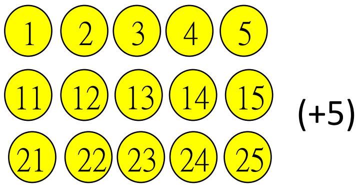
<性質 10> 對於$m\times n$排列，當操作完成過程中僅列方向(R 或 L 操作)完全相反；則產生的兩數列為「列逆排列」各列倒排；若僅行的方向(D 或 U 操作)完全相反，則為「行逆排列」各行倒排。

二、 將【研究三之 1】<性質 9> ：$1\times n$排列的擴增數列推廣到$m\times n$排列

以下我們將探討$m\times 2n$、$m\times(2n-1)$、$2m\times n$或$(2m-1)\times n$的數列如何從$m\times n$數列中求出？

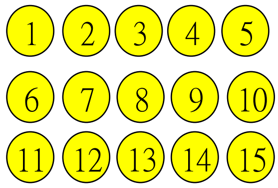
1、對於$m\times 2n$排列的$\boxed{\text{第 1 步}}$操作：以3×10排列 $\boxed{\text{第 1 步}}$ R操作為例

$\boxed{\text{第 1 步}}$ R操作



圖(5)

3×5



圖(6)

如何從3×5排列得到3×10排列之操作：

$\boxed{\text{步驟1}}$ 如圖(6)，第一列不變，第二列各數5 ，第三列各數加10 ，得到圖(5)上層。

$\boxed{\text{步驟2}}$ 在所有編號後面加上一個編號多5的數，得到圖(5)。

【實例】3×5排列 [$DRDRR$]：6，9，1，11，4，14，8，3，13，7，10，2，12，5，15

$\boxed{\text{步驟1}}$ 6~10各加5，11~15各加10，得到：

11，14，1，21，4，24，13，3，23，12，15，2，22，5，25

$\boxed{\text{步驟2}}$ 各數後面加上一個編號多5的數，得到：

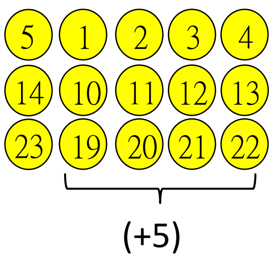
11，16，14，19，1，6，21，26，4，9，24，29，13，18，3，8，23，28，12，17，15，20，2，7，22，27，5，10，25，30

即為3×10排列 [$RDRDRR$]

2、對於$m\times(2n-1)$的$\boxed{\text{第1步}}$操作：以3×9排列$\boxed{\text{第1步}}$$R$操作為例

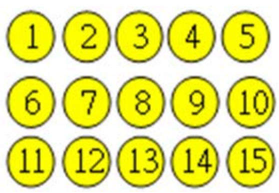
※ 因為$2n-1$為奇數，因此第一步操作為「不完全堆疊」須補1個「0」。

$\boxed{\text{第1步}}$ R操作

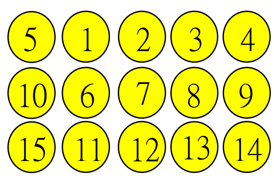


圖(7)

3×5



圖(8)



圖(9)

如何從3×5排列得到3×9排列之操作：

$\boxed{步驟1}$ 將3×5排列，如圖(8)，各列編號作「-1移序」，如圖(9)。

$\boxed{步驟2}$ 第1列不變，第2列各數加4，第3列各數加8，如圖(7)上層。

$\boxed{步驟3}$ 對稱軸通過的數前面「補0」，其餘各編號後面加上一個編號多5的數，得到圖(7)。

【實例】$3\times 5\ [DRDRR]$：6、9、1、11、4、14、8、3、13、7、10、2、12、5、15

$\boxed{步驟1}$ 各列作「-1移序」，得到：10、8、5、15、3、13、7、2、12、6、9、1、11、4、14

$\boxed{步驟2}$ 第二列各數加4，第三列各數加8：

14、12、5、23、3、21、11、2、20、10、13、1、19、4、22

$\boxed{步驟3}$ 第一行各數前面「補0」，其餘各數後面加上一個編號多5的數：即為$3\times 9\ [RDRDRR]$

0、14、12、17、0、5、0、23、3、8、21、26、11、16、2、7、20、25、10、15、13、18、1、6、19、24、4、9、22、27

綜合上述討論，我們可得**<性質 11>**

<性質 11> $m\times n$的擴增數列

(一)偶數行的列方向擴增數列：

$m\times 2n\ [RX]$所產生的數列，可由$m\times n\ [X]$所得之數列，透過下面兩個步驟產生：

$\boxed{步驟 1}$：第1列不變，第2列每個數$+n$，第3列每個數$+2n$，…，第m列每個數$+(m-1)n$

$\boxed{步驟 2}$：在所有編號後面加上1個編號多n的數。

同理：$m\times 2n\ [LX]$所產生的數列，其步驟同$[RX]$，僅將$\boxed{步驟 2}$中「編號後面」改成「編號前面」即可。

(二)奇數行的列方向擴增數列：

$m\times(2n-1)\ [RX]$所產生的數列，可由$m\times n\ [X]$所得之數列，透過下面三個步驟產生：

$\boxed{步驟1}$ 將$m\times n$數列各列作「-1移序」。

$\boxed{步驟2}$ 第1列不變，第2列每個數$+(n-1)$，第三列每個數$+2(n-1)$，…，第m列每個數$+(m-1)(n-1)$。

$\boxed{步驟3}$ 對稱軸通過的數前面補「0」，其餘所有編號後面加上1個編號多n的數。

同理：$m\times(2n-1)\ [LX]$所產生的數列，其步驟同$[RX]$，但不需做$\boxed{步驟 1}$，僅將$\boxed{步驟 3}$中「編號後面」改為「編號前面」即可。

(三)偶數列的行方向擴增數列：

$2m \times n\,[DX]$所產生的數列可由$m \times n\,[X]$所得之數列中，其步驟為所有編號後面加上1個編號多mn的數。

同理：$2m \times n\,[UX]$所產生的數列，其步驟同$2m \times n\,[DX]$的擴增數列步驟，僅將「編號後面」改為「編號前面」即可。

(四)奇數列的行方向擴增數列：

因為$2m-1$為奇數，因此第一步操作為「不完全堆疊」，須補1個「0」。

$(2m-1) \times n\,[DX]$ 所產生的數列，可由$m \times n\,[X]$ 所得之數列，透過下面兩個步驟產生：

$\boxed{\text{步驟1}}$ 將$m \times n$數列各行作「$-n$移序」。

$\boxed{\text{步驟2}}$ 對稱軸通過的數前面補「0」，其餘所有編號後面加上1個編號多mn的數。.

同理：$(2m-1) \times n\,[UX]$所產生的數列其步驟同$[DX]$，但不需做$\boxed{\text{步驟1}}$ 僅將$\boxed{\text{步驟2}}$ 中「編號後面」，改為「編號前面」即可。

三、範例：由2×2 ***[RU]*** 找尋3×5 ***[URDLL]***

擬定步驟：$[RU] \to [RRU] \to [LRRU] \to [DLRRU] \to [DLURR] \to [DRULL] \to [URDLL]$

$\boxed{\text{步驟1}}$ $2 \times 2[RU] \xrightarrow{\text{性質11}} 2 \times 3[RRU]$

1. $2 \times 2[RU]$：3，4，1，2
2. 各列作「-1移序」，參照圖(10-1)可得：4，3，2，1
3. 第二列各數加 1 可得：**5**，**4**，2，1
4. 對稱軸通過之數的前面「補 0」，其餘各數後面加上編號多 2 的數，參照圖(10-2)

   可得：　$2 \times 3[RRU]$：**0**，5，4，**6**，**0**，2，1，**3**

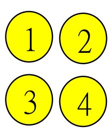


圖 10-1

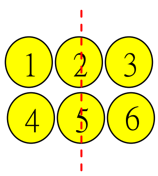


圖 10-2

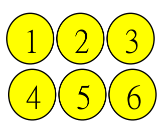


圖 11-1

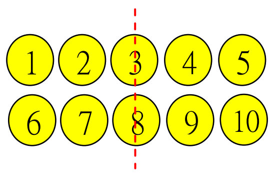


圖 11-2

$\boxed{步驟2}$ $2\times3[RRU] \xrightarrow{性質11} 2\times5[LRRU]$

1. $2\times3[RRU]$：0，5，4，6，0，2，1，3
2. 第二列各數加 2，參照圖(11-1)可得：0，**7**，**6**，**8**，0，2，1，3
3. 對稱軸通過之數的前面「補 0」，其餘各數前面加上編號多 3 的數，參照圖(11-2)

   可得： **0**，0，**10**，7，**9**，6，**0**，8，**0**，0，**5**，2，**4**，1，**0**，3

$\boxed{步驟3}$ $2\times5[LRRU] \xrightarrow{性質11} 3\times5\ [DLRRU]$

1. $2\times5[LRRU]$：0，0，10，7，9，6，0，8，0，0，5，2，4，1，0，3
2. 各行作「–5移序」參照圖(12-1)可得：

   0，0，5，2，4，1，0，3，0，0，10，7，9，6，0，8
3. 對稱軸通過之數的前面「補 0」，其餘各數後面加上編號多 10 的數，參照圖(12-2)

   可得：0，**0**，0，**0**，5，**15**，2，**12**，4，**14**，1，**11**，0，**0**，3，**13**，

   0，**0**，0，**0**，**0**，10，**0**，7，**0**，9，**0**，6，0，**0**，**0**，8

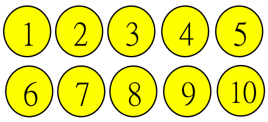


圖 12-1

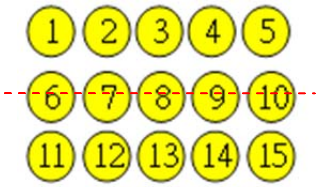
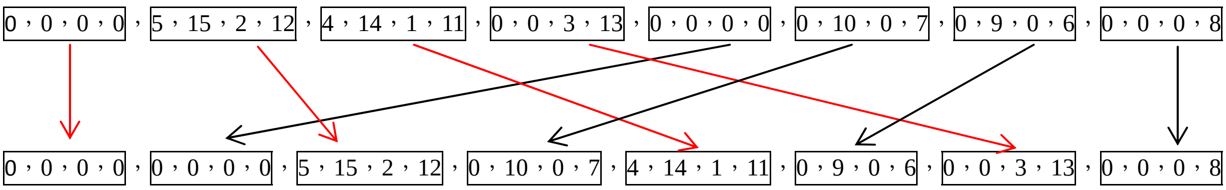


圖 12-2

$\boxed{步驟4}$ $3\times5\ [DLRRU] \xrightarrow{性質7} 3\times5\ [DLURR]$



$\boxed{步驟5}$ $3\times5\ [DLURR] \xrightarrow{性質10} 3\times5\ [DRULL]$

各列倒排，參照圖(12-2)：

0，0，0，0，0，0，0，0，1，11，4，14，0，6，0，9，2，

12，5，15，0，7，0，10，0，0，3，13，0，0，0，8

$\boxed{步驟6}$ $3\times5\ [DRULL] \xrightarrow{性質10} 3\times5\ [URDLL]$

各行倒排，參照圖(12-2) ：

0，0，0，0，0，0，0，0，11，1，14，4，0，6，0，9，12，2，15，

5，0，7，0，10，0，0，13，3，0，0，0，8

伍、結論

1、對於 $m\times n$ 排列操作完成之方法數，我們發現可以利用巴斯卡三角形數列找出通式：

$$f(m\times n)=f(2^s\times 2^t)=g_{t+1}(s+1)\times 2^{s+t}=g_{s+1}(t+1)\times 2^{s+t}$$ （其中 $2^{s-1}<m\leq 2^s$ ，$2^{t-1}<n\leq 2^t$ ）

2、[完美類] $2^s\times 2^t$ 排列操作方法之數列的關聯性，可涵蓋 1×2^t ，我們得到以下性質：

<性質 4> 當操作完成，過程中僅第 i 步不同(即第 i 步左右互換或上下互換)時，則產生的兩數列，其關聯性依序由上而下每 2^{i-1} 個數一組，且依序兩兩一組上下互換而成。

<性質 5> 當操作完成，過程中同列或同行操作互換，則所得兩數列形成「逆排列」。

<性質 6> $2^s\times 2^{i+1}$ 排列之 $[RX]$ 或 $[LX]$ 產生的數列可由 $2^s\times 2^i$ 排列之 $[X]$ 產生的數列得到。

<性質 7> 當操作完成，過程中僅第 i 步操作連續向後作行列操作互換，可利用分組後之「錯序」操作得到。

※ 1×2^t 排列之<性質 1>~<性質 3>可包含於<性質 4>~<性質 6>中。

3、[不完美類] $m\times n$ 排列操作方法之數列的關聯性，我們利用二進位表示法的觀念，以「補 0」方式使得 $m\times n$ 排列轉化為[完美類]，再以「移序」的方法得到以下性質：

<性質 8> 對於 $1\times n$ 排列，操作過成中僅第 i 步不同時，若為「不完全堆疊」可利用分組後之「移序」操作得到。

<性質 9> $1\times 2n$ 與 $1\times(2n-1)$ 之 $[RX]$ 或 $[LX]$ 產生的數列可由 $1\times n$ 之 $[X]$ 產生的數列得到。

<性質 10> 對於 $m\times n$ 排列，當操作完成過程中僅列方向(R 或 L 操作)完全相反；則產生的兩數列為「列逆排列」各列倒排；若僅行的方向(D 或 U 操作)完全相反，則為「行逆排列」各行倒排。

<性質 11> $m\times 2n\,[RX]$ 、$m\times(2n-1)\,[RX]$ 、$2m\times n\,[DX]$ 、$(2m-1)\times n\,[DX]$ 產生的數列，皆可由 $m\times n\,[X]$ 所得之數列擴增得到。同理，$m\times 2n\,[LX]$ 、$m\times(2n-1)\,[LX]$ 、$2m\times n\,[UX]$ 、$(2m-1)\times n\,[UX]$ 亦可由 $m\times n\,[X]$ 所得之數列擴增得到。

4、對於任意 $m\times n$ 排列，均可由 1×1 排列之數列連續擴增得到。

陸、參考文獻

一、洪新雅、蘇敏之、陳品婕、梁蓉(2006).你今天翻了沒？—翻硬幣遊戲的進階探討.台北縣九十五學年度國民中小學科學展覽會.台北縣政府教育局.

二、張桓瑞(2005). 再翻出一片天.中華民國第 46 屆中小學科學展覽會.國立科學教育館.

三、陳美文.范姜敏容(2005). 翻動「棋跡」.中華民國第 46 屆中小學科學展覽會.國立科學教育館.

四、羅資涵.姜巧卿.謝維櫻.姜子荃(2005). 乾坤大挪移.中華民國第 46 屆中小學科學展覽會.國立科學教育館.

五、宇河出版社 “全世界都在做的 800 個思維遊戲(下)”一書

六、鄔瑞珍、鄔能興、蘇柔安(2010).硬幣移位方法數與數列之關聯性.新北市九十九學年度國民中小學科學展覽會.新北市政府教育局.

【評語】030414

1. 研究方法未見創新。

2. 未討論較廣泛的遞迴數列。

3. 團隊合作良好，報告中肯。

4. 書面報告撰寫完整。