臺灣二OO四年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：數字波的節點探討

學　　校：基隆市立中正國民中學

作　　者：江育旻、潘怡誠

作者簡介

我叫江育旻，從小受到爸媽的影響，喜愛有關數理方面的事物，更因在國中遇到許多認真教學的老師，讓我更加了解領域及數學的奧秘。由於同學們的幫忙、家長的支持，以及老師們的協助，我們的作品才能問世。我相信我們一定都能從這次的科展上學到不少東西，希望我以後能繼續研究，拓展自己的眼界。

我叫潘怡誠，從小我雖然對有關數學及科學探討就產生濃厚的興趣，但這興趣僅及於從課本上的汲取，到了國中，授教知識較寬廣了，在興趣的使然下，開始閱讀有關此類的書籍，更豐富了我的求知慾。自己也總覺得數字的波動都有規律、軌跡可循，就在老師的鼓勵下，做這項研究，探索這個奇妙的領域，雖然研究過程繁瑣複雜，但我樂在其中，此次的研究拓寬了我的視野，受益良多。

數字波的節點探討

中文摘要：

數字波是探討在直線上的起始點、位移速度、總數相互變化的節點關係。在直線上，將全部格子數做爲總數(m)，開始彈跳的點爲起始點(i)，每次彈跳的格子數爲位移速度(s)，被踩到的格子就是節點。節點是由位移速度和起始點決定，起始點本身可視爲節點之一，之後的節點是由起始點加 n 個位移速度產生。

我們分別以三種型式討論：

起始點等於位移速度，總數增加：

使起始點和位移速度所代表的數字相同的彈跳。節點呈 2、s、s+2…

起始點固定，位移速度與總數增加：

觀察位移速度和總數的關係。兩節點的和=s+2

位移速度固定，起始點與總數增加：

探討起始點和總數的關係。發現節點隨起始點有規律的變化

在上述討論的型式中，我們再進一步將位移速度分爲質數和合數，進而依其因數變化，可觀測到很多特殊的節點變化。

Abstract

The number wave is to discuss the relationship of the starting point, the moving speed, and the variations of total amount. In straight lines, let all the trellises be total amount (m), and let the starting jumping point be the starting point (i). The trellis number of each jump is the moving speed(s). The trodden trellises are knots. And knots are decided by the moving speed and the starting point. The starting point itself can be viewed as a knot. The following knots produce with the starting point and n moving speeds.

We respectively discuss them in three types:

When the starting point equals the moving speed, the total amount increases. The number of the starting point is the same with the jumping moving point; the knots are 2, s, s+2….

When the starting point is fixed, the moving speed and the total number increase.

From observing the relationship between the moving speed and the total number, the sum of two knots is s+2.

When the moving speed is fixed, the starting point and the total number increase.

After our research into the relationship between the starting point and the total amount, we find the knots have regular variations with the starting point.

From the types discussed above, we further divide the moving speed into prime numbers and non-prime numbers. Furthermore, according to the factor variations, we can see a lot of specific knot variations.

壹、研究動機：

現在夜市有許多遊戲，其中一種就是彈跳乒乓球的遊戲：在固定的範圍內擺設固定的杯子數丟球，丟進便有禮物。利用這個遊戲，我們就設計出另一種遊戲—在杯子的頭尾各放一個障礙物，以便反彈。以有彈力的球彈跳，把第一個投入的杯子當作起始點，每次彈跳的空格數由我們自己決定，把踩到的杯子數都紀錄下來，直到找不到可以彈入的杯子數爲止(重複就不算)。如果真有這種球，我們都想知道被球彈到的有哪些？是否有規則讓我們預測？

貳、研究目的：

從任意給定的總數、位移速度和起始點的條件下，尋找一套判斷規則，判斷出哪些杯子會被踩到。

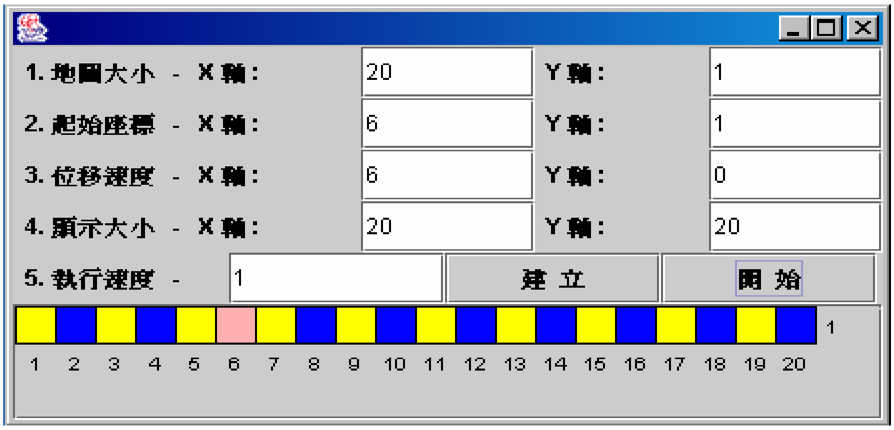
參、研究器材：

方格紙、筆、自製程式(RUN)

一、**RUN**：

用 Jave 語言製成，內有：

1.地圖大小：代表總共的杯子數
2.位移速度：每次彈跳的空格數
3.起始座標：一開始的起始點
4.顯示大小：所顯示的格子大小
5.執行速度：所需時間(自訂)，如下圖：



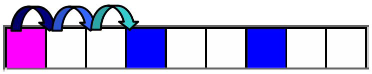
二、程式使用說明：

依上圖中的圖表，藍色代表被彈到的，黃色代表所剩的數，粉紅色代表起始點。因爲在地圖大小中，y 軸爲列數，所以在一直線時則訂爲 1，而位移速度由 x 軸的數字控制，因爲是在直線上，所以 y 軸被定爲 0。

肆、研究過程：

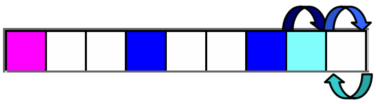
首先我們研究由起點向右彈跳的直線型，先介紹彈跳規則(以下的起始點均是我們眼睛直接看到的起始點)：

例如：起始點(1，0)，位移速度(3，0)，總數= 9



(圖一)

起始點本身再一開始彈跳時就爲節點，之後跳 3 格，也就是第 4 格爲節點，遇到最後一格，若剩下的格子數不夠跳 3 格，如(圖一)。則再跳完第九格後反彈，反彈情形如(圖二)中淡藍色格子，所得第四個節點爲 8，依此類推。



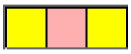
(圖二)

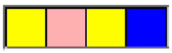
以下設總數爲 m，起始點爲 i，位移速度爲 s

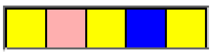
一、位移速度與起始點相同 (i=s)

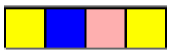
使起始點和位移速度所代表的數字相同的彈跳。 由於我們設起始點=位移速度，所以均以 s 爲代表

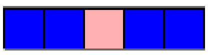
當 s=1，不論 m 爲何，全爲節點

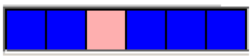
s=2，m=3 

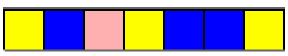
m=4  節點都爲 2、4

m=5 

s=3，m=4 

m=5  隔 3 個出現類似的節點

m=6 

m=7 

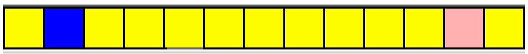
s=4，m=5、8 節點均爲 2、4

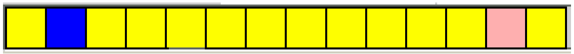
m=6、7 節點均爲 2、4、6

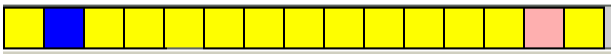
s=5，m=6、11 節點分別爲 2、5 以及 2、5、10

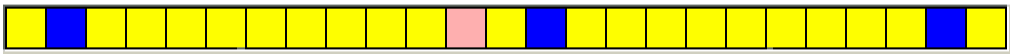
推論一：

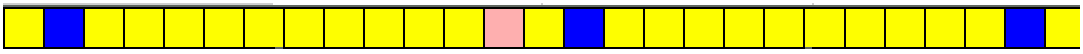
當 m=ks+1 (s 的整數倍+1，k 爲正整數)，則節點爲 es、es+2(e 爲 0 或正整數)

k=1，s=12 

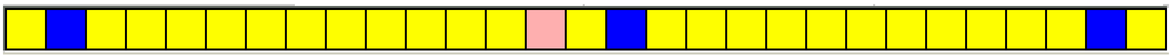
k=1，s=13 

k=1，s=14 

k=2，s=12 

k=2，s=13 

k=2，s=14



於是我們就把 s 分爲偶數、質數和奇數來探討：

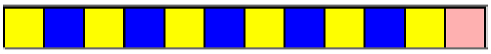
推論二：

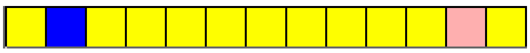
s 爲偶數(不等於 2)：1.m=ks+1 與 m=ks/2+1 會出現同型態的節點

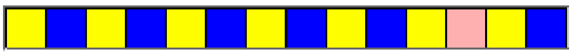
2.依 s 的因數的不同，也各有不同型態的節點

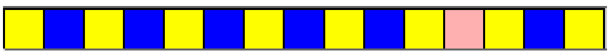
偶數部分：

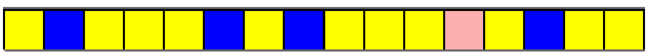
例如：s=12

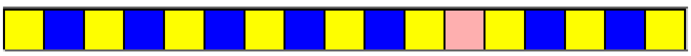
m=12 

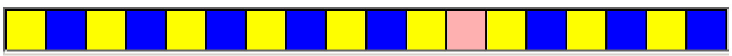
m=13 

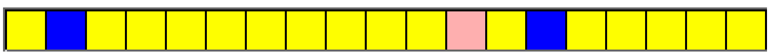
m=14 

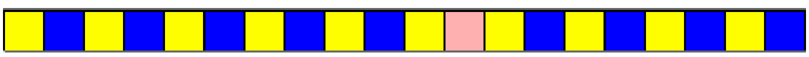
m=15 

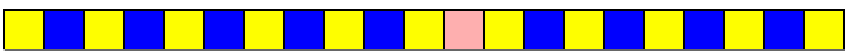
m=16 

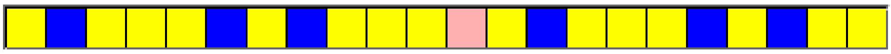
m=17 

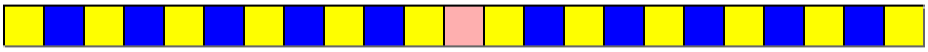
m=18 

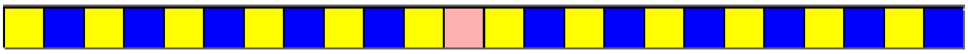
m=19 

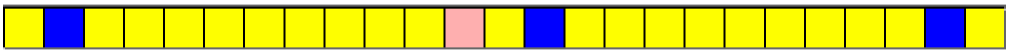
m=20 

m=21 

m=22 

m=23 

m=24 

m=25 

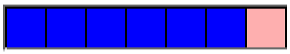
由上可發現，當 m=s+1 時，開始出現了規律：
因爲 12 的因數有 1、2、3、6、12，於是以 m=s+1 爲基準點，從基準點加 s 的因數會出現各自的規律：每隔 6 個會出現 12 的形式，每隔 3 個就出現 3 的形式，每隔 1 個就會出現 2 的形式。若和上一個抵觸，則以上一個出現的節點型態爲主。

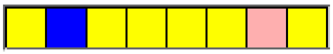
推論三：

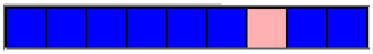
若 s 爲質數，則只有當 m= ks +1 時才會產生特殊型態節點，其餘 m 全都爲節點。

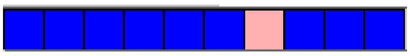
質數部分：

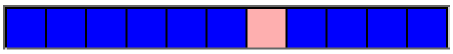
例如： s=7

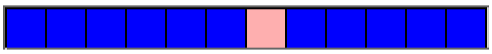
m=7 

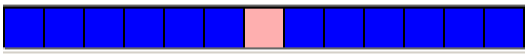
m=8 

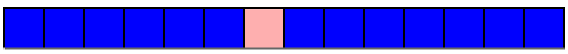
m=9 

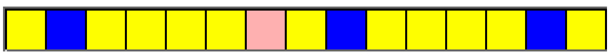
m=10 

m=11 

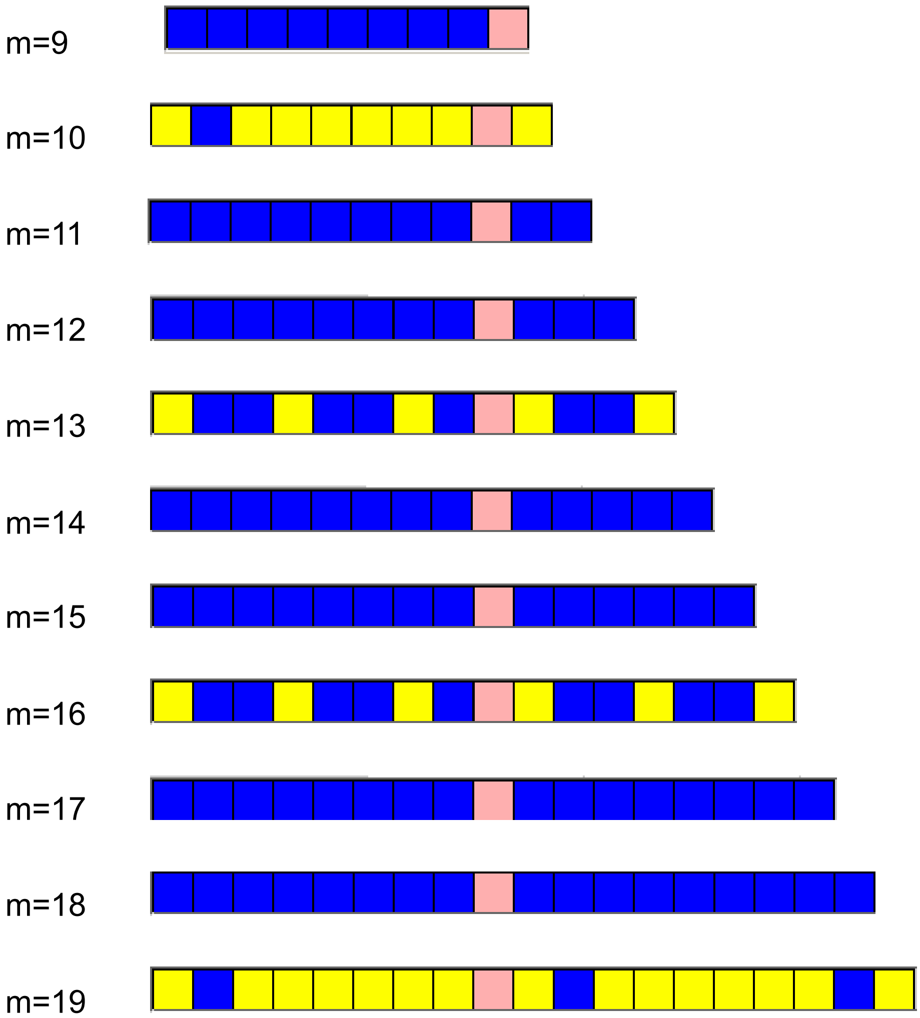
m=12 

m=13 

m=14 

m=15 

推論四：s 爲奇數，但不爲質數。依 s 的因數的不同而有不同的節點型態：
又如奇數：
例如： s=9



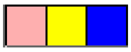
由上的表可以把 m=19 和 m=10 所出現的節點歸爲一類，m=13 和 m=16 所出現的節點歸爲一類發現：由 m=s+1 產生特殊節點的變化，若以這總數爲基準(設 A)，由 A 往下加 9 的因數：9、3、1 會發現其規律變化，往下加 9 會產生 2、s、s+2、2s..之類的節點；若向下加 3 會產生 2、3、5、6...的節點；向下加 1 就全都爲節點(以上若和上一個抵觸則以上一個爲準)。由於奇數部分是質數和不被 2 整除的合數，因此猜想 m 和 s 之間所產生的節點關係是參雜了質數和合數，因此除了 m 爲 A 往下加 9 的因數以外，其餘的 m 均全都爲節點。

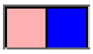
二、位移數度改變，固定起始點

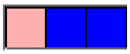
固定起始點，用以觀察位移速度和總數的關係。我們先固定起點均在 1，考慮 m 變動，s 漸增，i=1

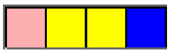
當 s=1，不論 m 爲何全都爲節點

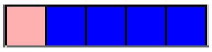
s=2，不論 m 爲何，節點均爲奇數(2n+1)。

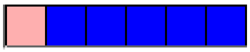
如 m=3 

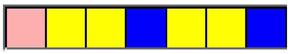
s=3，m=2 

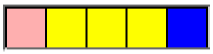
m=3 

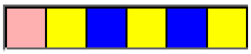
m=4 

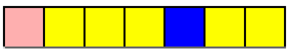
m=5  隔 3 個

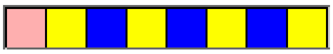
m=6 

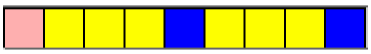
m=7  發現當 m=3k+1 則節點也是 3k+1

s=4，m=5 

m=6  隔 2 個

m=7 

m=8  隔 2 個

m=9 

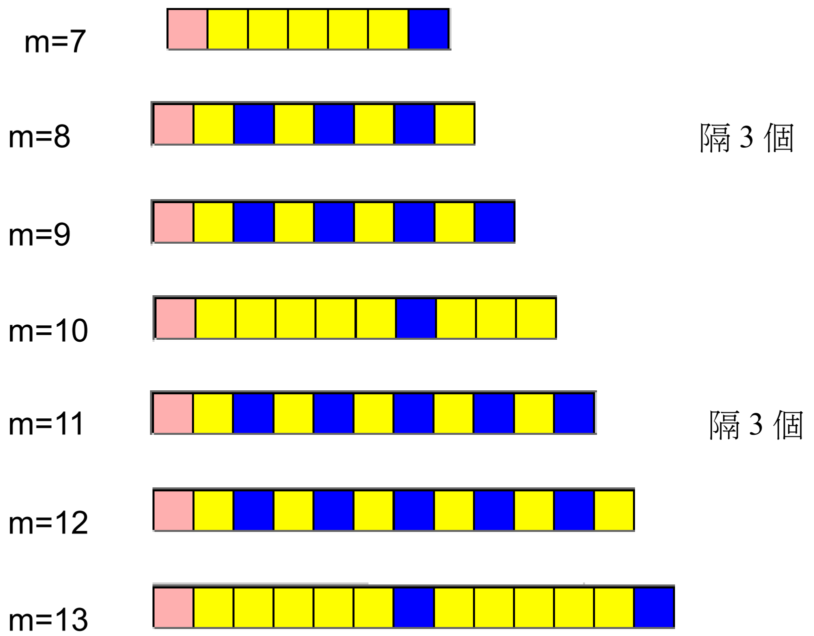
推論五：

當 m= ks+1 (s 的整數倍+1)，則節點爲 1、s+1、2s+1 ...ks+1(k 不等於 0)

(往返於 1、s+1、2s+1 ...ks+1 之間)

但 s=4 時，m 每隔 2 個會出現 1、s+1 的情形，又我們找 s=6 時：

例如： s=6 (先研究 6 的因數：1、2、3、6，猜想節點和 s 的因數有關。)



延伸推論五

↓

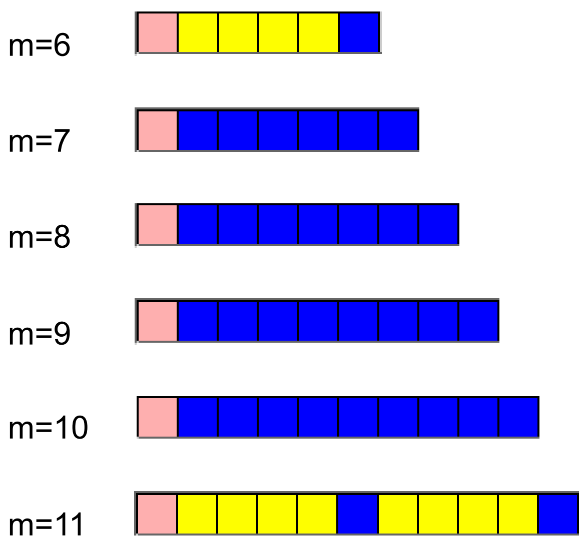
推論六：

除了 m= ks+1 外，還有兩種情形：

1. s 能被 2 整除，即 m= ks/2+1 (k 不等於 0)，則有節點 1、s+1、2s+1 ...ks+1

2. s 不能被 2 整除：

例如： s=5



經以上圖表可知仍在維持推論五。由上發現一個特點：當 s 爲質數(奇數 s 不能被 2 整除)，除 m= k*s+1 之外有節點 1、s+1、2s+1 ...ks+1，其餘的 m 節點均是全都爲節點。但若 s 爲非質數，如合數？研究如下表(1)

例如：起始點(1.0)
(全部均爲節點以 A 紀錄，其餘以一般式紀錄，如：2n+1)

m\s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	A																		
2	A	2n+1	A																
3	A	2n+1	A																
4	A	2n+1	3n+1																
5	A	2n+1	A	4n+1															
6	A	2n+1	A	2n+1	5n+1														
7	A	2n+1	3n+1	4n+1	A	6n+1													
8	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	7n+1												
9	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A	8n+1											
10	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	6n+1	A	2n+1	3n+1										
11	A	2n+1	A	4n+1	5n+1	2n+1	A	4n+1	A	10n+1									
12	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	11n+1								
13	A	2n+1	3n+1	4n+1	A	6n+1	A	8n+1	3n+1	2n+1	A	12n+1							
14	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	13n+1						
15	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	7n+1	4n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	14n+1					
16	A	2n+1	3n+1	2n+1	5n+1	6n+1	A	2n+1	3n+1	10n+1	A	6n+1	A	2n+1	15n+1				
17	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A	8n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A	16n+1			
18	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	17n+1		
19	A	2n+1	3n+1	4n+1	A	6n+1	A	4n+1	3n+1	2n+1	A	12n+1	A	2n+1	3n+1	4n+1	A	18n+1	
20	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	19n+1
21	A	2n+1	A	4n+1	5n+1	2n+1	A	8n+1	A	10n+1	A	4n+1	A	2n+1	5n+1	8n+1	A	2n+1	A
22	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	6n+1	7n+1	2n+1	3n+1	2n+1	A	6n+1	A	14n+1	3n+1	2n+1	A	6n+1	A
23	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	11n+1	4n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A
24	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A
25	A	2n+1	3n+1	4n+1	A	6n+1	A	8n+1	3n+1	2n+1	A	12n+1	A	2n+1	3n+1	16n+1	A	6n+1	A
26	A	2n+1	A	2n+1	5n+1	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	5n+1	2n+1	A	2n+1	A
27	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	10n+1	A	4n+1	13n+1	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A
28	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	6n+1	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	6n+1	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	6n+1	A
29	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	7n+1	8n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	14n+1	A	8n+1	A	2n+1	A
30	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A

表(1)

若 s 為合數(有因數 2 和無因數 2)，考慮 m 和節點的關係：
由前表觀察得：

節點出現有某些形式(稱之為型)，而好像和 s 的因數有關，且會隨 m 而有週期性的變化，不過實際情形如何？

例如： 當 s=12

則 12 的因數有 12、6、4、3、2、1(同顏色為一組)

從 m=12+1 開始，節點：1、12+1(13)、2*12+1(25) ...12k+1(以 12 的倍數增加)
隔 3 個 → m=16，節點：1、6+1(7)、2*6+1(13) ...6k+1(以 6 的倍數增加)
隔 6 個 → m=19，節點：1、12+1(13)、2*13+1(25) ...12k+1(以 12 的倍數增加)

隔 2 個 → m=15，節點：1、4+1(5)、2*4+1(9) ...4k+1(以 4 的倍數增加)
隔 1 個 → m=14，節點：1、2+1(3)、2*2+1(5) ...2k+1(以 2 的倍數增加)

結果可得：設 m=13 為基準點，則在基準點後：

每隔 1 出現 2k+1 的節點
每隔 2 出現 4k+1 的節點
每隔 3 出現 6k+1 的節點
每隔 6 出現 12k+1 的節點

顯然我們考慮 s 的因數比較能看出節點形式
但又為何有 2k+1、4k+1、6k+1、12k+1 等不同的形式呢？想必也和 s 有關。

又如： s=15

15 的因數有 15、5、3、1
從 m 15+1 開始，節點：1、15+1(16)、2*15+1(31) ...15k+1(以 15 的倍數增加)
隔 5 個 → m=21，節點：1、5+1(6)、2*5+1(11) ...5k+1(以 5 的倍數增加)
隔 3 個 → m=19，節點：1、3+1(4)、2*3+1(7) ...3k+1(以 3 的倍數增加)

其他的 m 均全都為全節點

推論七：

1.若 s 為合數且 2 不能被 2 整除

$s=P_1^{n1} \text{ x } P_2^{n2} \text{ x } \ldots P_i^{ni}$ P_i 為質數

且 $P_1<P_2<P_{3.}<\ldots<P_i$

從 m=s+1 開始

找出 s 的所有因素 $:1.s_1.s_2\ldots s_i$ s 由小到大 (其中 s_i 均為奇數)

由小到大：每隔 s_i=>結點 s_i 型.每隔 s_{i-1}=>結點 s_{i-1} 型……每隔 s_1=>結點 s_1 型

2.若 s 為合數且 s 能被 2 整除

則必須退求下一個因數

舉例： s=24 (24 的因數有 24、12、6、4、3、2、1)

分組得：

2.1　24、12　　節點爲→1、s+1、2s+1 ...ks+1

2.2　 6、3　　 節點爲→6n+1

2.3　 4、2　　節點爲→4n+1

2.4　 1　　　 節點爲→2n+1

三、固定位移速度，改變起始座標

固定位移速度，探討起始點和總數的關係。我們依循前一個實驗的作法，分成質數和合數來討論：

質數部分： 例如：位移速度=5

m \ i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1										
2	A									
3	A	A								
4	A	A	A							
5	A	A	A	A						
6	2.5	3.4	3.4	2.5	1.6					
7	A	A	A	A	A	A				
8	A	A	A	A	A	A	A			
9	A	A	A	A	A	A	A	A		
10	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
11	2.5.7.10	3.4.8.9	3.4.8.9	2.5.7.10	1.6.11	2.5.7.10	3.4.8.9	3.4.8.9	2.5.7.10	1.6.11
12	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
13	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
14	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
15	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
16	2.5.7.10 12.15	3.4.8.9. 13.14	3.4.8.9. 13.14	2.5.7.10 12.15	1.6.11.16	2.5.7.10 12.15	3.4.8.9. 13.14	3.4.8.9. 13.14	2.5.7.10 12.15	1.6.11.16
17	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
18	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
19	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
20	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
21	2.5.7.10 12.15.17 20	3.4.8.9 13.14.18 19	3.4.8.9 13.14.18 19	2.5.7.10 12.15.17 20	1.6.11.16 21	2.5.7.10 12.15.17 20	3.4.8.9 13.14.18 19	3.4.8.9 13.14.18 19	2.5.7.10 12.15.17 20	1.6.11.16 21
22	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
23	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
24	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
25	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

表(2)

由上表(2)中，m=11 時可以發現到：

起始點在 2、5、7、10 時的節點都相同

起始點在 3、4、8、9 時的節點都相同

起始點在 6、11 時的節點都相同

由此推論，節點在這種情況下會有節點循環的現象，也就是說當 i=2、5、7、10…時節點就呈 2.5.7.10…以此類推。

推論八：

當位移速度固定，起始點改變時會有節點循環的現象。

若從另一個角度看來，猜想 s 為質數，所以沒有像之前的實驗中的合數有因數的變化，但和質數變化相似。因此我們認為位移速度固定，起始點改變時，節點也會呈現以因數來顯示的型。所以若 s 為合數，會呈現什麼變化呢？

合數部分：

例如：位移速度=6

m \ i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1										
2	2									
3	2	2n+1								
4	2	3	4							
5	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1						
6	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2					
7	2.6	3.5	4	3.5	2.6	1.7				
8	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2			
9	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1		
10	2.6.8	3.5.9	4.10	3.5.9	2.6.8	1.7	2.6.8	3.5.9	4.10	
11	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
12	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
13	2.6.8 12	3.5.9 11	4.10	3.5.9 11	2.6.8 12	1.7 13	2.6.8 12	3.5.9 11	4.10	3.5.9 11
14	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
15	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
16	2.6.8 12.14	3.5.9 11.15	4.10 16	3.5.9 11.15	2.6.8 12.14	1.7 13	2.6.8 12.14	3.5.9 11.15	4.10 16	3.5.9 11.15
17	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
18	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
19	2.6.8 12.14 18	3.5.9 11.15 19	4.10 16	3.5.9 11.15 19	2.6.8 12.14 18	1.7. 13. 19	2.6.8 12.14 18	3.5.9 11.15 19	4.10 16	3.5.9 11.15 19

表(3)

由上表可知當 s 爲合數時，就依照其因數的型作節點的變化，似乎當這種情形時，位移速度沒有影響的節點的變化，只是知道隔了幾個數會有特殊節點的變化。因此我們推測當「固定位移速度，改變起始座標」的實驗和之前所做有關因數的研究相同。

推論九：

當固定位移速度,改變起始座標時的合數情形和前一個步驟的恩數研究結果相同。

再研究同時向左右跳的直線型：

我們就依照向右跳的方式做三種不同的研究，發現所得的結果和只向右跳的結果相同。如下表(4)、表(5) 、表(6)：

位移速度等於起始點

i / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	A									
2	A	2								
3	A	2	A							
4	A	2.4	2.3	2.4						
5	A	2.4	A	2.4	A					
6	A	2n+2	A	4.6	2.5	2n+2				
7	A	2n+2	2.3.5.6	4.6	A	2.6.	A			
8	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	2.7	2n+2		
9	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2.8	A	
10	A	2n+2	2.3.5.6. 8.9.	2n+2	A	2.6.8	A	2n+2	2.9	2n+2
11	A	2n+2	A	2n+2	2.5.7.10	2n+2	A	2n+2	A	2.10
12	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
13	A	2n+2	2.3.5.6. 8.9.11.12	2n+2	A	2.6.8.12	A	2.8.10	2.3.5.6.8.9 11.12	2n+2
14	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
15	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	2.7.9.14	2n+2	A	2n+2
16	A	2n+2	2.3.5.6 .8.9.11.12 .14.15	2n+2	2.5.7.10. 12.15	2.6.8.12 .14	A	2n+2	2.3.5.6.8.9. 11.12.14.15	2.10.12
17	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2.8.10.16	A	2n+2
18	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
19	A	2n+2	2.3.5.6 .8.9.11.12 .14.15.17.18	2n+2	A	2.6.8.12 .1418	A	2n+2	2.9.11.18	2n+2
20	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
21	A	2n+2	A	2n+2	2.5.7.10. 12.15.20	2n+2	A	2.8.10.16 18	A	2.10.12.20

表(4)

位移速度改變，固定起始點

s = 2

m \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	A									
2	A	2								
3	A	2	A							
4	A	2.4	2.3	2.4						
5	A	2.4	A	2.4	A					
6	A	2n+2	A	2n+2	2.5	2n+2				
7	A	2n+2	2.3.5.6	2n+2	A	2.6	A			
8	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	2.7	2n+2		
9	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2.8	A	
10	A	2n+2	2.3.5.6 8.9	2n+2	A	2.6.8	A	2n+2	2.9	2n+2
11	A	2n+2	A	2n+2	2.5.7.10	2n+2	A	2n+2	A	2.10
12	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
13	A	2n+2	2.3.5.6 8.9.11 .12	2n+2	A	2.6.8.12	A	2.8.10	2.3.5.6 8.9.11 12	2n+2
14	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
15	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	2.7.914	2n+2	A	2n+2
16	A	2n+2	2.3.5.6 8.9.11.12 14.15	2n+2	2.5.7.10 12.15	2.6.8.12 14	A	2n+2	2.3.5.6 8.9.11 12.14 15	2.10.12

表(5)

固定位移速度,改變起始座標

s = 6

m \ i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1										
2	2									
3	2	2n+1								
4	2	3	4							
5	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1						
6	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2					
7	2.6	3.5	4	3.5	2.6	1.7				
8	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2			
9	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1		
10	2.6.8	3.5.9	4.10	3.5.9	2.6.8	1.7	2.6.8	3.5.9	4.10	
11	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
12	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
13	2.6.8 12	3.5.9 11	4.10	3.5.9 11	2.6.8 12	1.7 13	2.6.8 12	3.5.9 11	4.10	3.5.9 11
14	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
15	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
16	2.6.8 12.14	3.5.9 11.15	4.10 16	3.5.9 11.15	2.6.8 12.14	1.7 13	2.6.8 12.14	3.5.9 11.15	4.10 16	3.5.9 11.15
17	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
18	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1	2n+2	2n+1
19	2.6.8 12.14 18	3.5.9 11.15 19	4.10 16	3.5.9 11.15 19	2.6.8 12.14 18	1.7. 13. 19	2.6.8 12.14 18	3.5.9 11.15 19	4.10 16	3.5.9 11.15 19

表(6)

伍、研究討論：
經過以上的種種的推論與實驗，發現節點的產生和 s、I、m 有不可密分的關係。因此我們就來討論 s 和 i 的關係：

起始 i=1　　s-i 節點形式爲 1、s+1
起始 i=2　　s-i 節點形式爲 2、s

.
依此類推

發現節點總和相加均爲 s+2，因而推得性質一：

性質一：當 m=ks+1 時，所產生的節點相加均爲 s+2

性質二：當 s 爲質數時，m 爲 s+1 和 2s+1…ks+1 時所產生的節點相似，代表 m 每相差 s 就有相同的規律

性質三：當 s 爲合數時（含完全平方數），m 爲 s+1.(3s/2)+1…(ks/2)+1 所產生的節點相似，代表所產生特殊節點的總數的間隔，隱含著 s 除本身外的最大因數。令除 s 本身外的最大因數爲 φ 表示，則 m 與 φ 的關係如下：＜n 爲商.p 爲餘數＞

$m\div\varphi=n\cdots p$　　　　$(m+\varphi)\div\varphi=(n+1)\cdots p$

$\therefore \varphi n+p=m$　　$\Rightarrow \therefore \varphi(n+1)+p=m+\varphi$

$\varphi n+\varphi+p=m+\varphi$

$\therefore \varphi n+p=m$

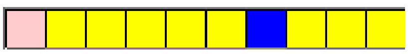
φ 不一定爲 s 的最大因數，可爲 s 的任意因數，代表節點總數間隔會隨因數循環。

設起點 i=1 理想情形，m 剛好可以容下 s

當 m=s+1 開始，間隔 s 會出現相同的情形節點，但間隔 s/2 時？

例如：

s=6　m=7+3

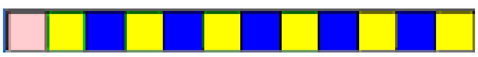


則第一次反彈最後會將 s 反射回來（剛好 s/2）回到最後一節點 s+1 而形成循環。

但間隔 s/4 時？

例如：

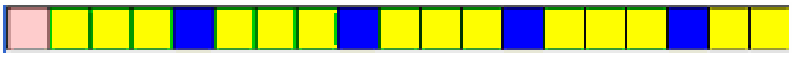
s=8　m=9+2



則第二次反彈，才會累積 s/2（s/4×2）回到最後一個節點，增加(s/2)+1 等點，節點 1.（s/2）+1.s+1.（3s/2）+1…

但間隔 s/8 時?

例如：s=16　m=17+2　　　(16 的因數有:16.8.4.2.1)



則第四次反彈，才會累積 s/2(s/8×4=s/2)回到節點增加:s/4+1.2s/4+1.3s/4+1.s+1

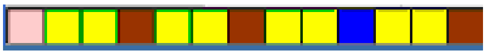
推得→間隔 s/16 時：

順反彈 8 次(s/16×8=s/2)才能累積 s/2 會增加 7 個節點=1、s/8+1、2s/8+1、3s/8+1、4s/8+1、5s/8+1、6s/8+1、7s/8+1、s+1

針對 s 中 2n 的因數會呈現特殊情況，但其他非 2n 的因數無法累積到 s/2。

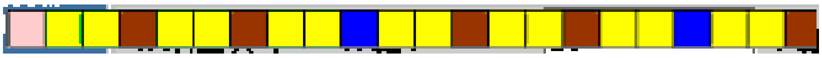
試著間隔 s/3？

例如：s=9　m=10+3



需反彈 3 次，累積 s，增加三個節點(如棕色所示)節點:1、s/3+1、2s/3+1、s+1、4s/3+1

又當 s=9　m=19+3



需反彈 3 次累積 s 增加 5 個節點:1、s/3+1、2s/3+1、s+1、4s/3+1、 5s/3+1、2s+1、7s/3+1

若間隔 s/5？

例如：　s=15　m=16+3

反彈 4 次累積 s 增加 5 個節點: 1、s/5+1、2s/5+1、3s/5+1、4s/5+1、s+1、6s/5+1

性質四：若 s 被 2 整除，則當 m 從 s+1 間隔 2n|s，不需累積到 s 而只需累積到 s/2，所以會增加較少的節點 k/2n+1xs+1，反之 s 不能被 2 整除，則 m 從 s+1 增加間隔 p|s 時（p 爲 s 的因數）須累積至 s，增加節點 k/pxs+1 如果 $s=2^n \cdot p_1^{n1} \cdot p_2^{n2} \cdots K_i^{ni}$ 時，

從 m=s+1

＋ s/2 出現的節點 →　1、s+1…

＋ s/4 出現的節點 →　1、s/2+1、s+1…

↓

＋s/2n 出現的節點 →　1、s/(1/2n)p+1…

＋s/p　出現的節點 →　1、1/2ps+1…

＋s/2p 出現的節點 →　1、s/(1/2n)p+1…

例如：　$s=2^2\times3\times5=60$　　s=60 的因數

60　30　15　12　10　6　5　4　3　2　1　(同顏色視爲同一組)

則從 m=60+1

＋30 出現 60 的型式	1、s+1(61)…
＋15 出現 30 的型式	1、s/2+1(31)、s+1(61)…
＋10 出現 20 的型式	1、s/3+1(21) 、2s/3+1(41) 、s+1(61)...
＋5 出現 10 的型式	1、s/6+1(11) 、2s/6+1(21) 、3s/6+1(31)...
＋6 出現 12 的型式	12n+1
＋3 出現 6 的型式	6n+1
＋2 出現 4 的型式	4n+1
＋1 出現 2 的型式	2n+1

性質五：找出一判別法(m-1) ÷s=k…g{0.1.2.s-1}

例如： s=60 m=1274

1274－1=1273

1273÷60=21…13

1273=60x21+13

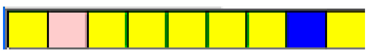
13 非 60 因數，因為 60 是合數，所以當非 60 的因數構成的型時，節點為 →2n+1

若有餘數 g 可由 s 的因數構成，則視其所構成因數稱之為型

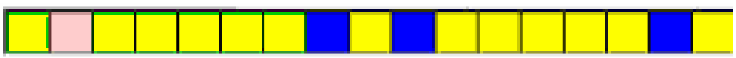
性質六：若 s 為合數，m=3s/2+1，則所得第三個節點為 m-1/2s+1，說明如下：

例如：起點 i=2 s=8

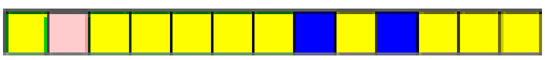
當 m= s+1 時，節點為 2 和 8



當 m= 2s+1 時，節點為 2、8、10、16



又當 m= 3/2s+1 時，節點為 2、8、10



由上可知，因為當 m= 3/2s+1 時，由於 m 無法容納第 4 個節點，所以只能顯示 3 個節點。

性質七：合數一般來說的基本因數為 2、3、5、7 (除 1 外) ，當 s 為任兩種的乘積。設 m= s+1 時為 A，則各在 A 後加 2n、3n、5n、7n，會顯示各自含有的規律。

性質八：把乒乓球向左右跳時，因為當乒乓球向左跳的節點會和向右跳的節點重疊，故顯示出來的為向右跳時的情形。

陸、研究結論與應用：

(總數為 m 起點為 i 位移速度為 s)

結論一：節點是由位移速度和起始點決定，起始點本身可視為節點之一，之後的節點是由起始點加 n 個位移速度產生。

結論二：我們分別以三種型式討論「起始點等於位移速度，總數改變」的情況：當 m=s*k+1 (s 的整數倍+1)，則會產生所謂的特殊節點節點呈 2、s、s+2…

結論三：「起始點固定，位移速度改變」時，更發現會產生特殊節點的情況分為兩類：s 為質數或合數。

以質數來說：當 m=s*k+1 (s 的整數倍+1)時，會產生特殊節點而其餘的 m 會產生全為節點的現象

以合數來說：不只在 m=s*k+1 (s 的整數倍+1)時，才有特殊節點產生，若 s 能被 2 整除，則在 m+1 後加其除本身外的最大因數，也可以找到特殊節點，而且和 m=s*k+1 (s 的整數倍+1)時所產生的節點相同；若 s 不能被 2 整除，則只有在 m=s*k+1 (s 的整數倍+1)時才能找到特殊節點。兩者都和「起始點等於位移速度，總數改變」所產生的特殊節點形式相同，而且各在 m+1 後加其因數，也都會各自產生其因數的形式。

結論四：在「位移速度固定，起始點改變」時，研究合數的情形和「起始點固定，位移速度改變」時都會依照因數而有變化。但發現節點隨起始點變化與位移速度無關，位移速度只是讓我們知道隔了幾個數就會產生特殊節點，這點就和「起始點固定，位移速度改變」時的合數不同。

結論五：經過不斷做實驗的結果，發現當 m=s+1 時所產生的兩節點相加均為 s+2，而這數為定值，不管適用在 s 為任何數上。

結論六：節點出現的情形隨 m 的增加而有週期性的變化，但週期性的變化需考慮 s (先不考慮 i)

結論七：當 s 為合數，i 為奇數時，則一開始的節點就以奇數開始，在之後的節點就以一次跳 2n 格的速率呈現，所以基本節點型式為 2n+1，反之 i 為偶數時，節點型式 2n+2。

結論八：若 s 為質數，當 m=ks+1 時出現 i 型節點(s-i 型 i/s=k k＜s.再討論其型)，其餘 m 均呈全為節點的現象。

結論九：若 s 不爲質數，考慮 s 的正因數：

$s=2^{i}{}_{2}$、$3^{i}{}_{3}$、$5^{i}{}_{5}$、$7^{i}{}_{7}\ldots p^{i}{}_{ni}$ (p 爲質數)

當 m= s+1 時　，出現 s-i 型節點

+ns/4　，出現 s/2-i 型節點

↓

+ns/(3*2)　，出現 s/3-i 型節點

+ns/(3*4)　，出現 s/6-i 型節點

↓

+ns/(5*2)　，出現 s/5-i 型節點

+ns/(5*4)　，出現 s/10-i 型節點

.

.

依此類推

例如：　s=12

12 的因數：12、6、4、3、2、1

m=s+1 之後，每隔 6 的出現 12-i 型的節點

每隔 3 的出現 6-i 型的節點

每隔 2 的出現 4-i 型的節點

每隔 1 的出現 2-i 型的節點

如：　13：12-i 型的節點

14：2-i 型的節點

15：4-i 型的節點

16：6-i 型的節點

17：4-i 型的節點

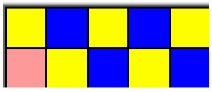
18：2-i 型的節點

19：12-i 型的節點

結論十：由於我們想到構成合數的基本根據是質數，合數由質數所組成。爲了要更了解節點的變化和規律，於是我們將 s 分別取 2 的次方、2 的次方乘以 3、2 乘以 3 的次方、2 的次方乘以 5、2 乘以 5 的次方、2 的次方乘以 7、2 乘以 7 的次方配上質數、合數和完全平方數來探討，發現和「起始點固定，位移速度改變」時會對各自的因數產生節點的情況相同。於是就下了個定論 ----節點的產生是由位移速度(s)的因數決定的。

結論十一：根據直線型原理我們在想：難道就只有平面會產生這樣奇妙的規律嗎？提到點，再來就是線最後就爲面，所以我們想說平面上的圖形是否和在線上的型式相同？於是我們嘗試做出一點平面的探討，程式操作上大約相同，只是由於平面所以不能設任何一處的 y 軸爲 0(起始座標以外)。

例如：固定 i 為(1,1)　s 為(1,1)　m 為(5, 2)

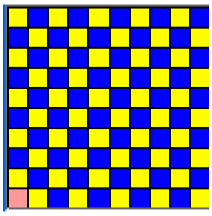


以第一列來說，起始點為 1，所以節點為 1.3.5 (2n+1)
以第二列來說，起始點為 2，所以節點為 2.4 (2n+2)

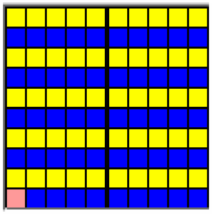
綜合以上兩種推論，可知平面是 n 個線型的組合，而當進一步的研究，也可分二類：

起始點不變，位移速度改變：

例如：起始點(1,1)　位移速度(1.1)　總數 10×10　圖(一)
　　　起始點(1,1)　位移速度(1.2)　總數 10×10　圖(二)



圖(一)



圖(二)

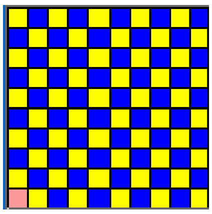
可推測：

以同一 x 座標為一類，當 x 座標相同時，y 座標為 1.5.7 時的圖形相同，y 座標為 2.4.6.10 時的圖形相同。

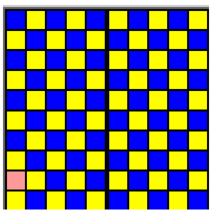
以同一 y 座標為一類，當 y 座標相同時，x 座標為 1.5.7 時的圖形相同，x 座標為 2.4.6.10 時的圖形相同。

起始點改變，位移速度不變：

例如：起始點(1,1)　位移速度(1.1)　總數 10×10　圖(三)
起始點(1,2)　位移速度(1.1)　總數 10×10　圖(四)



圖(三)



圖(四)

可推測：

起始點不管是什麼數字，圖形都相同

結論十二：我們嘗試設計出另一種起始點、位移速度，發現平面所產生的型態像是依照直線型態的規律在做變動。所以可推敲不管是何種圖形，都會依循直線的規律在變。

柒、參考資料：

國中數學課本第三冊第二章　因式和倍式
國中數學課本第六冊第一章　等差數列與等比數列

附錄

固定起始點，位移速度和總數增加

起始點(1.0)

s / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1															
2	A														
3	A	2n+1													
4	A	2n+1	A												
5	A	2n+1	3n+1	4n+1											
6	A	2n+1	A	2n+1	5n+1										
7	A	2n+1	A	4n+1	A	6n+1									
8	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	2n+1	7n+1								
9	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A	8n+1							
10	A	2n+1	A	2n+1	A	6n+1	A	2n+1	3n+1						
11	A	2n+1	3n+1	4n+1	5n+1	2n+1	A	4n+1	A	10n+1					
12	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	11n+1				
13	A	2n+1	A	4n+1	A	6n+1	A	8n+1	3n+1	2n+1	A	12n+1			
14	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	13n+1		
15	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	7n+1	4n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	14n+1	
16	A	2n+1	A	2n+1	5n+1	6n+1	A	2n+1	3n+1	10n+1	A	6n+1	A	2n+1	15n+1
17	A	2n+1	3n+1	4n+1	A	2n+1	A	8n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A
18	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A
19	A	2n+1	A	4n+1	A	6n+1	A	4n+1	3n+1	2n+1	A	12n+1	A	2n+1	3n+1
20	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A
21	A	2n+1	A	4n+1	5n+1	2n+1	A	8n+1	A	10n+1	A	4n+1	A	2n+1	5n+1
22	A	2n+1	A	2n+1	A	6n+1	7n+1	2n+1	3n+1	2n+1	A	6n+1	A	14n+1	3n+1
23	A	2n+1	3n+1	4n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	11n+1	4n+1	A	2n+1	A
24	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A
25	A	2n+1	A	4n+1	A	6n+1	A	8n+1	3n+1	2n+1	A	12n+1	A	2n+1	3n+1
26	A	2n+1	3n+1	2n+1	5n+1	2n+1	A	2n+1	A	10n+1	A	2n+1	A	2n+1	5n+1
27	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	2n+1	A	4n+1	13n+1	2n+1	A
28	A	2n+1	A	2n+1	A	6n+1	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	6n+1	A	2n+1	3n+1
29	A	2n+1	3n+1	4n+1	A	2n+1	7n+1	8n+1	A	2n+1	A	4n+1	A	14n+1	A
30	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A

起始點(2.0)

s / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	A									
3	A	2n+2								
4	A	2n+2	2.3							
5	A	2n+2	A	2n+2						
6	A	2n+2	A	2n+2	2.5					
7	A	2n+2	2.3.5.6	2n+2	A	2.6.				
8	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	2.7			
9	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2.8		
10	A	2n+2	2.3.5.6. 8.9.	2n+2	A	2n+2	A	A	2.9	
11	A	2n+2	A	2n+2	2.5.10	2n+2	A	A	A	2.10
12	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	A	A	A
13	A	2n+2	2.3.5.6. 8.9.11.12	2n+2	A	2.6.8.12	A	A	A	A
14	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	A	A	A
15	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	2.7.9.14	A	A	A
16	A	2n+2	2.3.5.6 .8.9.11.12 .14.15	2n+2	2.5.10. 15	2n+2	A	A	A	A
17	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2.8.10.16	A	A
18	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	A	A	A
19	A	2n+2	2.3.5.6 .8.9.11.12 .14.15.17.18	2n+2	A	2.6.8.12 .1418	A	A	A	A
20	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	A	2.9.11.18	A
21	A	2n+2	A	2n+2	2.5.10. 15.20	2n+2	A	A	A	2.10.12.20

起始點(3.0)

s / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	A									
3	A	2n+1								
4	A	2n+1	2.3.							
5	A	2n+1	A	3						
6	A	2n+1	A	2n+1	3.4					
7	A	2n+1	2.3.5.6.	3.7	A	3.5				
8	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	3.6			
9	A	2n+1	A	3.7.	A	2n+1	A	3.7		
10	A	2n+1	2.3.5.6. 8.9.	2n+1	A	3.5.9	A	2n+1	3.8	
11	A	2n+1	A	3.7.11	3.4.9	2n+1	A	3.7.11	A	3.9
12	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
13	A	2n+1	2.3.5.6. 8.9.11.12.	3.7.11	A	3.5.9.11	A	3.7.11	2.3.5.6. 8.9.11.12.	2n+1
14	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
15	A	2n+1	A	3.7.11.15	A	2n+1	3.6.10.13	3.711.15.	A	2n+1
16	A	2n+1	2.3.5.6. 8.9.11.12 14.15	2n+1	3.4.9.10 16	3.5.9.11 15	A	2n+1	2.3.5.6. 8.9.11.12. 14.15	3.9.13

起始點(4.0)

s / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	A	2n+2	3n+1	2n+2	A	4	A	2n+2	3n+1	2n+2
5	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+1	A	4	A	2n+2
6	A	2n+2	A	2n+2	3.4	2n+1	A	2n+2	A	2n+2
7	A	2n+2	3n+1	2n+2	A	4	A	2n+2	3n+1	4
8	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+1	4.5	2n+2	A	2n+2
9	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+1	A	4.6	A	2n+2
10	A	2n+2	3n+1	2n+2	A	4.10	A	2n+2	4.7	2n+2
11	A	2n+2	A	2n+2	3.4.8.9	2n+1	A	2n+2	A	4.8
12	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+1	A	2n+2	A	2n+2
13	A	2n+2	3n+1	2n+2	A	4.10	A	4.6.12	3n+1	2n+2
14	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+1	A	2n+2	A	2n+2
15	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+1	4.5.11.12	2n+2	A	4.8.10
16	A	2n+2	3n+1	2n+2	3.4.8.9.13.14	4.10.16	A	2n+2	3n+1	2n+2

起始點(5.0)

m \ s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4	A	A	A	A.	A	A	A	A	A	A
5	A	2n+1	A	2n+1	A	3.5	4.5	5	2.3.5	2n+1
6	A	2n+1	A	1.5	2.5	2n+1	A	2n+1	A	5
7	A	2n+1	2.3.5.6	2n+1	A	2n+1	A	5	5.6	2n+1
8	A	2n+1	A	1.5	A	3.5.9	A	2n+1	A	2n+1
9	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	5.	A	2n+1
10	A	2n+1	2.3.5.6. 8.9	1.5.9.	A	2n+1	A	2n+1	5.6	2n+1
11	A	2n+1	A	2n+1	2.5.7.10	3.5.9.11	A	1.5..9	A	5.7
12	A	2n+1	A	1.5.9.	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
13	A	2n+1	2.3.5.6. 8.9.11.12	2n+1	A	2n+1	A	5.13	2.3.5.6 8.9.11.12.	2n+1
14	A	2n+1	A	1.5.9.13	A	3.5.9.11 15	A	2n+1	A	2n+1
15	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	4.5.11.12	1.5.9.13	A	2n+1
16	A	2n+1	2.3.5.6. 8.9.11.12 .14.15.	1.5.9.13	2.5.7.10 12.15	2n+1	A	2n+1	2.3.5.6 8.9.11.12. 14.15	5.7.15

起始點(6.0)

s / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	A	2n+2	A	2n+2	1.6	2n+2	A	2n+2	A	6
7	A	2n+2	2.3.5.6	2n+2	A	2.6	A	2n+2	2.3.5.6	2n+2
8	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	3.6	2n+2	A	2n+2
9	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	4.6	A	2n+2
10	A	2n+2	2.3.5.6.8.9	2n+2	A	2.6.8	A	2n+2	5.6	2n+2
11	A	2n+2	A	2n+2	1.6.11	2n+2	A	2n+2	A	6
12	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
13	A	2n+2	2.3.5.6.8.9 11.12	2n+2	A	2.6.8.12	A	4.6.12	3n+1	2n+2
14	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
15	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	3.6.10.13	2n+2	A	2n+2
16	A	2n+2	2.3.5.6.8.9 11.12.14.15	2n+2	1.6.11.16	2.6.8.12.14	A	2n+2	3n+1	6.16

起始點(7.0)

m \ s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	A	2n+1	3n+1	3.7	A	1.7	A	3.7	3n+1	2n+1
8	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	2.7	2n+1	A	2n+1
9	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	3.7	A	2n+1
10	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	1.7	A	2n+1	4.7	2n+1
11	A	2n+1	A	3.7.11	2.5.7.10	2n+1	A	4n+3	A	5.7
12	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
13	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	1.7.13	A	4n+3	3n+1	2n+1
14	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
15	A	2n+1	A	3.7.11.15	A	2n+1	2.7.9.14	3.7.11.15	A	2n+1
16	A	2n+1	3n+1	2n+1	2.5.7.10 12.15	1.7.13	A	2n+1	3n+1	5.7.15
17	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	4n+3	A	2n+1
18	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
19	A	2n+1	3n+1	3.7.11.15.19	A	1.7.13 19	A	4n+3	3.7.13.16	2n+1
20	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
21	A	2n+1	A	2n+1	2.5.7.10 12.15.17 20	2n+1	A	4n+3	A	5.7.15 17
22	A	2n+1	3n+1	2n+1	A	1.7.13 19	2.7.9.14. 16.21	2n+1	3n+1	2n+1

起始點(8.0)

s/m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	1.8	2n+2	A	2n+2
9	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2.8	A	2n+2
10	A	2n+2	2.3.5.6.8.9	2n+2	A	2.6.8	A	2n+2	3.8	2n+2
11	A	2n+2	A	2n+2	3.4.8.9	2n+2	A	2n+2	A	4.8
12	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
13	A	2n+2	2.3.5.6.8.9 11.12	2n+2	A	2.6.8.12	A	2.8.10	2.3.5.6.8.9 11.12	2n+2
14	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
15	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	1.8.15	2n+2	A	2n+2
16	A	2n+2	2.3.5.6.8.9 11.12.	2n+2	3.4.8.9 13.14	2.6.8.12.14	A	2n+2	2.3.5.6.8.9 11.12.14.15	4.8.14
17	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2.8.10.16	A	2n+2
18	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
19	A	2n+2	2.3.5.6.8.9 11.12.14.15 17.18	2n+2	A	2.6.8.12.14 18	A	2n+2	3.8.12.17	2n+2
20	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
21	A	2n+2	A	2n+2	3.4.8.9 13.14.18.19	2n+2	A	2.8.10.16 18	A	2n+2
22	A	2n+2	2.3.5.6.8.9 11.12.14.15 17.18	2n+2	A	2.6.8.12.14 18.20	1.8.15.22	2n+2	2.3.5.6.8.9 11.12.14.15 17.18.20.21	2n+2
23	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	4.8.14.21

起始點(9.0)

s / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	A	2n+1	A	3n+1	A	2n+1	A	1.9	A	2n+1
10	A	2n+1	2.3.5.6 .8.9	2n+1	A	3.5.9	A	2n+1	2.9	2n+1
11	A	2n+1	A	3n+1	3.4.8.9	2n+1	A	3n+1	A	3.9
12	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
13	A	2n+1	2.3.5.6 8.9.11.12	2n+1	A	3.5.9.11	A	1.9	2.3.5.6 8.9.11.12	2n+1
14	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
15	A	2n+1	A	3n+1	A	2n+1	2.7.9.14	3n+1	A	3.9.13
16	A	2n+1	2.3.5.6 8.9.11.12 14.15	2n+1	3.4.8.9. 13.14	3.5.9.11 15	A	2n+1	2.3.5.6 8.9.11.12 14.15	2n+1
17	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	1.9.17	A	2n+1
18	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
19	A	2n+1	2.3.5.6 .8.9.11.12 14.15.17.18	3n+1	A	3.5.9.11 15.17	A	3n+1	2.9.11.18	3.9.13.19
20	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1
21	A	2n+1	A	2n+1	3.4.8.9. 13.14.18 19	2n+1	A	1.9.17	A	2n+1
22	A	2n+1	2.3.5.6 .8.9.11.12. 14.15.17.18 20.21	2n+1	A	3.5.9.11 15.17.21	2.7.9.14 16.21	2n+1	2.3.5.6 .8.9.11.12. 14.15.17.18 20.21	2n+1
23	A	2n+1	A	3n+1	A	2n+1	A	3n+1	A	3.9.13.19 23
24	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1	A	2n+1

起始點(10.0)

s / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	A	2n+2	3n+1	2n+2	A	4.10	A	2n+2	1.10	2n+2
11	A	2n+2	A	2n+2	2.5.7.10	2n+2	A	2n+2	A	2.10
12	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
13	A	2n+2	3n+1	2n+2	A	4.10	A	2.8.10	3n+1	2n+2
14	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
15	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	3.6.10 13	2n+2	A	2n+2
16	A	2n+2	3n+1	2n+2	2.5.7.10 .12.15	4.10.16	A	2n+2	3n+1	2.10.12
17	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2.8.10.16	A	2n+2
18	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
19	A	2n+2	3n+1	2n+2	A		A	2n+2	1.10.19	2n+2
20	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
21	A	2n+2	A	2n+2	2.5.7.10 .12.15 17.20	2n+2	A	2.8.10.16 18	A	2.10.12.20
22	A	2n+2	3n+1	2n+2	A	4.10.16.22	3.6.10 13.17.20	2n+2	3n+1	2n+2
23	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
24	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2	A	2n+2
25	A	2n+2	3n+1	2n+2	A	4.10.16.22	A	2.8.10.16 18.24	3n+1	2n+2

由上我們可以觀察到，當 m=s+1 時，所產生的特殊變化。由起始點的不同可發現：
當起始點是奇數時，所顯現出的是 2n+1 的基本型式；當起始點是偶數時，所顯現出的是 2n+2 的基本型式。
又如我們把 m=s+1 時的彈跳情形分別表示出來：
例如：s=4

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…..
m=s+1	1.5	2.5	3.5	4.5	5	5.6	5.7	5.8	5.9	5.10	…..

s=6

	6	7	8	9	10	11	12	13	14	13	…..
m=s+1	1.7	2.7	3.7	4.7	5.7	6.7	7	7.8	7.9	7.10	…..

由上可發現，當 m=s+1 時所產生的特殊節點，像是有兩個球的彈跳情形，中途重疊，再交錯彈開。由於這種彈跳情形讓我們聯想到物理上的波--稱為數字波。