中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040401

讀心數

學校名稱：國立馬祖高級中學

作者：	指導老師：
高一 劉芷君	洪　儒
高一 黃琪鈞	胡裕仁
高一 林亞萱	

關鍵詞：數字卡、指對數、數學歸納法

摘要

本研究是探討一套遊戲，即找人在心裡默想一個數字之後，請對方將有出現心中數字的卡片抽出來，而且我們可以猜出對方所想的數字是什麼。

首先我們發現了在可以在抽出的卡片上，如何找到對方心中的數字的訣竅。然後再想出這些數字，是如何呈現在該出現的卡片上？最後由歸納法我們解答出如何將出現心中數字的卡抽出，並發現將這些抽出的數字卡的左上角最小數字加起來，就是對方心中的數字。再利用高中的數學知識，創造製作其他的數字卡片，這就可以製作出更多套的數學益智卡片來使用。

壹、研究動機(Introduction)

在學校的專題課的時候，老師帶領我們玩一個有趣的數學益智遊戲，那就是有五張卡片，上面寫著 16 個自然數（4×4 表格）。仔細一看是 31 以內的自然數，其非全按照著固定順序排列，而是有些有規則、有些不規則的跳著排列，這五張卡片如〈圖 1.1〉。

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

圖 1.1：五張4×4卡片

老師要我們在心裡默想一個 31 以內的數字，並在這五張卡片中，如果有出現心中所想的數字的卡片就馬上抽出來。因此我們馬上挑第一和第三和第五張表格，老師馬上回答『21』，結果這真的是我們心裡想到的數字『21』，真神奇。試了幾個數字，老師依舊很快正確說出這些正確數字。到底是老師會速讀，還是老師神奇地將這些卡片的數字背起來了呢？

之後老師又拿出一套類似的數字卡，是六張卡片，上面寫著 9 個自然數（3×3表格），是 26 以內的數字，也是一樣沒有依順序、不規則的排列，這六張卡片如〈圖 1.2〉。

1	4	7
10	13	16
19	22	25

2	5	8
11	14	17
20	23	26

3	4	5
12	13	14
21	22	23

6	7	8
15	16	17
24	25	26

9	10	11
12	13	14
15	16	17

18	19	20
21	22	23
24	25	26

圖 1.2：六張3×3卡片

同時老師又要我們在心裡默想一個數字，從 1 到 26 裡的一個數字，在這六張卡片中，有出現心中數字的卡片抽出來。結果很快地，老師就說出我心中的數字，真神奇。排除老師背下這兩套數字卡的因素之外，到底是什麼原因讓老師變得如此厲害？這也讓我們有著想要了解原因進而探究原理的動機。

貳、研究目的(Expected Results)

為了想分析解出這套益智卡片遊戲其原理進而探求其背後的數學關係，且希望能創造出其他相關的數學益智遊戲。首先本研究先釐清這次數學卡片的所要呈現的意義，之後我們決定分四個主題來一一探討，並且驗證我們的想法是否可以用數學分析的方式予以具體的證明。

一、到底這些卡片有什麼祕密在裡面，為什麼老師可以這麼快知道心中的數字？

二、這兩套數字卡片，有什麼相關聯的地方？

三、數字卡片設計的原理是什麼？

四、如何設計其他版本的數字卡片？

研究程序

一、找有興趣的同學共同進行遊戲並分析思考其中的秘訣。

二、以專題老師所教的數學分析工具進行逐步分析。

參、 研究過程(Materials and Methods)

首先我們先進行問題分析，並利用鴿籠原理：將 K 個東西（數字）分成 n 類（卡片組），若 $K \geq nr-n+1$，則有一類東西之數目大於等於 r。這個看起來很簡單的原理俗稱鴿籠原理，也稱抽屜原理，是十九世紀德國數學家 Dirichlet 提出來，以解決數論上的一些問題，所以也有人將它稱為 Dirichlet（抽屜）原理。這個貌不驚人的原理，卻有廣泛而出人意表的許多應用，有很多很深的定理都可以用它來證明。而針對我們研究的目的，我們進一步嘗試以『鴿籠原理』、『數學歸納法』、『排列組合法』去分析解決我們所預先設定的四個研究目的，因此我們分析如下：

一、思考到底這些卡片有什麼祕密在裡面，為什麼可以這麼快知道心中的數字？

二、老師所給的兩套數字卡片，到底有什麼相關聯的地方？

三、為什麼老師知道我們的想法?（即：數字卡片設計的原理是什麼？）

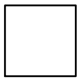
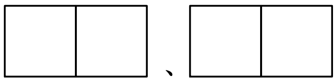
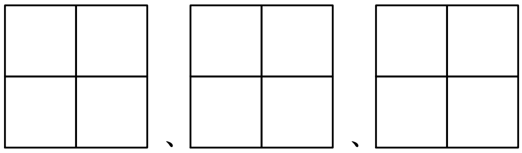
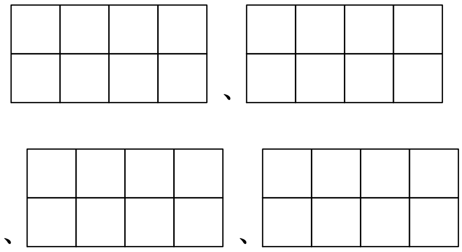
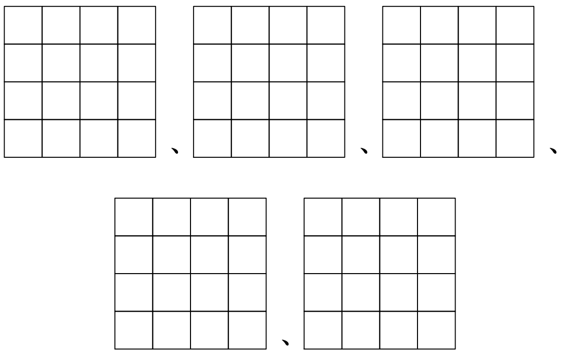
四、如何設計其他版本的數字卡片？

根據上述的四點分析，我開始想辦法去突破每個主題所面臨的瓶頸或癥結點，並透過與同學之間的遊戲中，嘗試有無更好更快的方式來解問題，進而設計出四個主題做一個整合性的研究產出，本研究針對以下的每一個主題，詳細記錄並予以展現：

一、【主題一】：到底這些卡片有什麼祕密在裡面，為什麼可以這麼快知道心中的數字？

因此我們分析得出下列各種情形：

表 3.1：數字 1-5 的卡片組

數字 1：用 1 張只有 1×1=1 格的卡片。	
數字 2：用 2 張只有 1×2=2 格的卡片。	
數字 3：用 3 張只有 2×2=4 格的卡片。	
數字 4：用 4 張只有 2×4=8 格的卡片。	
數字 5：用 5 張只有 4×4=16 格的卡片。	

於是我們將數字卡展示出來並向老師報告，我們發現字卡好像都可以寫成如此。如果我

們把由數字 5 往數字 1 回推來看，整體過程就像是一張折紙，不停地對折，但此次的想法好像無法對應到圖 1.2 的現象。

於是我們又開始反思是否有那些地方我們沒想到，並且思考更多的問題，例如下表 3.2。

表 3.2：數字 1-5 的卡片組

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

數字『1』：第一套用到一張卡片

1	4	7
10	13	16
19	22	25

數字『1』：第二套用到一張卡片

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

數字『2』：第一套用到一張卡片

2	5	8
11	14	17
20	23	26

數字『2』：第二套用到一張卡片

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

數字『3』：第一套用到二張卡片

3	4	5
12	13	14
21	23	26

數字『3』：第二套用到一張卡片

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

數字『4』：第一套用到一張卡片

1	4	7
10	13	16
19	22	25

3	4	5
12	13	14
21	23	26

數字『4』：第二套用到二張卡片

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

數字『5』：第一套用到二張卡片

2	5	8
11	14	17
20	23	26

3	4	5
12	13	14
21	23	26

數字『5』：第二套用到二張卡片

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

數字『6』：第一套用到二張卡片

6	7	8
15	16	17
24	25	26

數字『6』：第二套用到一張卡片

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

數字『7』：第一套用到三張卡片

1	4	7
10	13	16
19	22	25

6	7	8
15	16	17
24	25	26

數字『7』：第二套用到二張卡片

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

數字『8』：第一套用到一張卡片

2	5	8
11	14	17
20	23	26

6	7	8
15	16	17
24	25	26

數字『8』：第二套用到二張卡片

看到數字『8』，我們好像看出了小小的結論：那就是所有抽出的卡片的左上角最小的數字總和，就是心中的數字。

分析說明：

例如：①數字『5』：第一套卡片二張，左上角的數字分別是 1 和 4，而1+4＝5。第二套卡片二張，左上角的數字分別是 2 和 3，而 2+3＝5。

②數字『7』：第一套卡片三張，左上角的數字分別是 1、2 和 4，而1+2+4＝7。第二套卡片二張，左上角的數字分別是 1 和 6，而1+6＝7。

③數字『8』：第一套卡片一張，左上角的數字是 8。第二套卡片二張，左上角的數字分別是 2 和 6，而 2+6＝8。

有了這個重大發現後，我們實驗一些數字較大的來檢驗。例如：心中的數字『15』。第一套卡片四張，左上角的數字分別是 1，2，4 和 8，而 1+2+4+8＝15。第二套卡片二張，左上角的數字分別是 6 和 9，而 6+9＝15。

1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7	8	9	10	11
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15	12	13	14	15
17	19	21	23	18	19	22	23	20	21	22	23	24	25	26	27
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31	28	29	30	31

6	7	8	9	10	11
15	16	17	12	13	14
24	25	26	15	16	17

因此推測我們的猜想應該是正確的。所以在【主題一】的試驗當中，我們的結論是：

所有抽出的卡片的左上角最小的數字總和，就是心中的數字。

二、【主題二】：這兩套數字卡片，有什麼相關聯的地方？

我們試著將這兩套數學卡片，好好陳列在桌上，並且仔細觀察分析而列出下列 5 項問題，且試著將此五項問題解決：

(一)1. 這些數字都是小於等於多少以內的數字？＿＿＿＿＿＿

2. 如何用數學運算式來表示？＿＿＿＿＿＿。

(二)這些數字可以作成 ＿＿＿ 張卡片。有無規則可循：＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(三)每張卡片都剛好有 ＿＿＿ 個數字。有無規則可循：＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(四)每張卡片左上角的首數(最小數字)彼此之間是否有關係？其規則：＿＿＿＿＿＿＿＿。

(五)這些數字是依 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 規則分類至各卡片內。

以第一套數學卡片分析：

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

(一)1. 這些數字都是小於等於多少以內的數字？ **31**

2. 如何用數學運算式來表示？ $31 = 32 - 1 = 2^5 - 1$

(二)這些數字可以作成 **5** 張卡片。有無規則可循：$5 = 5 \times 1 = 5 \times (2-1)$。

(三)每張卡片都剛好有 **16** 個數字。有無規則可循：$16 = 2^4 = 2^{(5-1)}$。

(四)每張卡片左上角的首數(最小數字)彼此之間是否有關係？其規則:________________。

左上角的數字分別是：1、2、4、8、16。這 5 個數字除以 2 得出的餘數分別為 0 或 1。將這些左上角數字若以『**二進制**』加以整理得出如下結果：

1 2 4 8 16 x2 x2 x2 x2	$1=2^0=(00001)_2$ $2=2^1=(00010)_2$ $4=2^2=(00100)_2$	$8=2^3=(01000)_2$ $16=2^4=(10000)_2$

n 進制的定義與特性：

(1). 可存放 $0\sim(n-1)$ 共 n 個值。

(2). n 稱為基底(Base)

(3). 每個位置滿 n 就進位。

(4). 每個數字符號依其所在位置的不同，而有不一樣的位值。

(5). 表示法：在原數字的左右加上括號，括號右下角標示其基底。若以 10 為底，則可省略。

(五)這些數字是依 ________________ 規則分類至各卡片內。

以『**二進制**』表示所有數值發現，依序每次固定一個『位數』的『1』(而該固定位數的值採用其進制法內所包含值中『非 0』的數值)。

第一張卡片：右邊數起『**第一位**』是『1』的數字。例如：$3=(00011)_2$、$5=(00101)_2$、$7=(00111)_2$、$9=(01001)_2$、$13=(01101)_2$、$27=(11011)_2$、$31=(11111)_2$。

第二張卡片：右邊數起『**第二位**』是『1』的數字。例如：$3=(00011)_2$、$6=(00110)_2$、$7=(00111)_2$、$10=(01010)_2$、$15=(01111)_2$、$27=(11011)_2$、$31=(11111)_2$。

第三張卡片：右邊數起『**第三位**』是 1 的數字。例如：$5=(00101)_2$、$7=(00111)_2$、$13=(01101)_2$、$20=(10100)_2$、$23=(10111)_2$、$28=(11100)_2$、$29=(11101)_2$、$31=(11111)_2$。

第四張卡片：右邊數起『**第四位**』是 1 的數字。例如：$10=(01010)_2$、$13=(01101)_2$、$15=(01111)_2$、$24=(11000)_2$、$28=(11100)_2$、$30=(11110)_2$、$31=(11111)_2$。

第五張卡片：右邊數起『**第五位**』是『1』的數字。例如：$17=(10001)_2$、$19=(10011)_2$、$22=(10110)_2$、$24=(11000)_2$、$25=(110001)_2$、$27=(11011)_2$、$31=(11111)_2$。

以第二套數學卡片分析：

1	4	7
10	13	16
19	22	25

2	5	8
11	14	17
20	23	26

3	4	5
12	13	14
21	22	23

6	7	8
15	16	17
24	25	26

9	10	11
12	13	14
15	16	17

18	19	20
21	22	23
24	25	26

(一)1. 這些數字都是小於等於多少以內的數字？ 26

2. 如何用數學運算式來表示？ $26 = 27 - 1 = 3^3 - 1$

(二)這些數字可以作成 6 張卡片。有無規則可循：$6 = 3 \times 2 = 3 \times (3-1)$。

(三)每張卡片都剛好有 9 個數字。有無規則可循：$9 = 3^2 = 3^{(3-1)}$。

(四)每張卡片左上角的數字(最小數字)彼此之間是否有關係？其規則：________________。

左上角的數字分別是：1、2、3、6、9、18。這 6 個數字除以 3 得出的餘數分別為 0 或 1 或 2。將這些左上角數字若以『**三進制**』加以整理得出如下結果：

<table>
<tr>
<td rowspan="3"><table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>9</td><td>18</td></tr></table>X3
X3</td>
<td>$1=1\times3^0=(001)_3$</td>
<td>$2=2\times3^0=(002)_3$</td>
</tr>
<tr>
<td>$3=1\times3^1=(010)_3$</td>
<td>$6=2\times3^1=(020)_3$</td>
</tr>
<tr>
<td>$9=1\times3^2=(100)_3$</td>
<td>$18=2\times3^2=(200)_3$</td>
</tr>
</table>

(五)這些數字是依 ________________ 規則分類至各卡片內。

以『**三進制**』表示所有數值發現，依序每次固定一個『位數』的『**1、2**』(而該固定位數的值採用其進制法內所包含值中『非 0』的數值)。

第一張卡片：右邊數起『**第一位**』是『1』的數字。例如：$4=(011)_3$、$7=(021)_3$、$10=(101)_3$、$13=(111)_3$、$16=(121)_3$、$19=(201)_3$、$22=(211)_3$、$25=(221)_3$。

第二張卡片：右邊數起『**第一位**』是『2』的數字。例如：$5=(012)_3$、$8=(022)_3$、$11=(102)_3$、$14=(112)_3$、$17=(122)_3$、$20=(202)_3$、$23=(212)_3$、$26=(222)_3$。

第三張卡片：右邊數起『**第二位**』是『1』的數字。例如：$3=(010)_3$、$4=(011)_3$、$5=(012)_3$、$12=(110)_3$、$13=(111)_3$、$14=(112)_3$、$21=(210)_3$、$22=(211)_3$、$23=(212)_3$。

第四張卡片：右邊數起『**第二位**』是『2』的數字。例如：$6=(020)_3$、$7=(021)_3$、$8=(022)_3$、$15=(120)_3$、$16=(121)_3$、$17=(122)_3$、$24=(220)_3$、$25=(221)_3$、$26=(222)_3$。

第五張卡片：右邊數起『**第三位**』是『1』的數字。例如：$9=(100)_3$、$10=(101)_3$、$11=(102)_3$、$12=(110)_3$、$13=(111)_3$、$14=(112)_3$、$15=(120)_3$、$16=(121)_3$、$17=(122)_3$。

第六張卡片：右邊數起『**第三位**』是『2』的數字。例如：$18=(200)_3$、$19=(201)_3$、$20=(202)_3$、$21=(210)_3$、$22=(211)_3$、$23=(212)_3$、$24=(220)_3$、$25=(221)_3$、$26=(222)_3$。

三、【主題三】：數字卡片設計的原理分析及相關定理初探

> 定理一：所有符合條件的卡片組內的最大數字 X，皆可以數學公式 $X=a^M-1$ 來表示，且 a、$M\in N$，$a\neq1$。

說明：

由『數學歸納法』推導，並結合『組合數 C_m^n』：自 n 件不同的事物中，取出 m 件為一組，不排定次序而計算其方法數。綜合第一套和第二套的數學卡片，我們可推知所有符合條件的卡片組皆可以數學公式最大數字 $X = a^M - 1$ 來表示，a、M 皆為任意自然數，但『$a \neq 1$』。若 $a = 1$，以『一進制』表示其值則只有『0』這個數字。且不論 M 為任意自然數，其最大值 $X = 1^M - 1$ 皆為『0』，與數字卡的最小數值為『1』不合。

證明：

(一)設 a=2（以二進制表示其數值）

當 M =1 （以 1 位數表示其值）	$\boxed{a_1}$ ↑ 0、1	其可以表示的值有 $C_1^2 = 2$ 種（0 或 1）。 $\therefore X = 2^1 - 1 = 1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）
當 M =2 （以 2 位數表示其值）	$\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ ↑ ↑ 0、1 0、1	其可以表示的值有 $C_1^2C_1^2 = 2\times2 = 2^2$=4 種 （0=$(00)_2$、1=$(01)_2$、2=$(10)_2$、3=$(11)_2$）。 $\therefore X = 2^2 - 1 = 3$（扣掉 0 佔 1 種表示法）
當 M =3 （以 3 位數表示其值）	$\boxed{a_3}$ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ ↑ ↑ ↑ 0、1 0、1 0、1	其可以表示的值有 $C_1^2C_1^2C_1^2 = 2\times2\times2 = 2^3$=8 種 （0=$(000)_2$、1=$(001)_2$、2=$(010)_2$、3=$(011)_2$、4=$(100)_2$、5=$(101)_2$、6=$(110)_2$、7=$(111)_2$）。 $\therefore X = 2^3 - 1 = 7$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

當 $M = k$ （以 k 位數表示其值）	$\boxed{a_k}$ $\boxed{a_{k-1}}$ ⋯ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ ↑ ↑ ↑ ↑ 0、1 0、1 0、1 0、1	其可以表示的值有 $\underbrace{C_1^2C_1^2\cdots C_1^2}_{k個} = \underbrace{2\times2\cdots\times2}_{k個} = 2^k$ 種 $\therefore X = 2^k - 1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

當 $M = k+1$ （以 $k+1$ 位數表示其值）	$\boxed{a_{k+1}}$ $\boxed{a_k}$ ⋯ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ ↑ ↑ ↑ ↑ 0、1 0、1 0、1 0、1	其可以表示的值有 $\underbrace{C_1^2C_1^2\cdots C_1^2}_{k+1個} = \underbrace{2\times2\cdots\times2}_{k+1個} = 2^{k+1}$ 種 $\therefore X = 2^{k+1} - 1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

(二)設 a=3（以三進制表示其數值）

當 M =1 （以 1 位數表示其值）	$\boxed{a_1}$ ↑ 0、1、2	其可以表示的值有 $C_1^3 = 3$ 種（0 或 1 或 2）。 $\therefore X = 3^1 - 1 = 2$（扣掉 0 佔 1 種表示法）
當 M =2 （以 2 位數表示其值）	$\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ ↑ ↑ 0、1、2 0、1、2	其可以表示的值有 $C_1^3C_1^3 = 3\times3 = 3^2$=9 種 （0=$(00)_3$、1=$(01)_3$、2=$(02)_3$、3=$(10)_3$、4=$(11)_3$、5=$(12)_3$、6=$(20)_3$、7=$(21)_3$、8=$(22)_3$）。 $\therefore X = 3^2 - 1 = 8$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

當 $M=3$ （以 3 位數表示其值）	$\boxed{a_3}$ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ 0、1、2 0、1、2 0、1、2	其可以表示的值有 $C_1^3C_1^3C_1^3=3\times3\times3=3^3$=27 種（0=$(000)_3$、1=$(001)_3$、2=$(002)_3$、3=$(010)_3$、⋯、23=$(212)_3$、24=$(220)_3$、25=$(221)_3$、26=$(222)_3$）。 $\therefore X=3^3-1=26$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

當 $M=k$ （以 k 位數表示其值）	$\boxed{a_k}$ $\boxed{a_{k-1}}$ ⋯ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ 0、1、2 0、1、2 0、1、2 0、1、2	其可以表示的值有 $\underbrace{C_1^3C_1^3\cdots C_1^3}_{k個}=\underbrace{3\times3\cdots\times3}_{k個}=3^k$ 種 $\therefore X=3^k-1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

當 $M=k+1$ （以 $k+1$ 位數表示其值）	$\boxed{a_{k+1}}$ $\boxed{a_k}$ ⋯ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ 0、1、2 0、1、2 0、1、2 0、1、2	其可以表示的值有 $\underbrace{C_1^3C_1^3\cdots C_1^3}_{k+1個}=\underbrace{3\times3\cdots\times3}_{k+1個}=3^{k+1}$ 種 $\therefore X=3^{k+1}-1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

（三）設 $a=n$（以 n 進制表示其數值）

當 $M=1$ （以 1 位數表示其值）	$\boxed{a_1}$ 0、1、…、n-1	其可以表示的值有 $C_1^n=n$ 種（0、1、2⋯$n-1$）。 $\therefore X=n^1-1=n-1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）
當 $M=2$ （以 2 位數表示其值）	$\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ 0、1、…、n-1 0、1、…、n-1	其可以表示的值有 $C_1^nC_1^n=n\times n=n^2$ 種 $\therefore X=n^2-1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

當 $M=k$ （以 k 位數表示其值）	$\boxed{a_k}$ $\boxed{a_{k-1}}$ ⋯ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ 0、1、…、n-1 0、1、…、n-1 0、1、…、n-1 0、1、…、n-1	其可以表示的值有 $\underbrace{C_1^nC_1^n\cdots C_1^n}_{k個}=\underbrace{n\times n\cdots\times n}_{k個}=n^k$ 種 $\therefore X=n^k-1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

當 $M=k+1$ （以 $k+1$ 位數表示其值）	$\boxed{a_{k+1}}$ $\boxed{a_k}$ ⋯ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ 0、1、…、n-1 0、1、…、n-1 0、1、…、n-1 0、1、…、n-1	其可以表示的值有 $\underbrace{C_1^nC_1^n\cdots C_1^n}_{k+1個}=\underbrace{n\times n\cdots\times n}_{k+1個}=n^kn=n^{k+1}$ $\therefore X=(n)^{k+1}-1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

（四）設 $a=n+1$（以 $n+1$ 進制表示其數值）

當 $M=1$ （以 1 位數表示其值）	$\boxed{a_1}$ 0、1、…、n	其可以表示的值有 $C_1^{n+1}=n+1$ 種（0、1、2⋯n）。 $\therefore X=(n+1)^1-1=n$（扣掉 0 佔 1 種表示法）
當 $M=2$ （以 2 位數表示其值）	$\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ 0、1、…、n 0、1、…、n	其可以表示的值有 $C_1^{n+1}C_1^{n+1}=(n+1)\times(n+1)=(n+1)^2$ 種 $\therefore X=(n+1)^2-1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

當 $M=k$ （以 k 位數表示	$\boxed{a_k}$ $\boxed{a_{k-1}}$ ⋯ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ 0、1、…、n 0、1、…、n 0、1、…、n 0、1、…、n	其可以表示的值有 $\underbrace{C_1^{n+1}C_1^{n+1}\cdots C_1^{n+1}}_{k個}=\underbrace{(n+1)\times(n+1)\cdots\times(n+1)}_{k個}$

其值）		$=(n+1)^K$ $\therefore X=(n+1)^k-1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

當 $M=k+1$ （以 $k+1$ 位數表示其值）	$\boxed{a_{k+1}}$ $\boxed{a_k}$ $\cdots$ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_1}$ 0、1、…、n　0、1、…、n　0、1、…、n　0、1、…、n	其可以表示的值有 $\underbrace{C_1^{n+1}C_1^{n+1}\cdots C_1^{n+1}}_{k+1個}=\underbrace{(n+1)\times(n+1)\cdots\times(n+1)}_{k+1個}$ $=(n+1)^k(n+1)=(n+1)^{k+1}$ $\therefore X=(n+1)^{k+1}-1$（扣掉 0 佔 1 種表示法）

故根據以上數學歸納法 $\forall$ a 、$M\in N$ ，$a\neq 1$，原敘述 $X=a^M-1$ 恆成立

定理二：所有符合 $X=a^M-1$ 條件的卡片組，可以作成 $M(a-1)$ 張卡片。

說明：

$X=a^M-1$ 為以 a 進制、M 位數表示其數值。綜合第一套和第二套的數學卡片，我們可推知卡片分類原則為依序每次固定一個『位數』的值，而該固定位數的值採用其進制法內所包含值中『非 0』的數值。例如：二進制可被固定值為 1；三進制可被固定值為 1、2；四進制可被固定值為 1、2、3。以此類推。

證明：

(一)設 a=2（以二進制表示其數值，其可被固定值為 1）

當 M=1 （以 1 位數表示其值）	$\begin{array}{c} a_1 \\ \begin{array}{\|c\|}\hline 1 \\ \hline\end{array}\end{array}$	張數=$C_1^1C_1^1$=1×1=1 。
M=2 （以 2 位數表示其值）	$\begin{array}{cc} a_2 & a_1 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{1} & \multicolumn{1}{c\|}{\ } \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{cc} a_2 & a_1 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{1} \\ \hline\end{array}$	張數=$C_1^2C_1^1$=2×1=2 。
M=3 （以 3 位數表示其值）	$\begin{array}{ccc} a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{1} & \multicolumn{1}{c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{\ } \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{ccc} a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{1} & \multicolumn{1}{c\|}{\ } \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{ccc} a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{1} \\ \hline\end{array}$	張數=$C_1^3C_1^1$=3×1=3 。

當 $M=k$ （以 k 位數表示其值）	$\begin{array}{ccccc} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{1} & \multicolumn{1}{c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{\ } \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{ccccc} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline \multicolumn{1}{\|c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{1} & \multicolumn{1}{c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{\ } & \multicolumn{1}{c\|}{\ } \\ \hline\end{array}$	張數=$C_1^kC_1^1$=k×1=k 。

	$\cdots$ $\begin{array}{ccccc} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline & & & 1 & \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array}$	

當 $M=k+1$ （以$k+1$位數表示其值）	$\begin{array}{ccccc} a_{k+1} & a_k & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} a_{k+1} & a_k & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline & 1 & & & \\ \hline \end{array}$ $\cdots$ $\begin{array}{ccccc} a_{k+1} & a_k & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline & & & 1 & \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} a_{k+1} & a_k & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array}$	張數=$C_1^{k+1}C_1^1=(k+1)\times 1=k+1$。

（二)設$a=3$（以三進制表示其數值，其可被固定值為1、2）

當 $M=1$ （以 1 位數表示其值）	$\begin{array}{c} a_1 \\ \hline 1、2 \\ \hline \end{array}$	張數=$C_1^1C_1^2=1\times 2=2$。
$M=2$ （以 2 位數表示其值）	$\begin{array}{cc} a_2 & a_1 \\ \hline 1、2 & \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{cc} a_2 & a_1 \\ \hline & 1、2 \\ \hline \end{array}$	張數=$C_1^2C_1^2=2\times 2=4$。
$M=3$ （以 3 位數表示其值）	$\begin{array}{ccc} a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline 1、2 & & \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ccc} a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline & 1、2 & \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ccc} a_3 & a_2 & a_1 \\ \hline & & 1、2 \\ \hline \end{array}$	張數=$C_1^3C_1^2=3\times 2=6$。

當 $M=k$ （以k位數表示其值）	$\begin{array}{ccccc} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline 1、2 & & & & \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline & 1、2 & & & \\ \hline \end{array}$ $\cdots$ $\begin{array}{ccccc} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline & & & 1、2 & \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \hline & & & & 1、2 \\ \hline \end{array}$	張數=$C_1^kC_1^2=k\times 2=2k$。

<table>
<tr>
<td>當 $M=k+1$
（以$k+1$位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>1、2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td>1、2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\cdots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1、2</td><td></td></tr>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1、2</td></tr>
</table>
</td>
<td>張數=$C_1^{k+1}C_1^2=(k+1)\times 2=2(k+1)$。</td>
</tr>
</table>

（三）設$a=n$（以n進制表示其數值，其可被固定值為1、2、⋯、$n-1$）

<table>
<tr>
<td>當 $M=1$
（以 1 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td>a_1</td></tr>
<tr><td>1、2、⋯、$n-1$</td></tr>
</table>
</td>
<td>張數=$C_1^1C_1^{n-1}=1\times(n-1)=(n-1)$。</td>
</tr>
<tr>
<td>$M=2$
（以 2 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>1、2、⋯、$n-1$</td><td></td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td>1、2、⋯、$n-1$</td></tr>
</table>
</td>
<td>張數=$C_1^2C_1^{n-1}=2\times(n-1)=2(n-1)$。</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>當 $M=k$
（以k位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td>a_k</td><td>a_{k-1}</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>1、2、⋯、$n-1$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_k</td><td>a_{k-1}</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td>1、2、⋯、$n-1$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\cdots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_k</td><td>a_{k-1}</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1、2、⋯、$n-1$</td><td></td></tr>
<tr><td>a_k</td><td>a_{k-1}</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1、2、⋯、$n-1$</td></tr>
</table>
</td>
<td>張數=$C_1^kC_1^{n-1}$
$=k\times(n-1)=k(n-1)$。</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>當 $M=k+1$
（以$k+1$位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>1、2、⋯、$n-1$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td>1、2、⋯、$n-1$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\cdots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1、2、⋯、$n-1$</td><td></td></tr>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1、2、⋯、$n-1$</td></tr>
</table>
</td>
<td>張數=$C_1^{k+1}C_1^{n-1}$
$=(k+1)(n-1)$。</td>
</tr>
</table>

（四)設$a=n+1$（以$n+1$進制表示其數值，其可被固定值為 1、2、…、n）

<table>
<tr><td>當$M=1$
（以 1 位數表示其值）</td><td><table><tr><td>a_1</td></tr><tr><td>1、2、…、n</td></tr></table></td><td>張數=$C_1^1C_1^n=1\times n=n$。</td></tr>
<tr><td>$M=2$
（以 2 位數表示其值）</td><td><table><tr><td>a_2</td><td>a_1</td></tr><tr><td>1、2、…、n</td><td></td></tr><tr><td>a_2</td><td>a_1</td></tr><tr><td></td><td>1、2、…、n</td></tr></table></td><td>張數=$C_1^2C_1^n=2\times n=2n$。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>當$M=k$
（以k位數表示其值）</td><td><table>
<tr><td>a_k</td><td>a_{k-1}</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>1、2、…、n</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_k</td><td>a_{k-1}</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td>1、2、…、n</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\cdots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_k</td><td>a_{k-1}</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1、2、…、n</td><td></td></tr>
<tr><td>a_k</td><td>a_{k-1}</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1、2、…、n</td></tr>
</table></td><td>張數=$C_1^kC_1^n=k\times n=kn$。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>當$M=k+1$
（以$k+1$位數表示其值）</td><td><table>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td>1、2、…、n</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td>1、2、…、n</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\cdots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1、2、…、n</td><td></td></tr>
<tr><td>a_{k+1}</td><td>a_k</td><td>$\cdots$</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1、2、…、n</td></tr>
</table></td><td>張數=$C_1^{k+1}C_1^n=(k+1)n$。</td></tr>
</table>

故根據以上數學歸納法$\forall$ a 、 $M\in N$ ，原敘述張數$M(a-1)$恆成立

定理三：所有符合$X=a^M-1$條件的卡片組，每張卡片都剛好有$a^{(M-1)}$個數字。

說明：

綜合第一套和第二套的數學卡片，我們可推知卡片分類原則為依序每次固定一個『位數』的值，故同一張卡片為同一類，其內的數字必有一個位數值固定，只剩$(M-1)$個位數其值可供變化組合產生數字。

證明：

(一)設 a=2（以二進制表示其數值，其值可為 0、1）

當 M=1 （以 1 位數表示其值）	a_1 1	固定 1 個位數，0 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數=$C_0^2=1=2^0=2^{(1-1)}$。
M=2 （以 2 位數表示其值）	a_2 a_1 1 □ 0、1	固定 1 個位數，1 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數=$C_1^2=2=2^1=2^{(2-1)}$。
M=3 （以 3 位數表示其值）	a_3 a_2 a_1 1 □ □ 0、1 0、1	固定 1 個位數，2 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數 $C_1^2C_1^2=2\times2=4=2^2=2^{(3-1)}$。

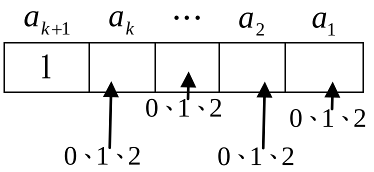
當 $M=k$ （以 k 位數表示其值）	a_k a_{k-1} $\cdots$ a_2 a_1 1 □ □ □ □ 0、1 0、1 0、1 0、1	固定 1 個位數，$k-1$ 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數 $=\underbrace{C_1^2C_1^2\cdots C_1^2}_{k-1個}=\underbrace{2\times2\cdots\times2}_{k-1個}=2^{(k-1)}$。

當 $M=k+1$ （以 $k+1$ 位數表示其值）	a_{k+1} a_k $\cdots$ a_2 a_1 1 □ □ □ □ 0、1 0、1 0、1 0、1	固定 1 個位數，k 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數 $\underbrace{C_1^2C_1^2\cdots C_1^2}_{k個}=\underbrace{2\times2\cdots\times2}_{k個}$ $=2^k=2^{(k-1)}\times2=2^{(k-1+1)}=2^{(k+1-1)}$。

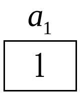
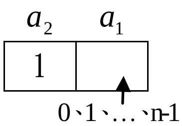
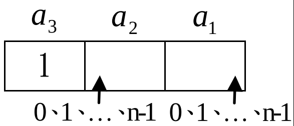
(二)設 a=3（以三進制表示其數值，其值可為 0、1、2）

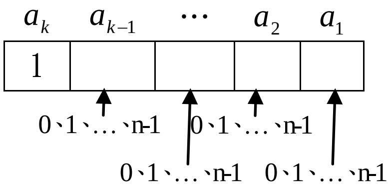
當 M=1 （以 1 位數表示其值）	a_1 1	固定 1 個位數，0 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數=$C_0^3=1=3^0=3^{(1-1)}$。
M=2 （以 2 位數表示其值）	a_2 a_1 1 □ 0、1、2	固定 1 個位數，1 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數=$C_1^3=3=3^1=3^{(2-1)}$。
M=3 （以 3 位數表示其值）	a_3 a_2 a_1 1 □ □ 0、1、2 0、1、2	固定 1 個位數，2 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數 $=C_1^3C_1^3=3\times3=9=3^2=3^{(3-1)}$。

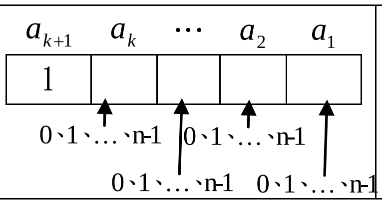
當 $M=k$ （以 k 位數表示其值）	a_k a_{k-1} $\cdots$ a_2 a_1 1 □ □ □ □ 0、1、2 0、1、2 0、1、2 0、1、2	固定 1 個位數，$k-1$ 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數 $=\underbrace{C_1^3C_1^3\cdots C_1^3}_{k-1個}=\underbrace{3\times3\cdots\times3}_{k-1個}=3^{(k-1)}$。

當 $M=k+1$ （以 $k+1$ 位數表示其值）		固定 1 個位數，k 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數=$\underbrace{C_1^3 C_1^3 \cdots C_1^3}_{k個} = \underbrace{3\times 3\cdots\times 3}_{k個}$ $=3^k = 3^{(k-1)}\times 3 = 3^{(k-1+1)} = 3^{(k+1-1)}$ 。

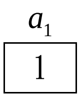
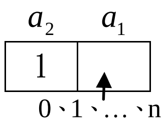
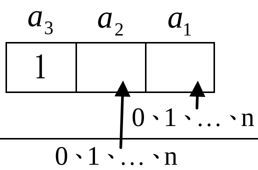
（三）設 $a=n$（以 n 進制表示其數值，其值可為 0、1、⋯、$n-1$）

當 $M=1$ （以 1 位數表示其值）		固定 1 個位數，0 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數=$C_0^n = 1 = n^0 = n^{(1-1)}$ 。
$M=2$ （以 2 位數表示其值）		固定 1 個位數，1 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數=$C_1^n = n = n^1 = n^{(2-1)}$ 。
$M=3$ （以 3 位數表示其值）		固定 1 個位數，2 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數 $=C_1^n C_1^n = n\times n = n^2 = n^{(3-1)}$ 。

當 $M=k$ （以 k 位數表示其值）		固定 1 個位數，$k-1$ 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數 $=\underbrace{C_1^n C_1^n \cdots C_1^n}_{k-1個} = \underbrace{n\times n\cdots\times n}_{k-1個} = n^{(k-1)}$ 。

當 $M=k+1$ （以 $k+1$ 位數表示其值）		固定 1 個位數，k 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數=$\underbrace{C_1^n C_1^n \cdots C_1^n}_{k個} = \underbrace{n\times n\cdots\times n}_{k個}$ $=n^k = n^{(k-1)}\times n = n^{(k-1+1)} = n^{(k+1-1)}$ 。

（四）設 $a=n+1$（以 $n+1$ 進制表示其數值，其值可為 0、1、⋯、n）

當 $M=1$ （以 1 位數表示其值）		固定 1 個位數，0 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數=$C_0^{n+1} = 1 = (n+1)^0 = (n+1)^{(1-1)}$ 。
$M=2$ （以 2 位數表示其值）		固定 1 個位數，1 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數 $=C_1^{n+1} = (n+1) = (n+1)^1 = (n+1)^{(2-1)}$ 。
$M=3$ （以 3 位數表示其值）		固定 1 個位數，2 個位數可供其值變化組合。 單張卡片數字個數 $=C_1^{n+1} C_1^{n+1} = (n+1)\times(n+1) = (n+1)^2 = (n+1)^{(3-1)}$ 。

<table>
<tr>
<td>當 $M=k$
（以 k 位數表示其值）</td>
<td>a_k a_{k-1} $\cdots$ a_2 a_1
| 1 | | | | |
0、1、…、n 0、1、…、n
0、1、…、n 0、1、…、n</td>
<td>固定 1 個位數，$k-1$個位數可供其值變化組合。
單張卡片數字個數
$=\underbrace{C_1^{n+1}C_1^{n+1}\cdots C_1^{n+1}}_{k-1個}=\underbrace{(n+1)\times(n+1)\cdots\times(n+1)}_{k-1個}$
$=(n+1)^{(k-1)}$ 。</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>當 $M=k+1$
（以$k+1$位數表示其值）</td>
<td>a_{k+1} a_k $\cdots$ a_2 a_1
| 1 | | | | |
0、1、…、n 0、1、…、n
0、1、…、n 0、1、…、n</td>
<td>固定 1 個位數，k 個位數可供其值變化組合。
單張卡片數字個數
$=\underbrace{C_1^{n+1}C_1^{n+1}\cdots C_1^{n+1}}_{k個}=\underbrace{(n+1)\times(n+1)\cdots\times(n+1)}_{k個}=(n+1)^k$
$=(n+1)^{(k-1)}\times(n+1)=(n+1)^{(k-1+1)}=(n+1)^{(k+1-1)}$ 。</td>
</tr>
</table>

故根據以上數學歸納法$\forall$ a 、 $M\in N$ ，原敘述每張卡片有 $a^{(M-1)}$ 個數字恆成立

> 定理四：所有符合 $X=a^M-1$條件的卡片組，每張卡片左上角的首數(最小數字)依序(由小至大）為 $F(t,s)=(s-1)a^{(t-1)}$ ，其中 t =1、2、$\cdots M$ ； s =2、3、$\cdots a$ 。

說明：

每張卡片左上角的首數為該卡片分類原則的最小值，而卡片分類原則為依序每次固定一個『位數』的值，而該固定位數的值採用其進制法內所包含值中『非 0』的數值。例如：二進制可被固定值為 1；三進制可被固定值為 1、2；四進制可被固定值為 1、2、3。以此類推。

證明：

(一)設 a =2（以二進制表示其數值，其可被固定值為 1）

<table>
<tr><td rowspan="2">當 M =1
（以 1 位數表示其值）</td><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td rowspan="2">$F(1,2)=(1)_2$=1=$(2-1)2^{(1-1)}=1\times 2^0$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">M =2
（以 2 位數表示其值）</td><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td rowspan="3">$F(1,2)=(01)_2$=1=$(2-1)2^{(1-1)}=1\times 2^0$
$F(2,2)=(10)_2$=2=$(2-1)2^{(2-1)}=1\times 2^1$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">M =3
（以 3 位數表示其值）</td><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td rowspan="4">$F(1,2)=(001)_2$=1=$(2-1)2^{(1-1)}=1\times 2^0$
$F(2,2)=(010)_2$=2=$(2-1)2^{(2-1)}=1\times 2^1$
$F(3,2)=(100)_2$=4=$(2-1)2^{(3-1)}=1\times 2^2$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=3}$</td><td>4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>當 $M=k$
（以 k 位數表</td><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td>$F(1,2)=(\underbrace{0\cdots0}_{k-1個0}1)_2$=1=$(2-1)2^{(1-1)}=1\times 2^0$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k-1}$</td><td>2^{k-2}</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k}$</td><td>2^{k-1}</td></tr>
</table>
</td>
<td>
$F(2,2)=(\underbrace{0\cdots0}_{k-2\text{個}0}10)_2=2=(2-1)2^{(2-1)}=1\times2^1$
$F(k-1,2)=(01\underbrace{0\cdots0}_{k-2\text{個}0})_2=2^{k-2}=(2-1)2^{(k-1-1)}=1\times2^{k-2}$
$F(k,2)=(1\underbrace{0\cdots0}_{k-1\text{個}0})_2=2^{k-1}=(2-1)2^{(k-1)}=1\times2^{k-1}$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>當 $M=k+1$
（以 $k+1$ 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k}$</td><td>2^{k-1}</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k+1}$</td><td>2^{k}</td></tr>
</table>
</td>
<td>
$F(1,2)=(\underbrace{0\cdots0}_{k\text{個}0}1)_2=1=(2-1)2^{(1-1)}=1\times2^0$
$F(2,2)=(\underbrace{0\cdots0}_{k-1\text{個}0}10)_2=2=(2-1)2^{(2-1)}=1\times2^1$
$F(k,2)=(1\underbrace{0\cdots0}_{k-1\text{個}0})_2=2^{k-1}=(2-1)2^{(k-1)}=1\times2^{k-1}$
$F(k+1,2)=(01\underbrace{0\cdots0}_{k-2\text{個}0})_2=2^{k}=2^{k-1}\times2=(2-1)2^{(k+1-1)}=1\times2^{k}$
</td>
</tr>
</table>

（二）設 $a=3$（以三進制表示其數值，其可被固定值為 1、2）

<table>
<tr>
<td>當 $M=1$
（以 1 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td>$\boxed{s=3}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>
</td>
<td>
$F(1,2)=(1)_3=1=(2-1)3^{(1-1)}=1\times3^0$
$F(1,3)=(2)_3=2=(3-1)3^{(1-1)}=2\times3^0$
</td>
</tr>
<tr>
<td>$M=2$
（以 2 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td>$\boxed{s=3}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>3</td><td>6</td></tr>
</table>
</td>
<td>
$F(1,2)=(01)_3=1=(2-1)3^{(1-1)}=1\times3^0$
$F(1,3)=(02)_3=2=(3-1)3^{(1-1)}=2\times3^0$
$F(2,2)=(10)_3=3=(2-1)3^{(2-1)}=1\times3^1$
$F(2,3)=(20)_3=6=(3-1)3^{(1-1)}=2\times3^1$
</td>
</tr>
<tr>
<td>$M=3$
（以 3 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td>$\boxed{s=3}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=3}$</td><td>9</td><td>18</td></tr>
</table>
</td>
<td>
$F(1,2)=(001)_3=1=(2-1)3^{(1-1)}=1\times3^0$
$F(1,3)=(002)_3=2=(3-1)3^{(1-1)}=2\times3^0$
$F(2,2)=(010)_3=3=(2-1)3^{(2-1)}=1\times3^1$
$F(2,3)=(020)_3=6=(3-1)3^{(2-1)}=2\times3^1$
$F(3,2)=(100)_3=9=(2-1)3^{(3-1)}=1\times3^2$
$F(3,3)=(200)_3=18=(3-1)3^{(3-1)}=2\times3^2$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>當 $M=k$
（以 k 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td>$\boxed{s=3}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k-1}$</td><td>$1\times3^{k-2}$</td><td>$2\times3^{k-2}$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
$F(1,2)=(\underbrace{0\cdots0}_{k-1\text{個}0}1)_3=1=(2-1)3^{(1-1)}=1\times3^0$
$F(1,3)=(\underbrace{0\cdots0}_{k-1\text{個}0}2)_3=2=(3-1)3^{(1-1)}=2\times3^0$
$F(k,2)=(1\underbrace{0\cdots0}_{k-1\text{個}0})_3=1\times3^{k-1}=(2-1)3^{(k-1)}$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k}$</td><td>$1\times3^{k-1}$</td><td>$2\times3^{k-1}$</td></tr>
</table>
</td>
<td>$=1\times3^{k-1}$
$F(k,3)=(2\underbrace{0\cdots0}_{k-1個0})_3=2\times3^{k-1}=(3-1)3^{(k-1)}$
$=2\times3^{k-1}$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>當 $M=k+1$（以 $k+1$ 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td>$\boxed{s=3}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k}$</td><td>$1\times3^{k-1}$</td><td>$2\times3^{k-2}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k+1}$</td><td>1×3^{k}</td><td>2×3^{k}</td></tr>
</table>
</td>
<td>$F(1,2)=(\underbrace{0\cdots0}_{k個0}1)_3=1=(2-1)3^{(1-1)}=1\times3^0$
$F(1,3)=(\underbrace{0\cdots0}_{k個0}2)_3=2=(3-1)3^{(1-1)}=2\times3^0$
$F(k+1,2)=(1\underbrace{0\cdots0}_{k餓0})_3=1\times3^k=1\times3^{k-1}\times3$
$=(2-1)3^{(k-1)}=1\times3^{k-1}$
$F(k+1,3)=(2\underbrace{0\cdots0}_{k個0})_3=2\times3^k$
$=2\times3^{k-1}\times3=(3-1)3^{(k-1)}=2\times3^{k-1}$</td>
</tr>
</table>

（三）設 $a=n$（以 n 進制表示其數值，其可被固定值為 1、2、⋯、$n-1$）

<table>
<tr>
<td>當 $M=1$（以 1 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td>$\boxed{s=3}$</td><td>$\cdots$</td><td>$\boxed{s=n}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td><td>2</td><td>$\cdots$</td><td>$n-1$</td></tr>
</table>
</td>
<td>$F(1,2)=(1)_n=1=(2-1)n^{(1-1)}=1\times n^0$
$F(1,3)=(2)_n=2=(3-1)n^{(1-1)}=2\times n^0$
$F(1,n)=(n-1)_n=n-1=(n-1)n^{(1-1)}$
$=(n-1)\times n^0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$M=2$（以 2 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td>$\boxed{s=3}$</td><td>$\cdots$</td><td>$\boxed{s=n}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td><td>2</td><td>$\cdots$</td><td>$n-1$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>n</td><td>$2n$</td><td>$\cdots$</td><td>$(n-1)n$</td></tr>
</table>
</td>
<td>$F(2,2)=(10)_n=1\times n^1=(2-1)n^{(2-1)}=1\times n^1$
$F(2,3)=(20)_n=2\times n^1=(3-1)n^{(2-1)}=2\times n^1$
$F(2,n)=((n-1)0)_n=(n-1)\times n^1=$
$(n-1)n^{(2-1)}=(n-1)\times n^1$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$M=k$（以 k 位數表示其值）</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$\boxed{s=2}$</td><td>$\boxed{s=3}$</td><td>$\cdots$</td><td>$\boxed{s=n}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=1}$</td><td>1</td><td>2</td><td>$\cdots$</td><td>$n-1$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=2}$</td><td>n</td><td>$2n$</td><td>$\cdots$</td><td>$(n-1)n$</td></tr>
<tr><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td><td>$\cdots$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k-1}$</td><td>$n^{(k-2)}$</td><td>$2n^{(k-2)}$</td><td>$\cdots$</td><td>$(n-1)n^{(k-2)}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{t=k}$</td><td>$n^{(k-1)}$</td><td>$2n^{(k-1)}$</td><td>$\cdots$</td><td>$(n-1)n^{(k-1)}$</td></tr>
</table>
</td>
<td>$F(k,2)=(1\underbrace{0\cdots0}_{k-1個0})_n=1\times n^{(k-1)}$
$=(2-1)n^{(k-1)}=1\times n^{(k-1)}$
$F(k,3)=(2\underbrace{0\cdots0}_{k-1個0})_n=2\times n^{(k-1)}$
$=(3-1)n^{(k-1)}=2\times n^{(k-1)}$
$F(k,n)=((n-1)\underbrace{0\cdots0}_{k-1個0})_n$
$=(n-1)\times n^{(k-1)}=(n-1)n^{(k-1)}$</td>
</tr>
</table>

$M=k+1$（以 $k+1$ 位數表示其值）

	$\boxed{s=2}$	$\boxed{s=3}$	$\cdots$	$\boxed{s=n}$
$\boxed{t=1}$	1	2	$\cdots$	$n-1$
$\boxed{t=2}$	n	$2n$	$\cdots$	$(n-1)n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\boxed{t=k}$	$n^{(k-1)}$	$2n^{(k-1)}$	$\cdots$	$(n-1)n^{(k-1)}$
$\boxed{t=k+1}$	$n^{(k)}$	$2n^{(k)}$	$\cdots$	$(n-1)n^{(k)}$

$F(k+1,2)=(1\underbrace{0\cdots0}_{k個0})_n=1\times n^{(k)}$

$=1\times n^{(k-1)}\times n=F(k,2)\times n$

$=(2-1)n^{(k+1-1)}=1\times n^{(k)}$

$F(k+1,3)=(2\underbrace{0\cdots0}_{k個0})_n=2\times n^{(k)}$

$=2\times n^{(k-1)}\times n\ F(k,3)\times n$

$=(3-1)n^{(k+1-1)}=2\times n^{(k)}$

$F(k+1,n)=((n-1)\underbrace{0\cdots0}_{k個0})_n$

$=(n-1)\times n^{(k)}=(n-1)\times n^{(k-1)}\times n$

$=F(k,n)\times n=(n-1)n^{(k+1-1)}$

$=(n-1)\times n^{(k)}$

（四）設 $a=n+1$（以 $n+1$ 進制表示其數值，其可被固定值為 1、2、…、n）

當 $M=1$（以 1 位數表示其值）

	$\boxed{s=2}$	$\boxed{s=3}$	$\cdots$	$\boxed{s=n+1}$
$\boxed{t=1}$	1	2	$\cdots$	n

$F(1,2)=(1)_{n+1}=1=(2-1)(n+1)^{(1-1)}$

$=1\times(n+1)^0$

$F(1,3)=(2)_{n+1}=2=(3-1)(n+1)^{(1-1)}$

$=2\times(n+1)^0$

$F(1,n+1)=(n)_{n+1}=n$

$=(n+1-1)(n+1)^{(1-1)}=(n)\times(n+1)^0$

$M=2$（以 2 位數表示其值）

	$\boxed{s=2}$	$\boxed{s=3}$	$\cdots$	$\boxed{s=n+1}$
$\boxed{t=1}$	1	2	$\cdots$	n
$\boxed{t=2}$	$n+1$	$2(n+1)$	$\cdots$	$(n)\times(n+1)$

$F(2,2)=(10)_{n+1}=1\times(n+1)^1$

$=(2-1)(n+1)^{(2-1)}=1\times(n+1)^1$

$F(2,3)=(20)_{n+1}=2\times(n+1)^1$

$=(3-1)(n+1)^{(2-1)}=2\times(n+1)^1$

$F(2,n+1)=(n0)_{n+1}=(n)\times(n+1)^1$

$=(n+1-1)(n+1)^{(2-1)}=(n)\times(n+1)^1$

$M=k$（以 k 位數表示其值）

	$\boxed{s=2}$	$\boxed{s=3}$	$\cdots$	$\boxed{s=n+1}$
$\boxed{t=1}$	1	2	$\cdots$	n
$\boxed{t=2}$	$n+1$	$2(n+1)$	$\cdots$	$(n)\times(n+1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\boxed{t=k-1}$	$(n+1)^{(k-2)}$	$2(n+1)^{(k-2)}$	$\cdots$	$(n)(n+1)^{(k-2)}$

$F(k,2)=(1\underbrace{0\cdots0}_{k-1個0})_{n+1}$

$=1\times(n+1)^{(k-1)}=(2-1)(n+1)^{(k-1)}$

$=1\times(n+1)^{(k-1)}$

$F(k,3)=(2\underbrace{0\cdots0}_{k-1個0})_{n+1}$

$=2\times(n+1)^{(k-1)}=(3-1)(n+1)^{(k-1)}$

$=2\times(n+1)^{(k-1)}$

$\boxed{t=k}$	$(n+1)^{(k-1)}$	$2(n+1)^{(k-1)}$	$\cdots$	$(n)(n+1)^{(k-1)}$

$$F(k,n+1)=((n)\underbrace{0\cdots0}_{k-1\text{個}0})_{n+1}$$
$$=(n)\times(n+1)^{(k-1)}$$
$$=(n+1-1)(n+1)^{(k-1)}$$

$M=k+1$（以 $k+1$ 位數表示其值）

	$\boxed{s=2}$	$\boxed{s=3}$	$\cdots$	$\boxed{s=n+1}$
$\boxed{t=1}$	1	2	$\cdots$	n
$\boxed{t=2}$	n	$2n$	$\cdots$	$(n)\times(n+1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\boxed{t=k}$	$(n+1)^{(k-1)}$	$2(n+1)^{(k-1)}$	$\cdots$	$(n)(n+1)^{(k-1)}$
$\boxed{t=k+1}$	$(n+1)^{(k)}$	$2(n+1)^{(k)}$	$\cdots$	$(n)(n+1)^{(k)}$

$$F(k+1,2)=(1\underbrace{0\cdots0}_{k\text{個}0})_{n+1}=1\times(n+1)^{(k)}$$
$$=1\times(n+1)^{(k-1)}\times(n+1)=F(k,2)\times(n+1)$$
$$=(2-1)(n+1)^{(k+1-1)}=1\times(n+1)^{(k)}$$
$$F(k+1,3)=(2\underbrace{0\cdots0}_{k\text{個}0})_{n+1}=2\times(n+1)^{(k)}$$
$$=2\times(n+1)^{(k-1)}\times(n+1)=F(k,3)\times(n+1)$$
$$=(3-1)(n+1)^{(k+1-1)}=2\times(n+1)^{(k)}$$
$$F(k+1,n+1)=((n)\underbrace{0\cdots0}_{k\text{個}0})_{n}$$
$$=(n)\times(n+1)^{(k)}$$
$$=(n)\times(n+1)^{(k-1)}\times(n+1)$$
$$=F(k,n+1)\times(n+1)=(n)n^{(k+1-1)}$$
$$=(n)\times n^{(k)}$$

故根據以上數學歸納法 $\forall\ s$、t、a、$M\in N$， 原敘述每張卡片左上角的首數為

$F(t,s)=(s-1)a^{(t-1)}$，其中 $t=1$、2、$\cdots M$ ；$s=2$、3、$\cdots a$ 。恆成立

四、【主題四】：如何設計其他版本的數字卡片？

依照【主題一】、【主題二】、【主題三】的方式是否可以創造出其他版本的卡片

第三套數字卡片：設計小於等於『63』以內的數字卡片

（一）1. 數學表示式 $63=64-1=2^6-1$（$a=2$，$M=6$）

2. 這些數字可以作成 $M(a-1)=6(2-1)=6$ 張卡片。

3. 每張卡片都剛好有 $a^{(M-1)}=2^{(6-1)}=2^5=32$ 數字。

4. 每張卡片左上角的首數 $F(t,s)=(s-1)a^{(t-1)}$，其中 $t=1$、2、$\cdots M$ ；$s=2$、3、$\cdots a$ 。

左上角的首數：1、2、4、8、16、32。

1	
	x2
2	
	x2
4	
	x2
8	
	x2
16	
	x2
32	

5. 每張數字卡片的數字是怎麼填進來的？

$3=2+1$	3 會出現在左上角是 2、1 的卡片上
$5=4+1$	5 會出現在左上角是 4、1 的卡片上
$28=16+8+4$	28 會出現在左上角是 16、8、4 的卡片上
$29=16+8+4+1$	29 會出現在左上角是 16、8、4、1 的卡片上
$37=32+5$	37 會出現在左上角是 32、5 的卡片上
$48=32+16$	31 會出現在左上角是 32、16 的卡片上
60=32+16+8+4	60 會出現在左上角是 32、16、8、4 的卡片上
$62=32+16+8+2$	62 會出現在左上角是 32、16、8、4、2 的卡片上
$63=32+16+8+2+1$	63 會出現在左上角是 32、16、8、4、2、1 的卡片上

					1
1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59
61	63				

					2
2	3	6	7	10	11
14	15	18	19	22	23
26	27	30	31	34	35
38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59
62	63				

					3
4	5	6	7	12	13
14	15	20	21	22	23
28	29	30	31	36	37
38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61
62	63				

					4
8	9	10	11	12	13
14	15	24	25	26	27
28	29	30	31	40	41
42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61
62	63				

					5
16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63				

					6
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63				

（二）1. 數學表示式 $63=64-1=4^3-1$（$a=4$，$M=3$）

2. 這些數字可以作成 $M(a-1)=3(4-1)=9$ 張卡片。

3. 每張卡片都剛好有 $a^{(M-1)}=4^{(3-1)}=4^2=16$ 數字。

4. 每張卡片左上角的首數 $F(t,s)=(s-1)a^{(t-1)}$，其中 $t=1$、2、⋯M；$s=2$、3、⋯a。

左上角的首數：1、2、3、4、8、12、16、32、48。

1	2	3
4	8	12
16	32	48

×4

×4

5. 每張數字卡片的數字是怎麼填進來的？

$5 = 4 + 1$	5 會出現在左上角是 4、1 的卡片上
$18 = 16 + 2$	18 會出現在左上角是 16、2 的卡片上
$29 = 16 + 12 + 1$	29 會出現在左上角是 16、12、1 的卡片上
$30 = 16 + 12 + 2$	30 會出現在左上角是 16、12、2 的卡片上
$31 = 16 + 12 + 3$	31 會出現在左上角是 16、12、3、1 的卡片上
$51 = 48 + 3$	51 會出現在左上角是 48、3 的卡片上
$57 = 48 + 8 + 1$	57 會出現在左上角是 48、8、1 的卡片上
$62 = 18 + 12 + 2$	62 會出現在左上角是 48、12、2 的卡片上
$63 = 48 + 12 + 3$	63 會出現在左上角是 48、12、3 的卡片上

			1
1	5	9	13
17	21	25	29
33	37	41	45
49	53	57	61

			2
2	6	10	14
18	22	26	30
34	38	42	46
50	54	58	62

			3
3	7	11	15
19	23	27	31
35	39	43	47
51	55	59	63

			4
4	5	6	7
20	21	22	23
36	37	38	39
52	53	54	55

			5
8	9	10	11
24	25	26	27
40	41	42	43
56	57	58	59

			6
12	13	14	15
28	29	30	31
44	45	46	47
60	61	62	63

			7
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

			8
32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47

			9
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

（三）1. 數學表示式 $63 = 64 - 1 = 8^2 - 1$（$a = 8$，$M = 2$）

2. 這些數字可以作成 $M(a-1) = 2(8-1) = 14$ 張卡片。

3. 每張卡片都剛好有 $a^{(M-1)} = 8^{(2-1)} = 8^1 = 8$ 數字。

4. 每張卡片左上角的首數 $F(t,s) = (s-1)a^{(t-1)}$，其中 t =1、2、⋯ M；s =2、3、⋯ a。

左上角的首數：1、2、3、4、5、6、7、8、16、24、32、40、48、56。

1	2	3	4	5	6	7
8	16	24	32	40	48	56

×8

5. 每張數字卡片的數字是怎麼填進來的？

$28 = 24 + 4$	28 會出現在左上角是 24、4 的卡片上

$30 = 24 + 6$	30 會出現在左上角是 24、6 的卡片上
$38 = 32 + 6$	38 會出現在左上角是 32、6 的卡片上
$60 = 56 + 4$	60 會出現在左上角是 56、4 的卡片上
$61 = 56 + 5$	61 會出現在左上角是 56、5 的卡片上
$63 = 48 + 12 + 3$	63 會出現在左上角是 56、7 的卡片上

		1
1	9	17
25	33	41
49	57	

		2
2	10	18
26	34	42
50	58	

		3
3	11	19
27	35	43
51	59	

		4
4	12	20
28	36	44
52	60	

		5
5	13	21
29	37	45
53	61	

		6
6	14	22
30	38	46
54	62	

		7
7	15	23
31	39	47
55	63	

		8
8	9	10
11	12	13
14	15	

		9
16	17	18
19	20	21
22	23	

		10
24	25	26
27	28	29
30	31	

		11
32	33	34
35	36	37
38	39	

		12
40	41	42
43	44	45
46	47	

		13
48	49	50
51	52	53
54	55	

		14
56	57	58
59	60	61
62	63	

肆、 討論(Discussion)

一、以上所研究的 $Y = X + 1$ 都是很漂亮的數字，例如：$32 = 2^5$、$64 = 2^6 = 4^3 = 8^2$、$81 = 3^4 = 9^2$、$125 = 5^3$。萬一設計的數字卡片的最大數 X，其中 $X + 1$ 不是 a^M 的數字，那麼又該如何設計此種的卡片呢？

1. 經我們分析之後發現可以找**比 X 大**，而且是以最接近的 a^M 數字來設計數字卡片，最後將超過 X 的數字消去即可。例如：最大數字 X 是 29，那麼就找比 29 大，且最接近的 a^M 數字 $32 = 2^5$，那就是我們所探討的第一套數字卡片，然後將五張數字卡內比 29 大的所有數字（30 和 31）消去即可。
2. 分析這些數字可以作成 $M(a-1)$ 張卡片。每張卡片都剛好有 $a^{(M-1)}$ 數字。
3. 找到每張卡片左上角的『首數』為 $F(t,s) = (s-1)a^{(t-1)}$，其中 t =1、2、⋯ M；s =2、3、⋯ a。

	$s=2$	$s=3$	$s=4$	…	$s=a$
$t=1$	1	2	3	…	$a-1$
$t=2$	a	$2a$	$3a$	…	$(a-1)a$
$t=3$	a^2	$2a^2$	$3a^2$	⋯	$(a-1)a^2$
…	…	…	…	…	…
$t=M-1$	$a^{(M-2)}$	$2a^{(M-2)}$	$3a^{(M-2)}$	…	$(a-1)a^{(M-2)}$
$t=M$	$a^{(M-1)}$	$2a^{(M-1)}$	$3a^{(M-1)}$	…	$(a-1)a^{(M-1)}$

4. 將每張卡片左上角的『首數』填完後，依序將尚未完成的數字一一填入，填入的規則為『該數字數值＝每張左上角首數之總和』，且使用比其小而最接近該數的『最大首數』。

例如：第三套卡片：$X+1=64=3^4$，首數：48、32、16、12、8、4、3、2、1。

要填入『35』這個數字

$35=32+3$　　不可以跳過『32』而用『16』　　$35=16+12+4+3$

所以35會出現在左上角首數為32和3的卡片上。

二、為何『該數字數值＝包含其值所在卡片的左上角首數之總和』，且使用比其小而最接近該數的『最大首數』呢？

1. 第一套卡片：$31=2^5-1$（二進制），首數：1、2、4、8、16。

$13=(01101)_2=(01000)_2+(00100)_2+(00001)_2=8+4+1$

$23=(10111)_2=(10000)_2+(00100)_2+(00010)_2+(00001)_2=16+4+2+1$

2. 第二套卡片：$26=3^3-1$（三進制），首數：1、2、3、6、9、18。

$13=(111)_3=(100)_3+(010)_3+(001)_3=9+3+1$

$23=(212)_3=(200)_3+(010)_3+(002)_3=18+3+2$

3. 第三套卡片：$63=4^3-1$（四進制），首數：1、2、3、4、8、12、16、32、48。

$35=(203)_4=(200)_4+(003)_4=32+3$

$58=(322)_4=(300)_4+(020)_4+(002)_4=48+8+2$

4. 第三套卡片：$63=8^2-1$（八進制），

首數：1、2、3、4、5、6、7、8、16、24、32、40、48、56。

$$35=(43)_8=(40)_8+(03)_8=32+3$$

$$58=(72)_8=(70)_8+(02)_8=56+2$$

將該數值依其所屬『進制法』轉換數值後，再由左至右依其『非 0 值』所在『位數』的值各別拆解，發現拆解後的值皆包含於每張的首數值內，且恰為比原數小而最接近該數的『最大首數』的組合數。

故可知卡片組內的數值為『每張卡片首數的組合數』，而該數字數值＝包含其值所在卡片的左上角首數之總和。

伍、 結論(Results)

根據我們對於卡片組的分析歸納，本研究最後有下列的發現：

一、所有符合條件的卡片組內的最大數字 X，皆可以數學公式 $X=a^M-1$ 來表示，且 a、$M\in N$，$a\neq 1$。

二、可以作成 $M(a-1)$ 張卡片。

三、每張卡片都剛好有 $a^{(M-1)}$ 個數字。。

四、每張卡片左上角的首數(最小數字)依序（由小至大）為 $F(t,s)=(s-1)a^{(t-1)}$，其中 t=1、2、…M；s=2、3、…a。

五、以數學公式 $X=a^M-1$ 來表示的卡片組具有下列特性：

(一)第一張卡片：以『1』為首數的等差數列，公差為其『進制法』的底數 a。

例如：$7=2^3-1$。其公差為 2，該數列為：1、3、5、7。

(二)最後一張卡片：以『卡片組最大首數值』為首數的等差數列，公差為『1』，最終值為卡片的最大值。

例如：$7=2^3-1$。其所有卡片的首數分別為 1、2、4，該數列為：4、5、6、7。

(三)第 a 張卡片：從底數 a 開始會出現連續 a 個自然數，若尚未填滿該張卡片，則每間隔 $a(a-1)$ 個連續自然數後，會再連續 a 個自然數。

例如：$15=2^4-1$。第 2 張卡片數列為：2、3、6、7、10、11、14、15。

『3 和 6』、『7 和 10』、『11 和 14』分別間隔 2 個連續自然數。

六、若以 2 的為底的指數卡片組來分析，我們可以設計出如下的卡片組且其複製程序如下圖：

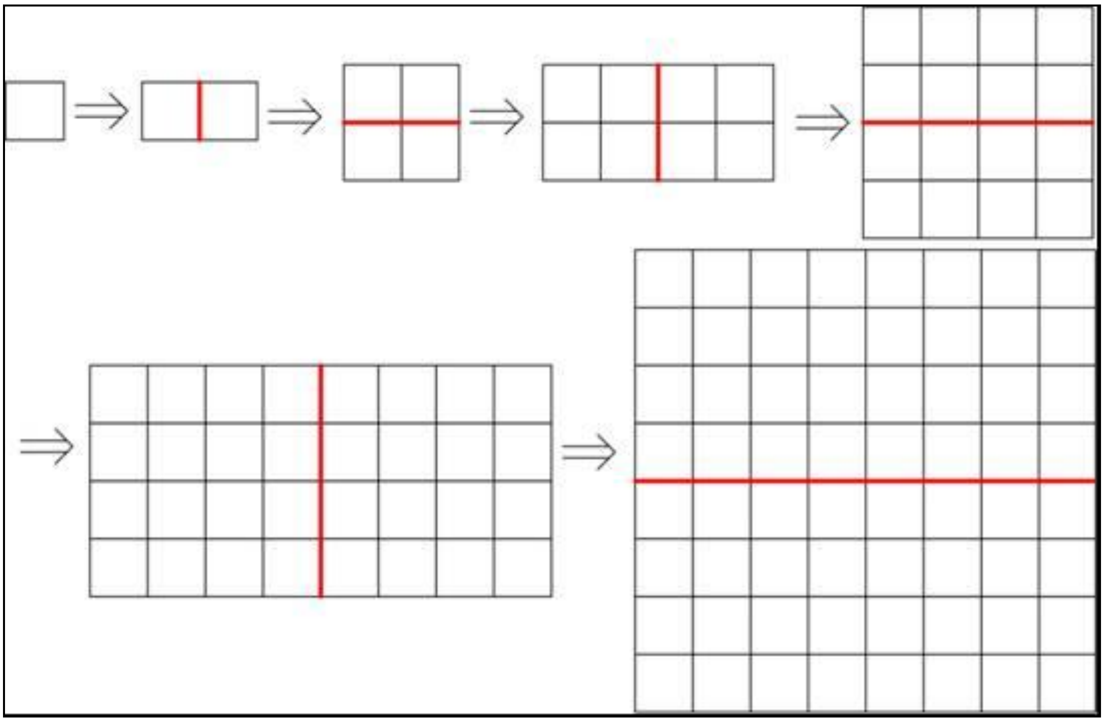


圖 5-1：以 2 的為底的指數卡片組來分析

未來計劃將本遊戲以『三維』的空間方式予以呈現，以強化本遊戲的有趣味性。

陸、參考資料(References)

[1] 許金童、陳宗仁，電腦概論與程式語言FORTRAN，國科出版社。

[2] 周純芬、彭洪文，數學天地（一）、科學類 7，新一代益智叢書。

[3] 許志農等，高中數學第一冊指數與對數單元，龍騰出版社，2010。

[4] 張鎮華，幸福結局問題-鴿籠原理與拉姆西定理，數學傳播，28 卷 2 期，民國 93 年 6 月。

[5] 孫文先，神秘有趣的數學，九章出版社，2000。

[6] 夏興國，數學歸納法縱橫談，九章出版社，1999。

【評語】040401

這是一個數學遊戲，在一些數學益智遊戲書本上，是老師在課堂上喜歡做的遊戲之一，因此研究主題缺乏新鮮感，比較少創意。除此之外定理 1 之敘述宜說明清楚。