

# 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

080411

**Hex 遊戲王**

學校名稱：臺中市神岡區社口國民小學

作者：  小五 廖子樂 小五 林佳豪 小五 蘇薇方 小五 張霈宜 小五 張皓鈞	指導老師：  許家吉 田文宗
---	-------------------------

關鍵詞：圖形連接遊戲、座標、數列

## 作品名稱：Hex 遊戲王

### 摘要

Hex 遊戲是由諾貝爾經濟學獎得主納許(John Nash)在就讀研究所時所發明的一種圖形連接遊戲，本研究探究 hex 遊戲的獲勝技巧，同時初步探究 hex 遊戲的數學原理，包括 hex 棋盤的垂直座標表示法，同時根據此法來分析自創圖形連接的八種遊戲，如飛箭渡河(未改良前版本及改良後版本)、三角為王、六魔王、鑽石達令、家家樂、太陽笑臉及薇薇彩帶遊戲。

將遊戲棋盤使用垂直座標表示法表示之後，能清楚地了解圖形連接遊戲棋盤是由兩類基本圖形(三角形和四邊形)所擴展而成的，將六種自創遊戲、三種常見的連接類遊戲(傳聲筒、傳紙條和 O×遊戲)使用垂直座標表示法來分類之後，驚訝地發現自創遊戲棋盤中的家家樂遊戲和 hex 遊戲的結構相同，使得難度和玩法相近。

## 作品名稱：Hex 遊戲王

### 壹、研究動機：

你有看過六邊形嗎?那你畫的六邊形是正六邊形的還是不規則的六邊形?你有沒有想過用六邊形可以來玩 hex 遊戲嗎?剛開始我跟一些同學玩 HEX 遊戲的時候，都會輸，覺得很無趣，可是後來我找到一些獲勝的訣竅，才發現這是一個很有挑戰性的遊戲，同時還可以自創 HEX 遊戲，且聽我們娓娓道來。

### 貳、研究目的：

1. 了解 hex 遊戲的規則是甚麼？
2. Hex 遊戲的數學原理是甚麼？
3. Hex 遊戲獲勝的秘訣有哪些？
4. 如何用 hex 的數學原理創作自己的遊戲？

### 參、研究設備器材：

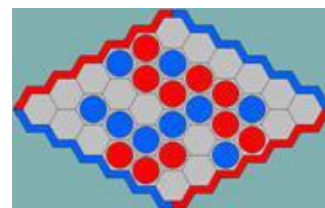
筆、電腦及白紙

### 肆、研究過程或方法：

在老師介紹完 hex 遊戲之後，我們一群同學便相互對下，結果有的人很容易獲勝，但是有的人卻輸了，所以我們就想研究 hex 遊戲的數學原理是什麼，為什麼有的人很容易獲勝，有的人卻屢戰屢輸，大家七嘴八舌的討論著，並獲得一些結論，後來更以和電腦對下來驗證自己的想法。與電腦對下的結果讓我們能夠知道一開始選擇下通道較多的地方，進行阻斷對方以及進攻還有製造”造橋”等的技巧，是否一定會有機會可以獲勝;最後我們更進一步利用 hex 遊戲規則及討論，來設計自己的 hex 遊戲，藉由這樣的遊戲創作來增進對 hex 遊戲的理解，並希望能夠找到完全擊敗對手的 hex 遊戲的數學討論，來增進關於連接類遊戲獲勝的機會。下面是有關 hex 遊戲規則的說明：

#### (一)、認識 hex 遊戲規則

由納許(John Nash)所發明的「納許棋」是一個相當有趣的遊戲，遊戲由一人猜拳決定下棋先後開始，每人一次下一子，雙方各佔棋盤上的左右或上下方，盤中布滿4x4、5x5、6x6或是更大的由每個正六邊形所組合成的棋盤，雙方輪流一次下一子棋，誰先完成連接左右或上下方，就贏得此遊戲，例如下圖，由下紅色棋子這方贏得比賽。



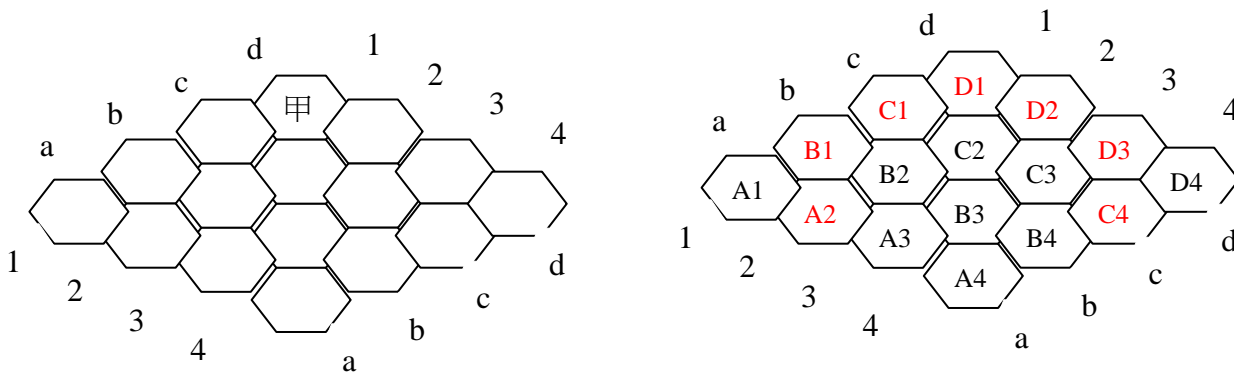
#### (二)、Hex 遊戲的數學原理

根據與其他同學玩的結果，發現有的人屢戰屢勝，為了探討下 Hex 棋的獲勝技巧，我們想到用座標將每個格子加上標號，以方便討論。

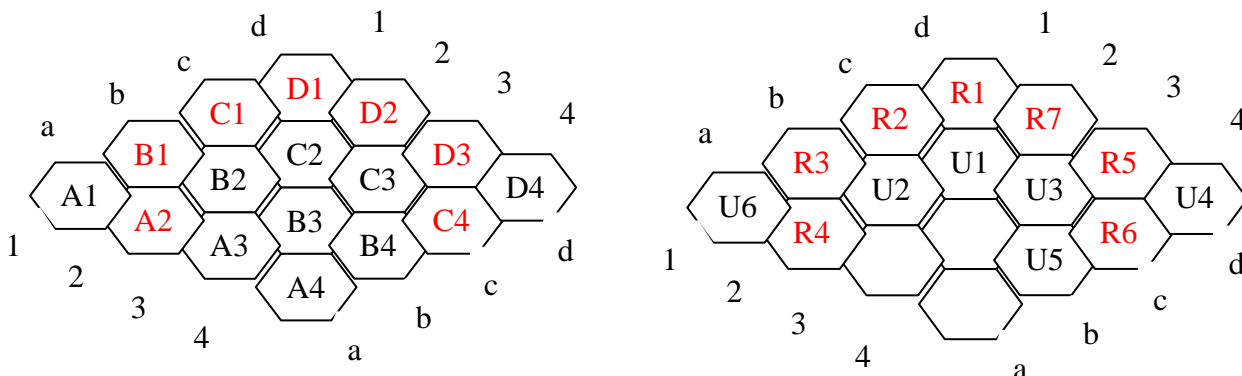
##### 1. hex 棋盤中的每個格子，如何用數學表示？

經過大家一番討論，我們決定用座標表示棋盤中每個格子的位置，例如下圖棋盤中的甲位置，用

座標(d, 1)來表示，因為不會產生誤會，所以有時也用 d1 來表示甲位置的座標，那麼 4x4 棋盤中每個格子的座標表示，就如下右圖所示：

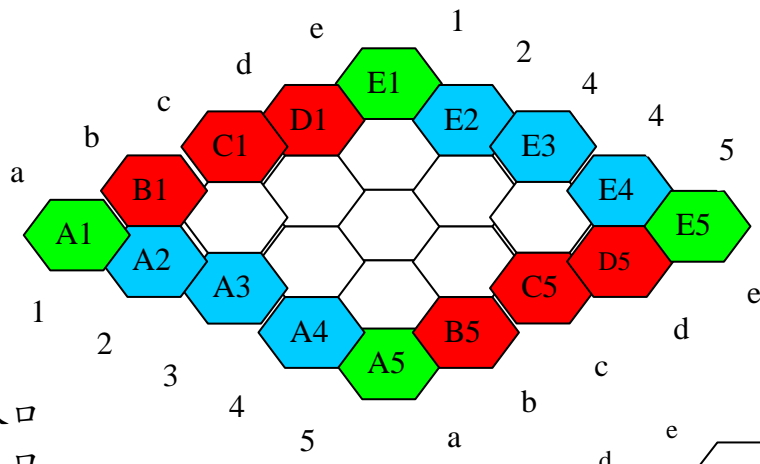


那麼每個棋盤中獲勝者走的路徑就可以用這樣表示： $A2 \rightarrow B1 \rightarrow C1 \rightarrow D1 \rightarrow D2 \rightarrow D3 \rightarrow C4$  來表示，但實際上這樣的表示並不能表達實際上雙方走每步的次序，所以在記錄表上用 R 表示 Red，U 表示 Blue(以避免跟座標 a, b, c, d 的標號混淆)，若是圖示或紀錄表圖中是紀錄顏色(R, U)則後方的數字則表示走的次序，那麼下圖中獲勝的走法紀錄，就能夠清楚的表達為： $d1 \rightarrow c1 \rightarrow b1 \rightarrow a2 \rightarrow d3 \rightarrow c4 \rightarrow d2$  了！



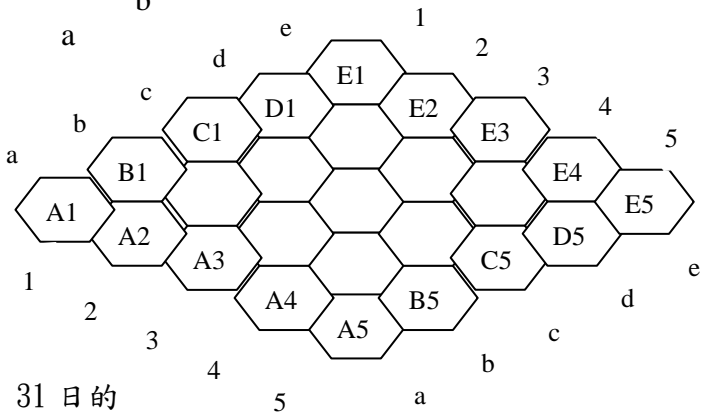
我們分析每個獲勝的路徑，發現只要是能夠由入口連到出口的路徑就能夠獲勝，因此，我們討論到對 Red 或 Blue 而言，必須說明什麼叫做出(入)口。我們想到用下圖的座標和顏色表示出(入)口，對 5X5 的棋盤而言，下 Red 和下 Blue 的人而言，a1, b1, c1, d1, e1 和 a5, b5, c5, d5, e5 都是 Red 的對外的出入口，所以 b1, c1, d1 和 a4, b4, c4, d4 用紅色表示，比較特殊的是 a1, e1, a5, e5 因為這四個格子同時也是 Blue 的出入口，所以用綠色表示。同理，a1, a2, a3, a4, a5 和 e1, e2, e3, e4, e5 都是 Blue 的出入口，所以 a2, a3, a4 和 e2, e3, e4 用藍色表示，比較特殊的是 a1, e1, a5, e5 因為這四個格子同時也是 Red 的出入口，所以用綠色表示。

:



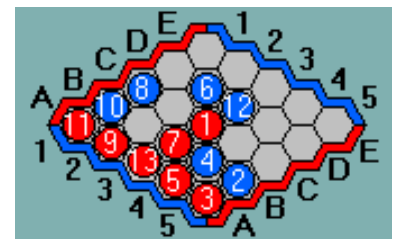
藍色:表示藍方的出入口  
 紅色:表示紅方的出入口  
 綠色:同時是藍、紅方的出入口,所以任一方都可以搶它。

若以座標來表示的話,則以下的座標都是 5X5 棋盤中的重要出入口。圖示如右:



例如,在我們進行研究的同學甲在記錄表中 12 月 31 日的鑽石型棋盤:

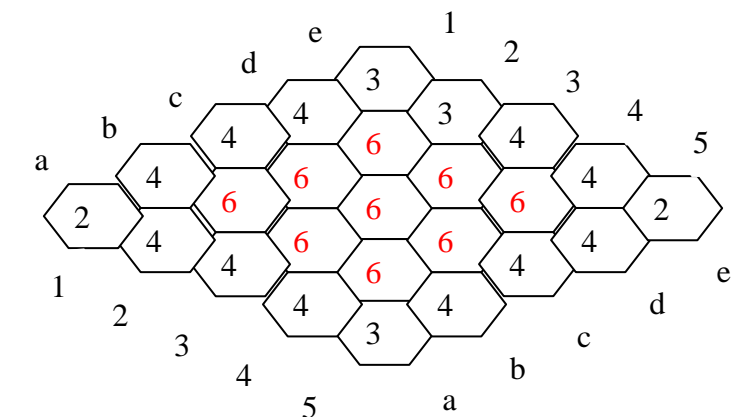
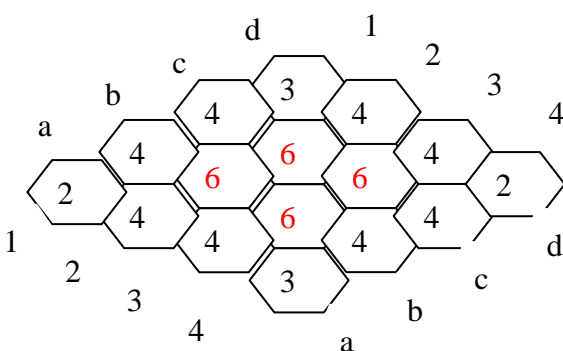
其中 3、11 號是出口,座標分別 A1、A5。紅方第一手下 C3,通道有 6 個,但是藍方後來在 D2 把紅方擋住了,所以紅色就繞路走,如果藍色下 A2 的話,藍色就有機會可以獲勝。另外,紅色第一手下 C3,之後並使用造橋的方式(下 a5)連線,這樣就有比較多機會可以讓自己連線。



### (三)、Hex 遊戲獲勝的秘訣

#### 1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的

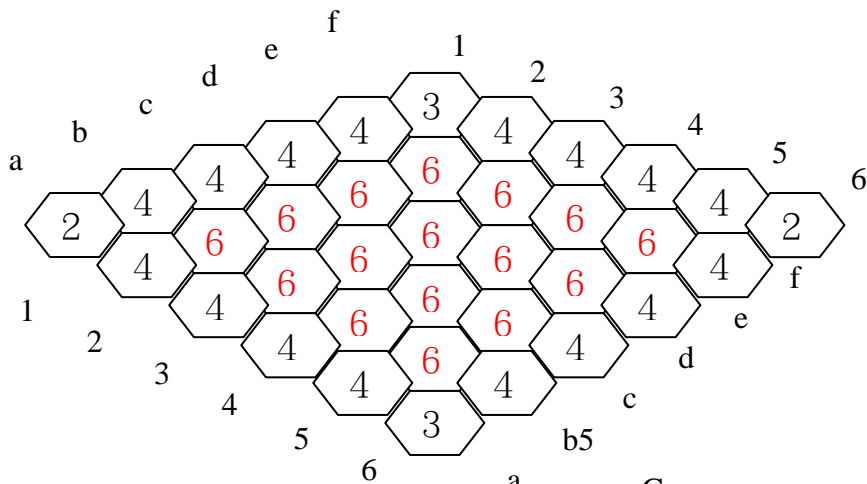
我們分析棋盤中的每個格子,發現每個格子跟旁邊格子連接形成與出入口連接的通道才有機會獲勝,所以就分析每個格子座標的通道數目,整理如下:



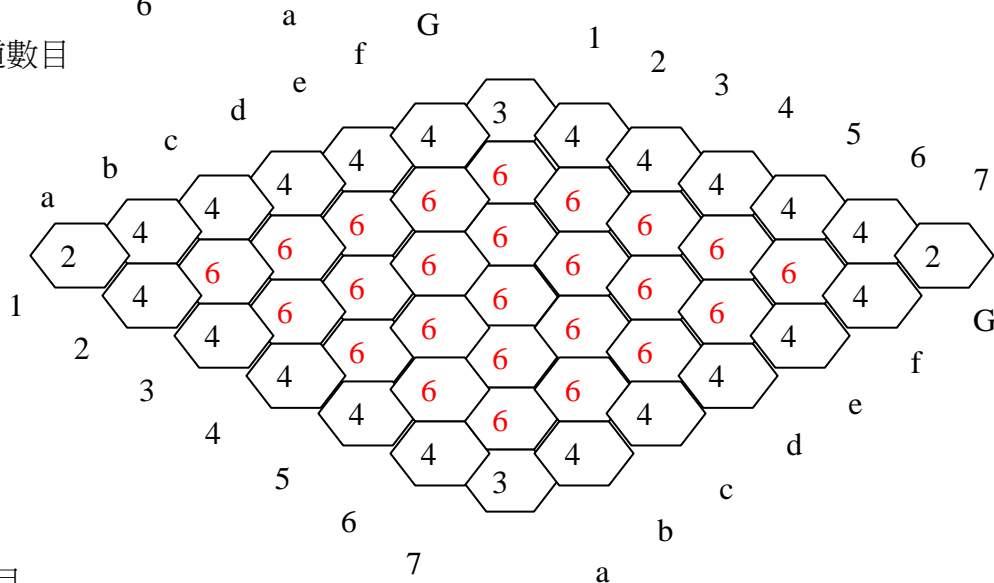
4X4 棋盤的每格通道數目

5X5 棋盤的每格通道數目

從整理的表格以及下面圖中格子內的通道數目可以知道只要選擇通道是較多的地方,就有機會可以獲勝。



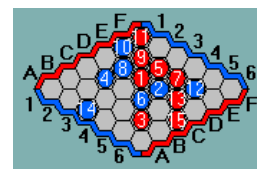
6X6 棋盤的每格通道數目



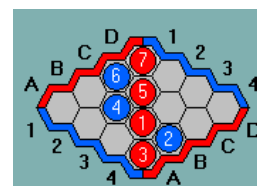
7X7 棋盤的每格通道數目

棋盤種類	4X4	5X5	6X6	7X7
座標	C2、D1、D2、C1、C3、 B2、B3、C3、C2、C4、 D2、D3、B3、B4、B3、 C2、C3、B2、B4、A3、 A4、B2、C1、C2、B1、 B3、A2、A3	A1、B1、C1、D1、 E1、A2、B2、C2、 D2、E2、A3、B3、 C3、D3、E3、A4、 B4、C4、D4、E4、 A5、B5、C5、D5、 E5。	B2、c2、d2、e2、 B3、c3、d3、e3、 B4、c4、d4、e4、 b5、c5、D5、e5	B2, B3, B4, B5, B6 C2, C3, C4, C5, C6 D2, D3, D4, D5, D6 E2, E3, E4, E5, E6 F2, F3, F4, F5, F6
通道數目	6	6	6	6

下圖是進行研究的同學丁在記錄表上12月31日電腦對下的成果，首先下d3因為中間格子通道數目較多，較容易獲勝，依此下b5→e3→e4→e2→f1(連接出入口)→d5→c6(連接出入口)，我(紅方)獲勝。

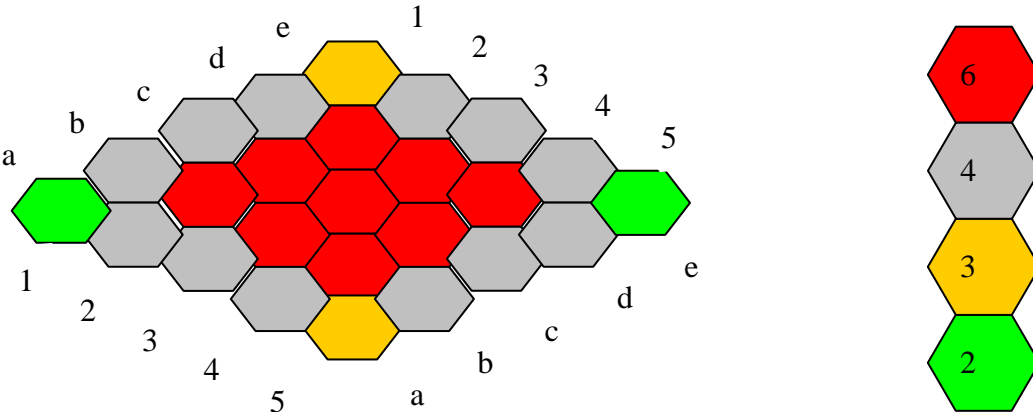


又例如進行研究的同學戊的比賽紀錄圖中顯示下通道數目多的和獲勝關鍵性，如下圖第一手有六個通道，由此可知下通道數較多的勝算會較多，因為只要下的通道愈多，對外連接的通道數目較多，所以贏的機會也會變的比較多，換句話說先擋住別人贏的機會也會越大，如紅方第二手擋住藍色的第一手，只要下B2、C2、B3及C3贏的



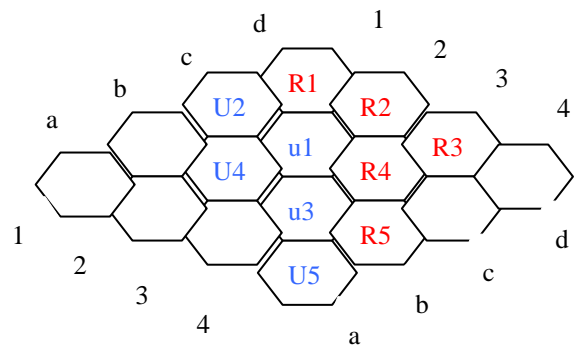
機會就會非常的高。

總和分析，不管是 4X4, 5X5, 6X6 或是 7X7 的棋盤，若用座標 和顏色表示每個格子內通道數目的話，每個棋盤大致是呈現數字對稱成的通道數目棋盤形式，如下圖(研究同學丁的整理):每個棋盤裡通道數目最多的都是 6(用紅色表示)，其次是兩側出入口(單色)的位置(通道數目為 4)，再來是上下頂端的位置(這也是雙方的出入口，此格子的通道數目為 3)，最後通道數目最少的是左右兩端(這也是雙方的出入口，此格子的通道數目為 2)，如下圖所顯示。



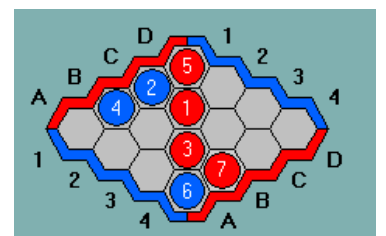
## 2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好)

所謂連接自己走的路線，包括思考棋子的位置能夠下在通道數目多的，且要能夠連接對外出口及入口的位置，若能同時考慮擋住對方走的路線就能夠搶先讓自己連成一線而獲勝，右圖是進行研究的同學丙嘗試用座標和 hex 圖來說明如何連接自己走的路線並擋住別人走的路線的過程：

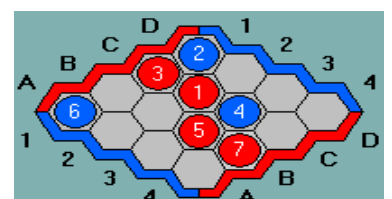


如上右圖示，進行研究的同學乙一開始下 C2 時，紅方下 D1、D2、C3 來擋住藍方，當藍方下 B3 時，紅方下 C3、B4 來擋住藍方，紅方便獲勝了。

又例如進行研究的同學乙 4X4 的棋盤比賽紀錄中，可以發現紅方下的格子大部份都是最多通道的，格子通道是 4 的 B4 位置也要佔住，因為此位置是紅方的是出(入)口，下此位置，除了擋住藍方(a4)，也讓自己連接對外出(入)口，像 A4 和 D1，因而增加自己獲勝的機會。



例如進行研究的同學戊的比賽紀錄圖，顯示擋住別人走的路線來獲勝，圖中紅色下 C2 然後藍色擋 D1，接下來紅色擋 C1 藍色做造橋，紅色下 B3 讓藍色沒有成功造橋，逼藍下 A1 最後紅下 B4 就贏了。

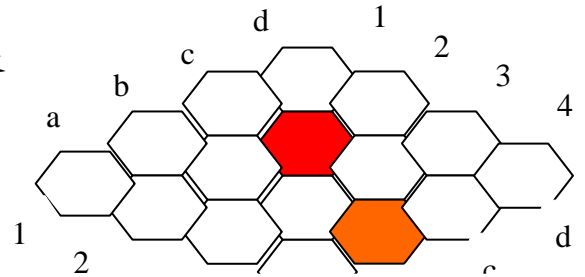




### 3. 適時使用造橋能增加獲勝機會

在玩 hex 遊戲時，除了下最多通道的地方，也可在比賽中使用造橋來快速連接自己走的路線，以便讓自己達到出入口的兩端。對不熟悉這個遊戲的玩家而言，使用造橋可以讓對手放鬆戒心，卻能讓在最後關頭讓自己連線，請看以下說明：

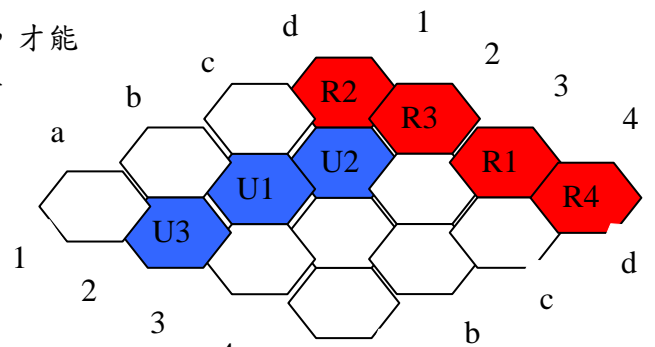
紅方下完 b4 接著下 c2 (這兩子一開始並未連線)，最後再適時適情形臨門補上兩格之間的連線，若 c3 被藍方佔去，則紅方佔 b3，可讓紅方在兩子間連線；若 b3 被藍方佔走，則紅方佔 c3 可讓紅方連線，這就是所謂的造橋。造橋的路線有長有短，當然是愈短的造橋愈好，同時也可以連續多次使用造橋，但是光使用造橋還是不能獲勝，還必須搭配使用其他技術，例如走截斷對方連線的路徑、下最多連線數目的位置…等，才能獲勝。



‘造橋的圖示說明

### 4. 佔住對方的出口獲勝法

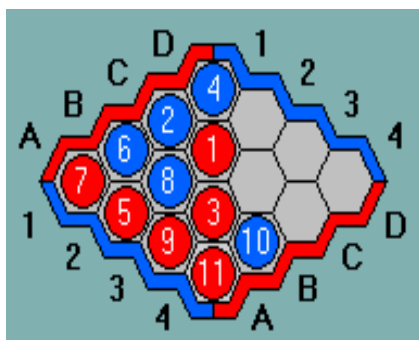
先佔住對方的出口而獲勝的方法，只有在對手疏忽時，才能獲勝。此玩法是指一開始先佔住對方可能連線道路的格子之後，再一直讓自己連接下去就可以，但是隨著大家注意力提升，要純粹靠這個規則而獲勝的機率減少許多了。在這個例子中，紅方在藍方下第三子時及時擋住對方出口，加上自己之前走的格子都是能讓自己連線的最短路，所以直接擋住藍方，紅色就獲勝了。



佔住對方的出口獲勝法圖解說明

### 5. 走最短路徑來連線

例如進行研究的同學丙 12 月 20 日的比賽紀錄圖中顯示，紅方本想走先下通道數目多的，因為先下通道數目多的愈有可能會獲勝，而通道數目多，表示該位置連接其他格子的機會就愈多，先走通道數目少的，顯示該位置連接其他格子的機會也就少。但是因為通道數目多的路線被對方擋住，改走最短路徑來連線就可以以使用最少的步數來連接，進而比對方提早連線而獲勝。這是我們 12

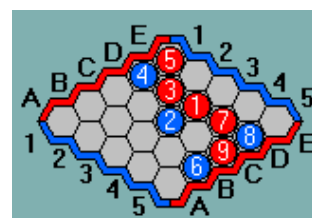


月 20 日下的範本請參考

- ①下 c2 因為連接的通道較多
- ②下 b3 因為阻斷對方連接的路線
- ③下 a2 因為造橋準備連接 c2 (失敗)
- ④下 a1 因為造橋圍連接線
- ⑤下 a3 因為連接自己通道
- ⑥下 a4 因為要和自己出口通道連接, 才能獲勝

另外一例是進行研究的同學戊 12 月 27 號 5X5 棋盤我所做的比賽紀錄圖，顯示使用最短路線能夠獲勝，圖示如下：其中紅方是我(佳豪，先下)，藍方是電腦，結果紅色贏，藍色輸，紅色用五顆棋，藍色用四顆棋。

還有也可以一開始就一直佔對方的出口或道路，有些網站有 HEX 的遊戲裡面有許多原理等著你去發現。





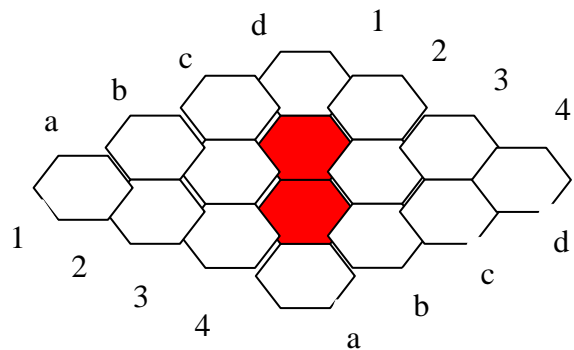
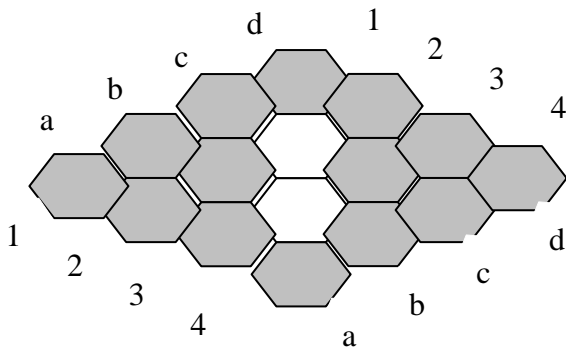
## 伍、研究結果：

根據最近下棋的經驗，我們歸納幾種不同贏的方式，分別是一開始不是下最佳通道位置，和一開始下最佳通道位置來討論，說明如下圖：

### (一)、4X4 棋盤

#### a. 使用”黏”法

一開始不是下最佳通道位置(用灰色表示)	一開始下最佳通道位置(C2 或 b3)(用紅色表示)
---------------------	----------------------------



為什麼 C2 或 b3 是最佳通道呢，因為 C2、B3 對外的通道數都是比其他較多，如果每個步驟遵守獲勝原則的話，有比較大的機會獲勝。

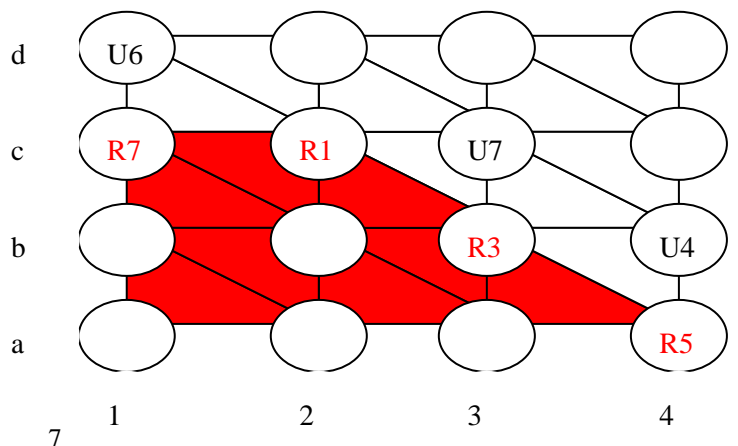
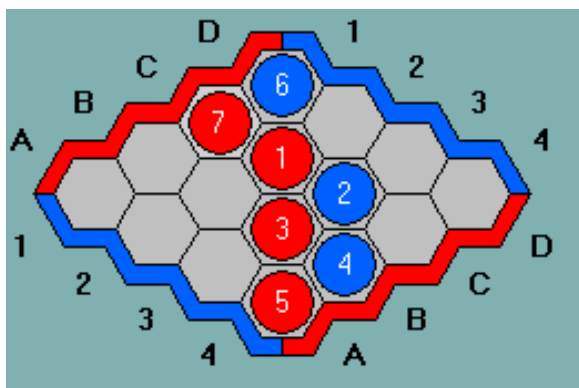
實際對下例子:(左邊欄邊是紅方下輸的棋盤紀錄，右邊欄是紅方下贏的棋盤紀錄)

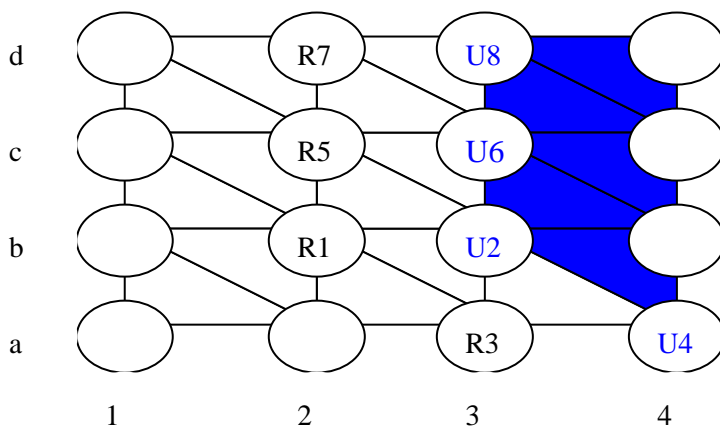
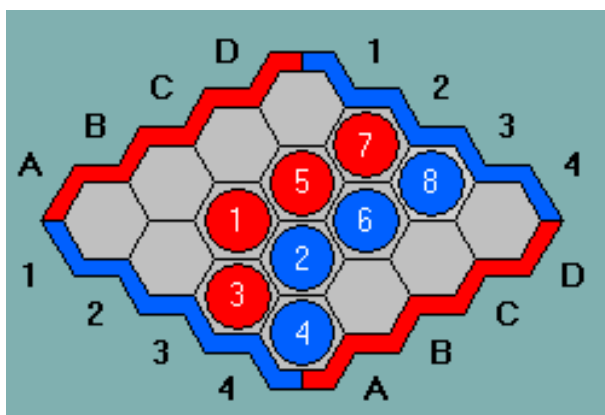
1. Blue 贏(Red 無法救)通常會輸	2. Red 沒下錯子的話會贏
<p>Red 一開始下 b2(由乙分析)</p>	<p>Red 一開始下 c2(由甲分析)</p>

(註:更多的棋盤紀錄與分析請見實驗記錄)

實際對下例子的分析如下:

4X4, 先攻者: <u>Red/Blue</u> 方向: 往 <u>abc/123</u>	4X4, <u>棋盤變成垂直座標討論</u>	紀錄者: <u>甲</u> 、乙、丙、丁、戊(用代號表同學名稱)
--	------------------------	----------------------------------





2. 獲勝走的步驟:(走 4 步贏) 方向: 往 abc/123 (先走的是: R/U;贏的是: R/U)

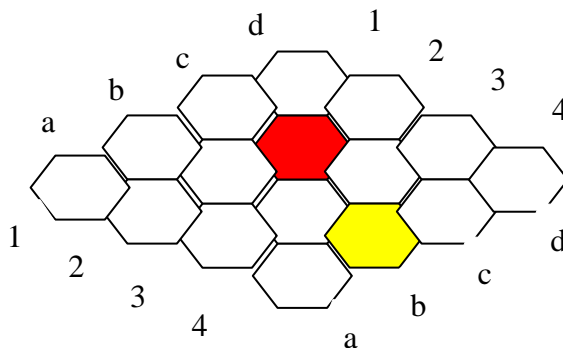
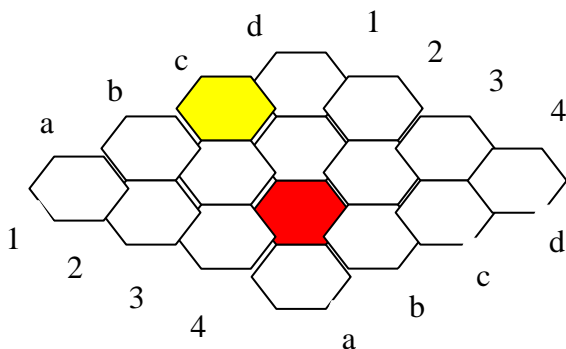
1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 r1
2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好, 如 u2~u8)
3. 適時使用造橋能增加獲勝機會, 如 \_\_\_\_\_
4. 佔住對方的出口獲勝法, 如 u4

發現: 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分

### b. 使用”造橋”法

一開始不是下最佳通道位置

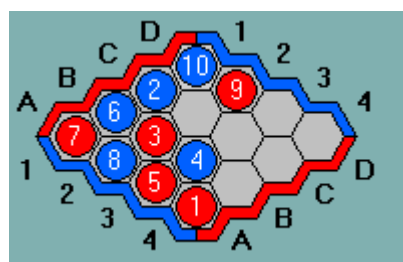
一開始下最佳通道位置(c2 或 b3) (用紅色表示)  
連接出口的次佳通道位置(c1, b4) (用黃色表示)



為什麼 C2 或 b3 是最佳通道呢, 因為 C2、B3 對外的通道數都是比其他多, 如果每個步驟遵守獲勝原則的話, 有比較大的機會獲勝。

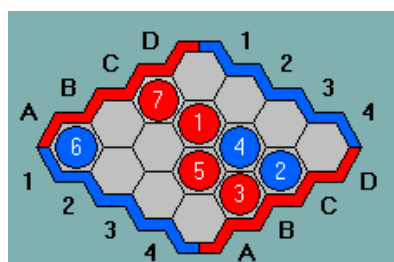
實際對下例子:(左邊欄邊是紅方下輸的棋盤記錄, 右邊欄是紅方下贏的棋盤紀錄)

3. Blue 贏(Red 無法救)Red 通常會輸



Red 一開始下 a4(由戊分析)

4. Red 沒下錯子的話會贏

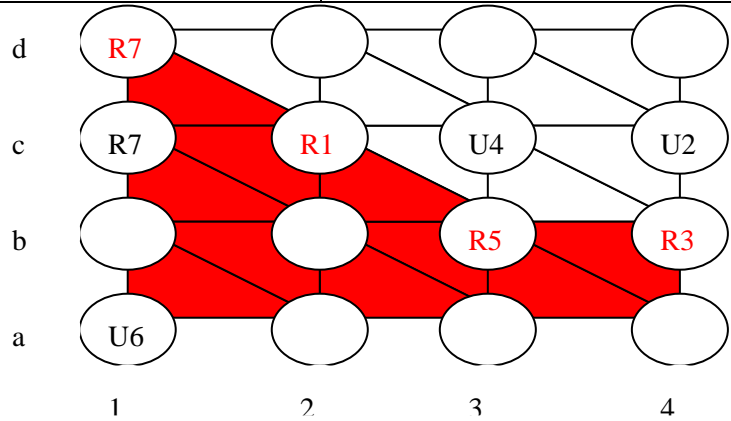
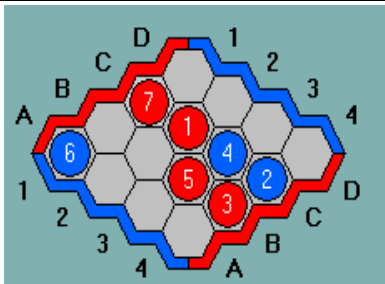


Red 一開始下 c2(由戊分析)

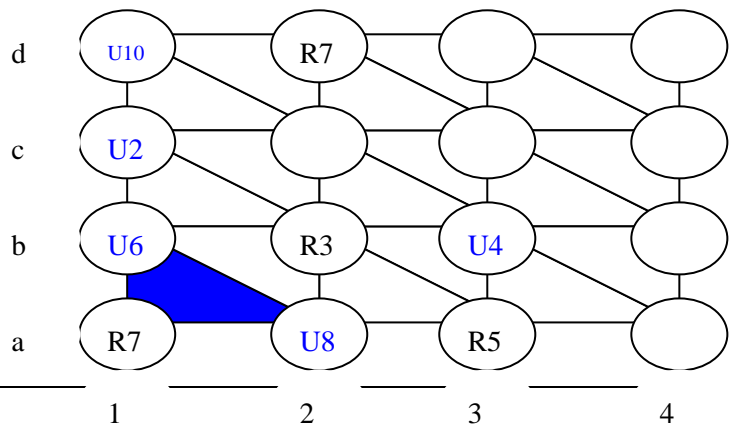
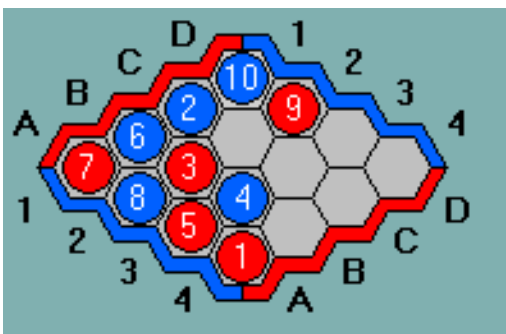
(註:更多的棋盤紀錄與分析請見實驗記錄)

實際對下例子的分析如下:

4X4, 先攻者: <u>Red</u> /Blue 方向: 往 <u>abc</u> /123	4X4, 棋盤變成垂直座標討論	紀錄者: <u>甲</u> 、 <u>乙</u> 、 <u>丙</u> 、 <u>丁</u> 、 <u>戊</u> (用代號表同學名稱)
--	-----------------	--



1. 獲勝走的步驟:(走 <u>4</u> 步贏) 方向: 往 <u>abc</u> /123 (先走的是: <u>R</u> /U;贏的是: <u>R</u> /U)
1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 <u>r1</u>
2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好, 如 _____)
3. 適時使用造橋能增加獲勝機會, 如 <u>r1 r3 R5 R7</u>
4. 佔住對方的出口獲勝法, 如 _____
5. 走最短路徑來連線, 如 <u>r1 r3 r5 r7</u>
6. 使用”造橋”法, 如 <u>r1 r3 r5 r7</u>
發現:1.下通道數目多的如 <u>c2</u> 有比較多機會獲勝      2. 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分



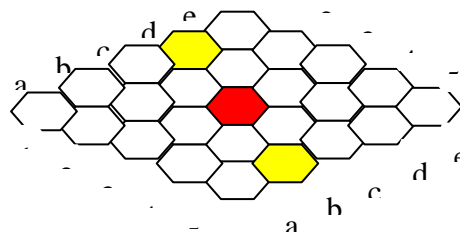
3. 獲勝走的步驟:(走 <u>5</u> 步贏)
1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 _____
2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好, 如 _____)
3. 適時使用造橋能增加獲勝機會, 如 <u>u2 u4 u8</u>
4. 佔住對方的出口獲勝法, 如 <u>u2 u6 u10</u>
5. 走最短路徑來連線, 如 _____
6. 使用”造橋”法, 如 <u>u2 u4 u8</u>
7. 使用”雙造橋”法, 如 <u>u2 u4 u8</u>
發現:1.下通道數目多的如 <u>c2</u> 有比較多機會獲勝
2. 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分

## (二)、5X5 棋盤

一開始不是下最佳通道位置

一開始下最佳通道位置(c3) (用紅色表示)

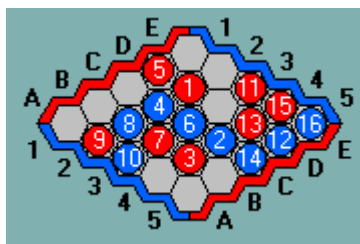
連接出口的次佳通道位置(d1, b5) (用黃色表示)



為什麼 C3 是最佳通道呢，因為這個位置通道數較多，例如對方下 d2, 我就下 c2, 可以直接連接對外出口；至於為什麼 d1, b5 是次最佳通道位置呢，因為 C2 連接 D1, 以及 C2 連接 B5 時，可用造橋連接，所以不容易被對方棋子擋住而容易獲勝。

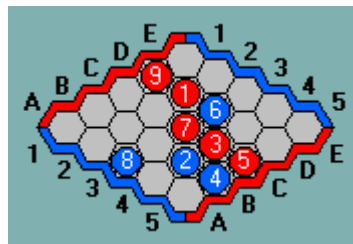
實際對下例子:(左邊欄邊是紅方下輸的棋盤紀錄，右邊欄是紅方下贏的棋盤紀錄)

5. Blue 贏(Red 無法救)Red 通常會輸



Red 一開始下 d2(由甲分析)

6. Red 沒下錯子的話會贏



Red 一開始下 d2(由乙分析)

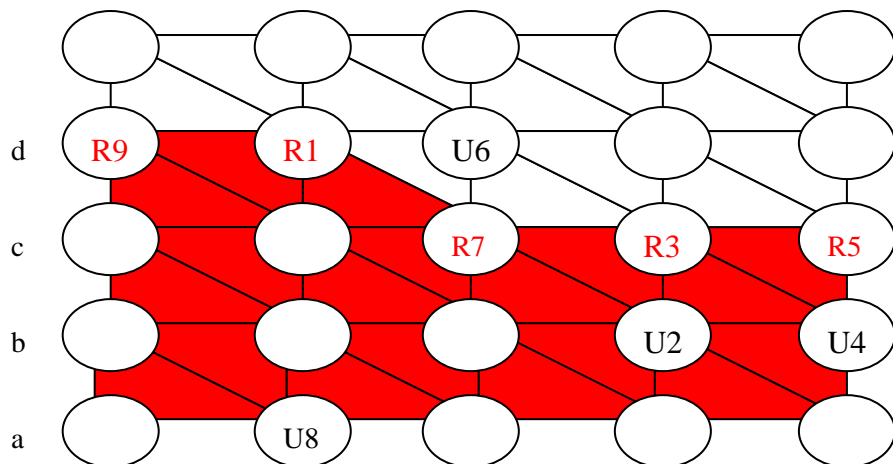
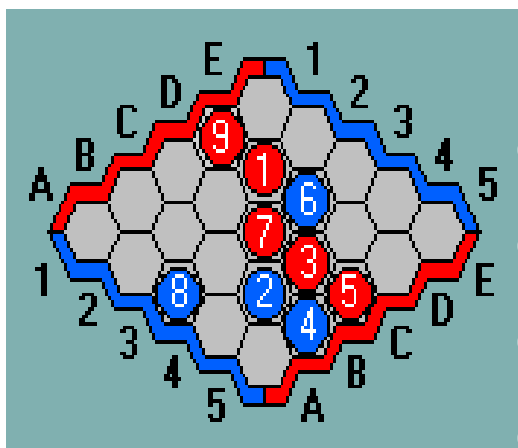
(註:更多的棋盤紀錄與分析請見實驗記錄)

實際對下例子的分析如下:

5X5, 先攻者: Red/Blue 方向: 往 abc/123

5X5, 棋盤變成垂直座標討論

紀錄者: 甲、乙、丙、丁、戊(用代號表同學名稱)



4. 獲勝走的步驟:(走 5 步贏) 方向: 往 abc/123 (先走的是: R/U; 贏的是: R/U):

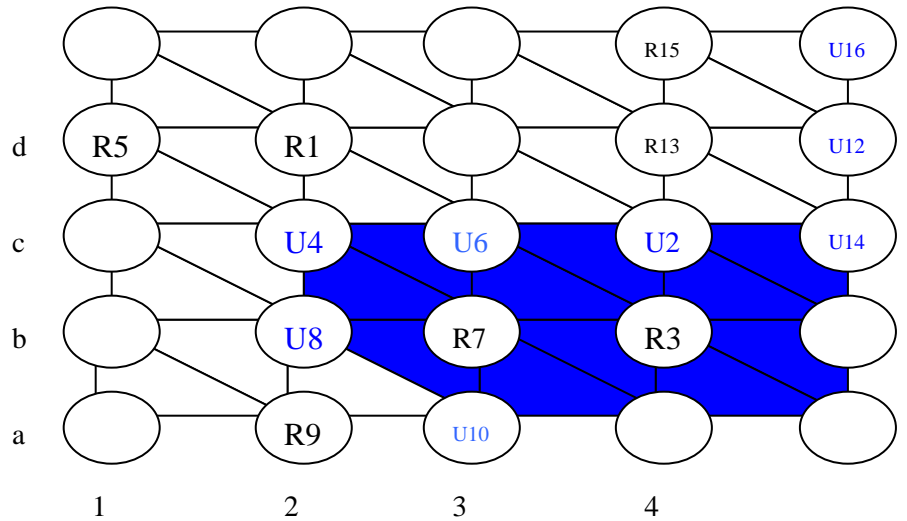
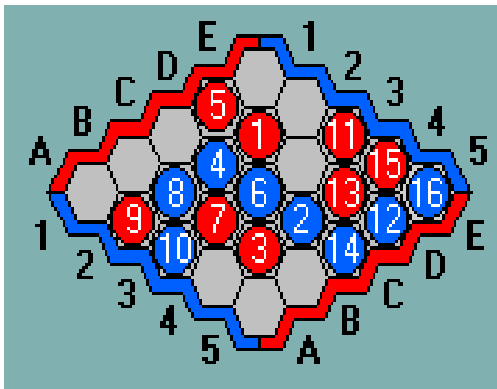
1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的，如 r1 u2
2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好，如 r1~r9
3. 適時使用造橋能增加獲勝機會，如 r7 r9

4. 佔住對方的出口獲勝法  
如 5. 走最短路徑來連線，如

6. 使用”造橋”法，如 u2 u8 u6
7. 使用”雙造橋”法，如 u2 u8 u6

發現:1. 獲勝規則策略二使用最多

2. 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分



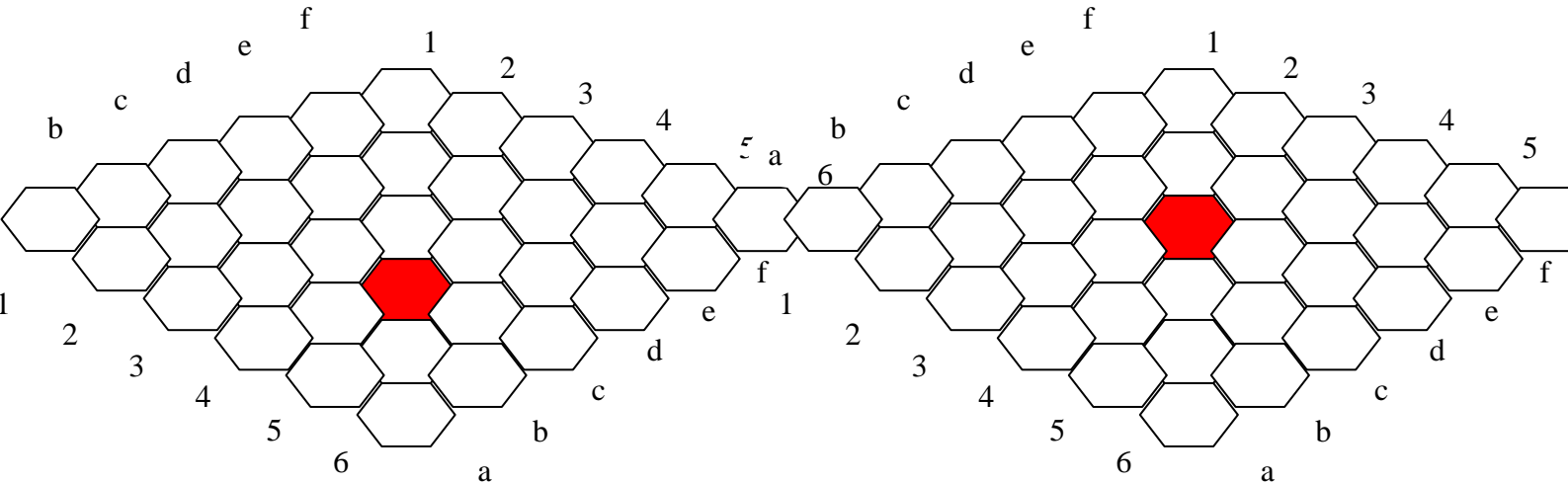
<p>1. 獲勝走的步驟:(走 8 步贏) 方向: 往 abc/123 (先走的是: R/U;贏的是: R/U):</p> <p>1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 <u>r1</u></p> <p>2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好, 如 <u>u2~u16</u>)</p> <p>3. 適時使用造橋能增加獲勝機會, 如 <u>r7 r9 u6 u8 u2 u12</u></p> <p>4. 佔住對方的出口獲勝法, 如 <u>u10 u16</u></p> <p>5. 走最短路徑來連線, 如 _____</p> <p>6. 使用”造橋”法, 如 <u>r7 r9 u6 u8 u2 u12</u></p> <p>發現:1. 藍方獲勝規則策略二使用最多</p> <p>2. 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分</p>
--

### (三)、6X6 棋盤

#### a. 使用”截斷對方連線”和”阻斷對方出入口”法

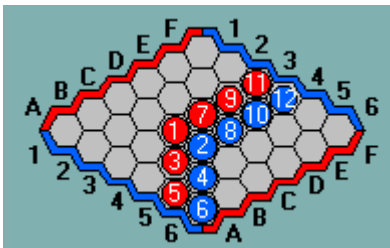
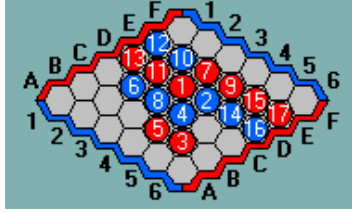
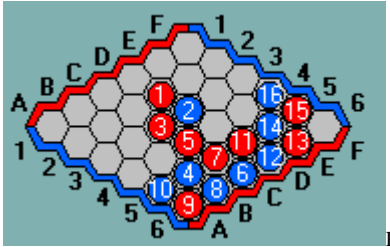
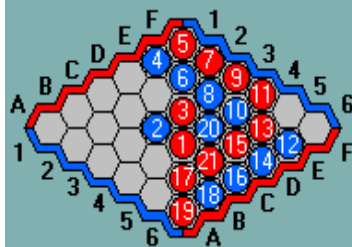
一開始不是下最佳通道位置

一開始下最佳通道位置(d3, c4) (用紅色表示)



為什麼 d3, c4 是最佳通道呢，因為下 d3 可以些連接上方的出(入)口，而下 c4 則可以些連接下方的出(入)口，所以這兩個都是最佳的通道。

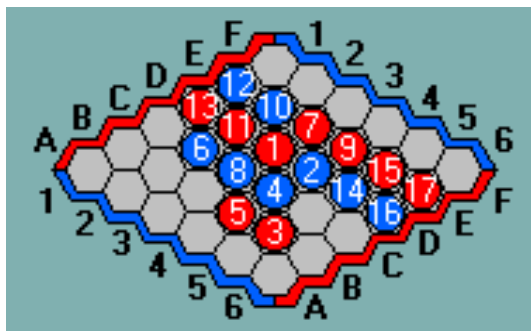
實際對下例子:(左邊欄邊是紅方下輸的棋盤記錄，右邊欄是紅方下贏的棋盤紀錄)

<p>7. Blue 贏(Red 無法救)Red 通常會輸</p>  <p>Red 一開始下 c3(由乙分析)</p>	<p>8. Red 沒下錯子的話會贏</p>  <p>Red 一開始下 d3(由丙分析)</p>
 <p>Red 一開始下 d2(由乙分析)</p>	 <p>Red 一開始下 d3(由丙分析)</p>

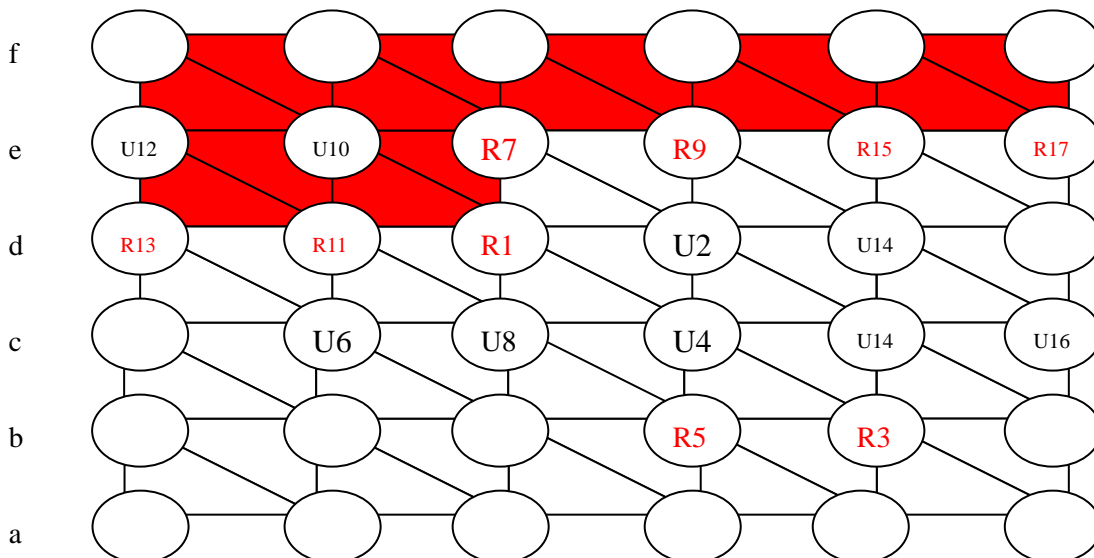
(註:更多的棋盤紀錄與分析請見實驗記錄)

實際對下例子的分析如下:

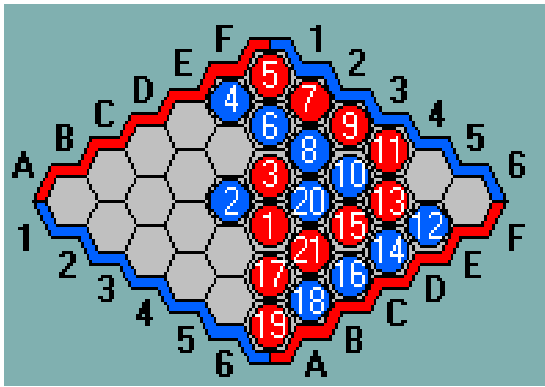
<p>6X6，先攻者:Red/Blue 方向: 往 <u>abc/123</u></p>	<p>6X6，棋盤變成垂直座標討論</p>	<p>紀錄者: 甲、乙、<u>丙</u>、丁、戊(用代號表同學名稱)</p>
--	-----------------------	--



<p>6. 獲勝走的步驟:(走 9 步贏) 方向: 往 <u>abc/123</u> (先走的是: <u>R/U</u>;贏的是: <u>R/U</u>):</p>
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的，如 <u>r1</u></li> <li>2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好，如 <u>r1~r17</u>)</li> <li>3. 適時使用造橋能增加獲勝機會，如 <u>r7 r11 u2 u8</u></li> </ol>
<p>發現: 1. 獲勝棋盤大都是由 d3 開始下的 2. 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分</p>



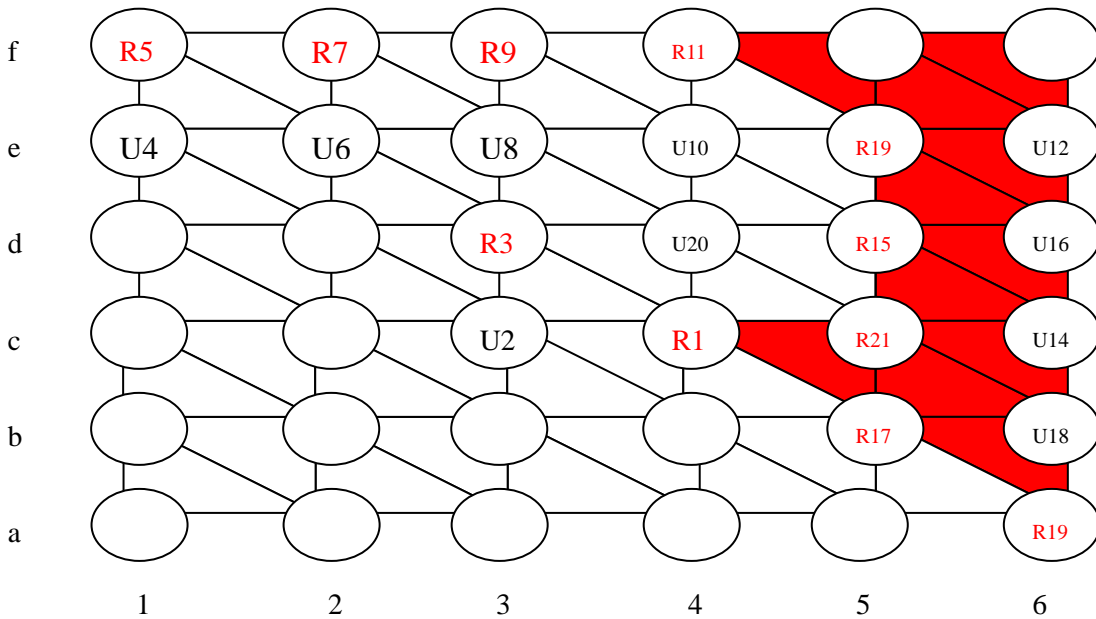




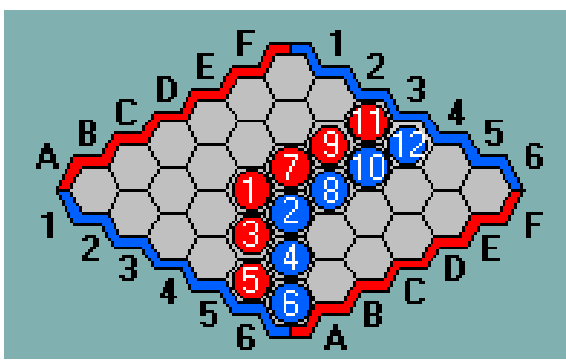
5. 獲勝走的步驟:(走 11 步贏) 方向: 往 abc/123 (先走的是: R/U;贏的是: R/U):

1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 r1
2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好, 如 r1~r21 u2~u20)
3. 適時使用造橋能增加獲勝機會, 如 r1 r15 r7 r3 r5 r19 r1 u2 u20
4. 佔住對方的出口獲勝法, 如 r5~r11 u12~u18
5. 走最短路徑來連線, 如 r5~r11

發現: 1.獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分



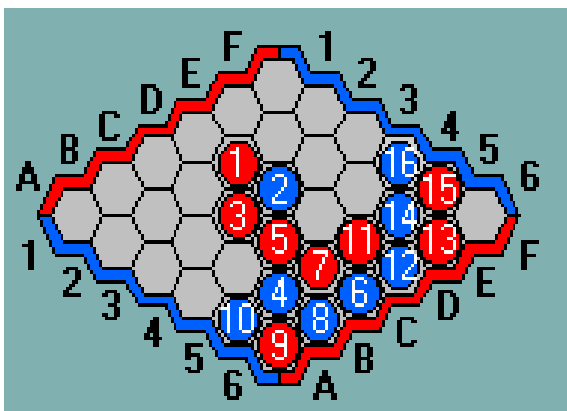
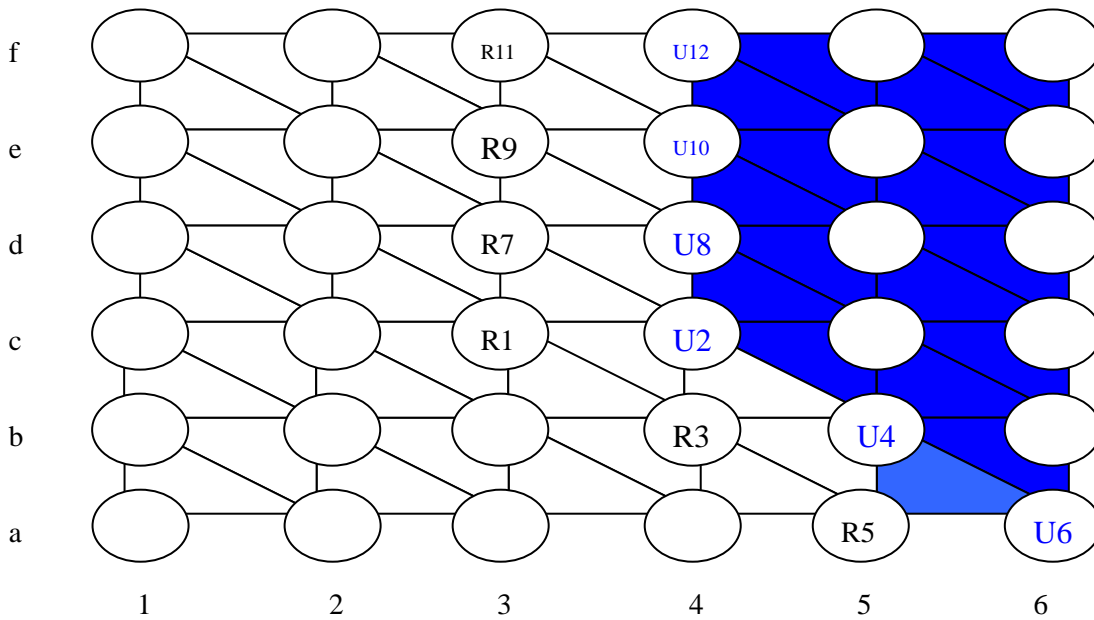
6X6, 先攻者: <u>Red/Blue</u> 方向: 往 <u>abc/123</u>	6X6, 棋盤變成垂直座標討論	紀錄者: <u>甲、乙、丙、丁、戊</u> (用代號表同學名稱)
--	-----------------	----------------------------------



4. 獲勝走的步驟:(走 6 步贏) 方向: 往 abc/123 (先走的是: R/U;贏的是: R/U):

1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 r1 u2
2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好, 如 u2~u12)

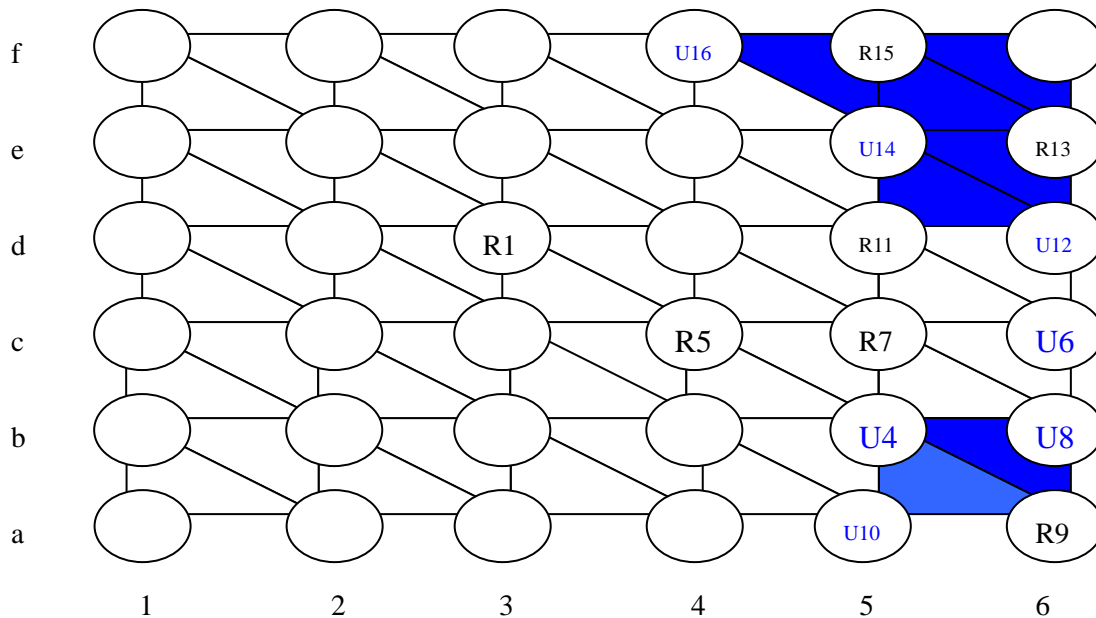
發現: 1.獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分  
2.獲勝一方最常使用的策略是獲勝策略二



3. 獲勝走的步驟:(走 8 步贏) 方向: 往 abc/123 (先走的是: R/U;贏的是: R/U):

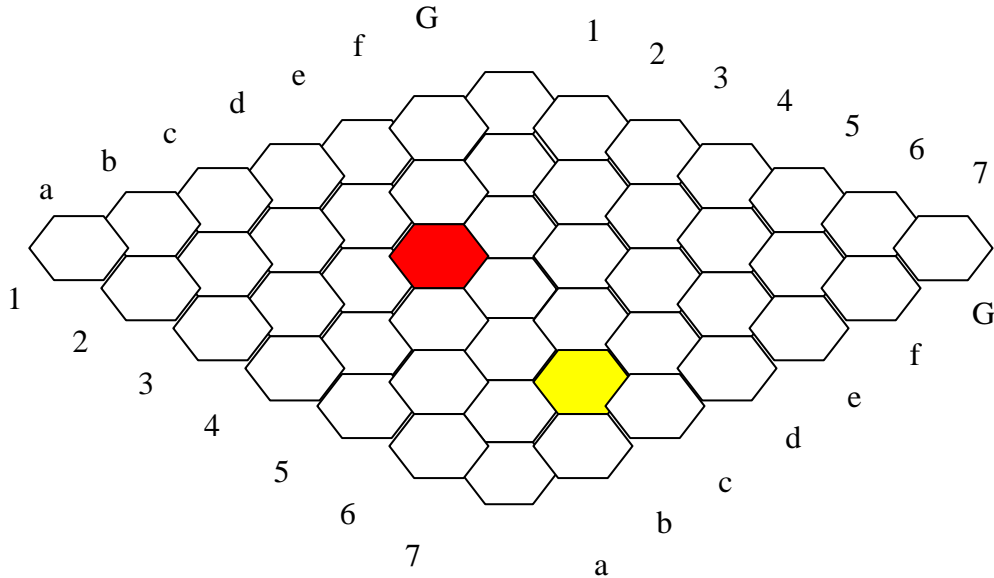
1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 r1 u2
2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好, 如 r3~r7 u4~u16)
3. 適時使用造橋能增加獲勝機會, 如 u4 u6 r11 r13
4. 佔住對方的出口獲勝法, 如 r9

發現: 1. 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分  
2. 獲勝一方最常使用的策略是獲勝策略二



(四)、7X7 棋盤(使用”雙造橋”、截斷對方連接路線及連接自己出入口)

一開始不是下最佳通道位置	一開始下最佳通道位置(d3) (用紅色表示) 連接出口的次佳通道位置(c6) (用黃色表示)
--------------	---



為什麼 d3 是最佳通道呢，因為 d3 連接通道數多且又接近上方對外出口，之後還有機會讓我方有雙造橋的機會；至於為什麼 c6 是次佳通道位置呢，因為 c6 可以連接對外出口，所以先佔此位置蠻容易獲勝的。

實際對下例子：(左邊欄是紅方下輸的棋盤記錄，右邊欄是紅方下贏的棋盤紀錄)

<p>1. Blue 贏(Red 無法救)Red 通常會輸輸</p> <p>Red 一開始下 d4(由甲分析)</p>	<p>2. Red 沒下錯子的話會贏</p> <p>Red 一開始下 d3(由乙分析)</p>
<p>Red 一開始下 c1(由甲分析)</p>	<p>Red 一開始下 d3(由乙分析)</p>

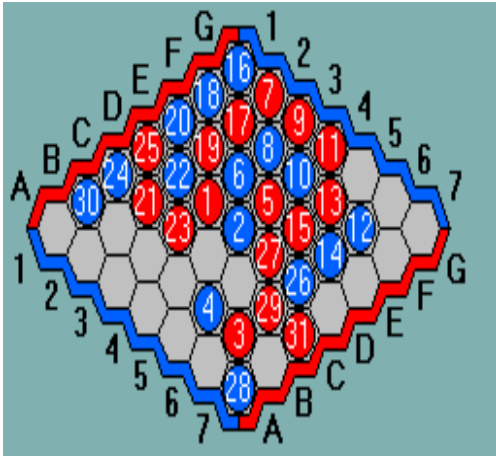
(註:更多的棋盤紀錄與分析請見實驗記錄)

實際對下例子的分析如下:

7X7, 先攻者: Red/Blue 方向: 往 abc/123

7X7, 棋盤變成垂直座標討論

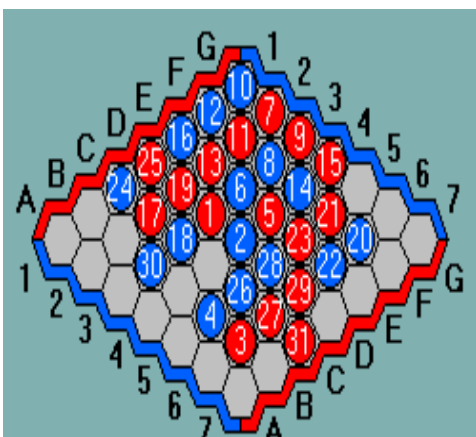
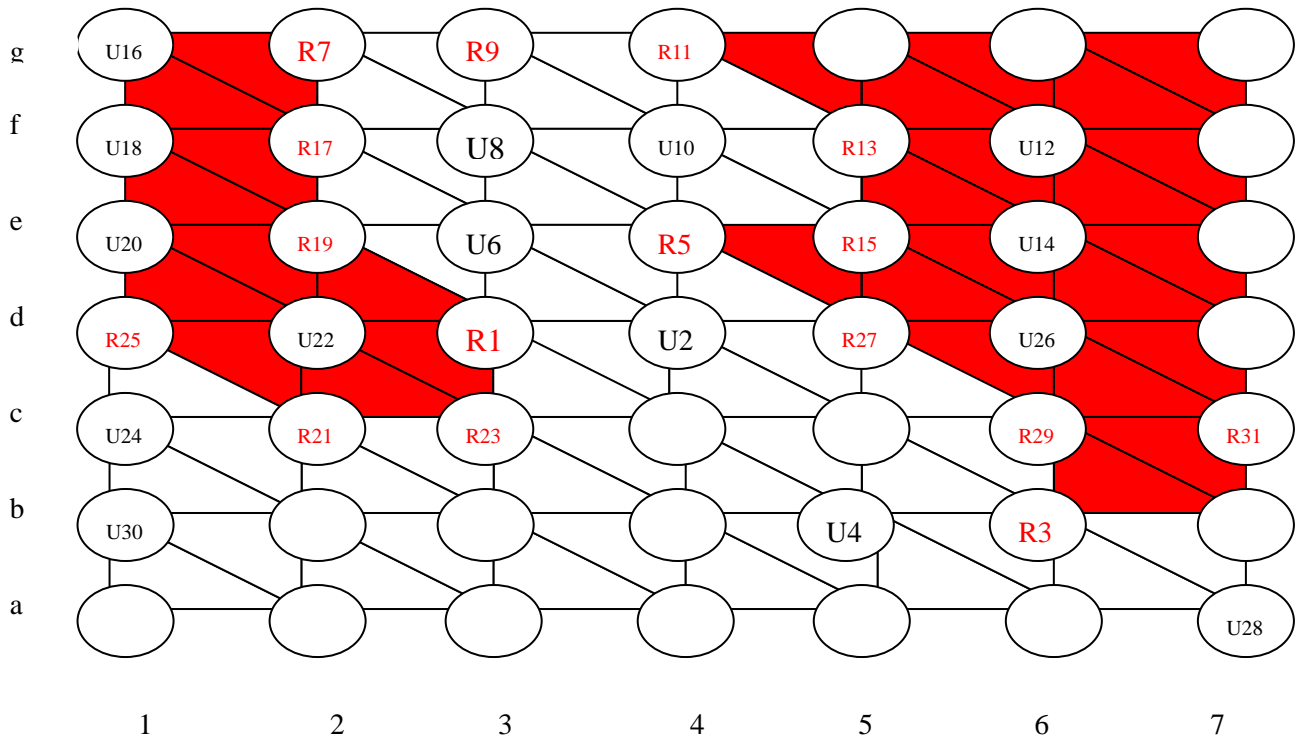
紀錄者: 甲、乙、丙、丁、戊(用代號表同學名稱)



2. 獲勝走的步驟:(走 16 步贏) 方向: 往 abc/123 (先走的是: R/U;贏的是: R/U):

1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 r1 u2
2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好), 如 r1~r31
3. 適時使用造橋能增加獲勝機會, 如 r1 r5 r21 u6 u22 u6 u10 u22 u24 r3
- r31
4. 佔住對方的出口獲勝法, 如 u16~u24 r7~r11

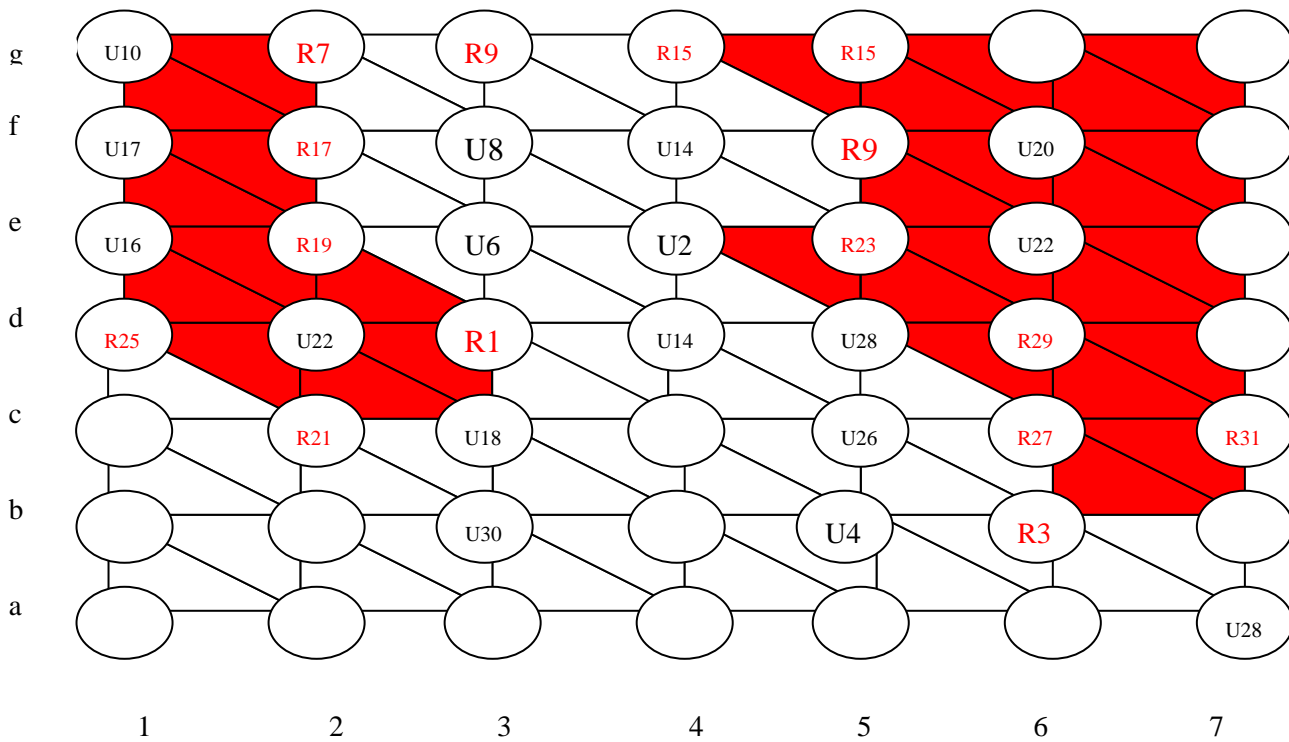
發現: 1. 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分  
2. 最少七步可獲勝, 但被對方擋住的話, 連接的通道數目會變多, 意指就只能繞遠路到終點(獲勝)



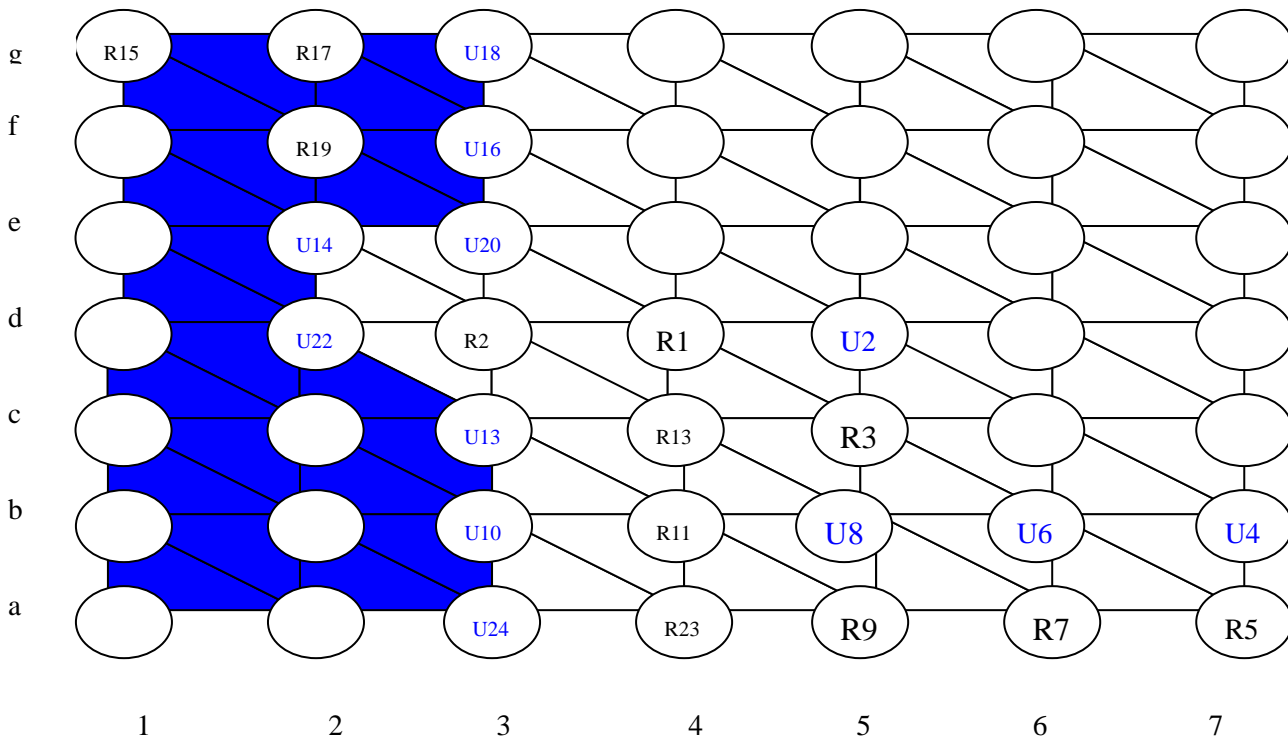
1. 獲勝走的步驟:(走 16 步贏) 方向: 往 abc/123 (先走的是: R/U;贏的是: R/U):

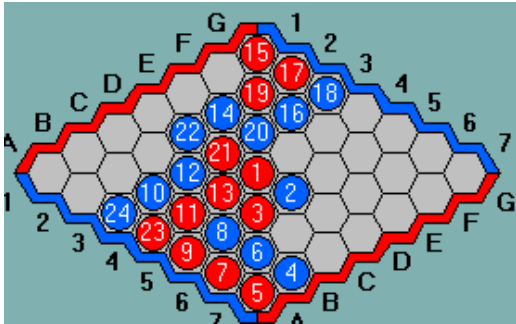
1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 r1 u2
2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好), 如 r7~r25 u8 u10~u16
3. 適時使用造橋能增加獲勝機會, 如 r1 r5 r17 u24 u30 u2 u18 u8
4. 佔住對方的出口獲勝法, 如 r10~r16
6. 使用”造橋”法, 如 r1 r5 r17 r21 u24 u30 u2 u18 u8

發現: 1. 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分  
2. 最少七步可獲勝, 但被對方擋住的話, 連接的通道數目會變多, 意指就只能繞遠路到終點(獲勝)



7X7, 先攻者: <u>Red</u> /Blue 方向: 往 <u>abc/123</u>	7X7, 棋盤變成垂直座標討論	紀錄者: <u>甲</u> 、乙、丙、丁、戊(用代號表同學名稱)
---	-----------------	----------------------------------



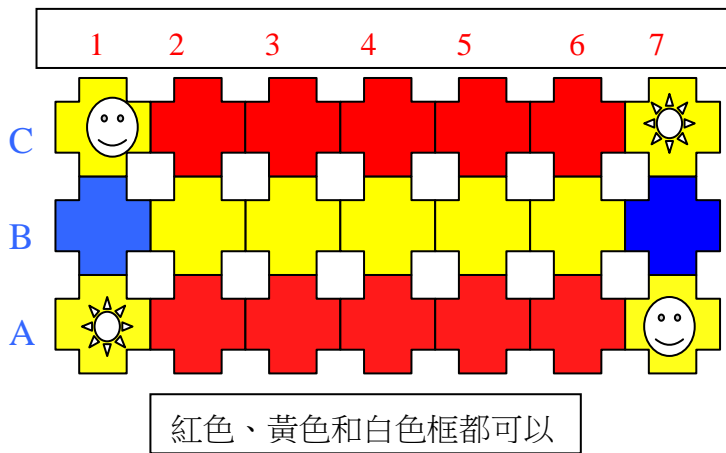


7. 獲勝走的步驟:(走 12 步贏) 方向: 往 abc/123 (先走的是: R/U;贏的是: R/U):
1. 先佔住棋盤中每個格子通道數目最多的, 如 r1 u2
  2. 連接自己走的路線(若能擋住對方更好), 如 r1~r11 r15~r19 u12~u24 u4~u8
  3. 適時使用造橋能增加獲勝機會, 如 u14 u12
  4. 佔住對方的出口獲勝法, 如 r5~r9 r23 u15 u17
- 發現: 1. 獲勝的棋盤都會把垂直座標棋盤分成兩部分  
 2. 最少七步可獲勝, 但被對方擋住的話, 連接的通道數目會變多, 意指就只能繞遠路到終點(獲勝)



## 陸、用 hex 的數學原理創作的遊戲

使用垂直座標棋盤來分析的好處是讓我們了解棋盤中每個位置的連接通道是什麼, 後來我們將每個人自行創作的棋盤重新畫成垂直座標棋盤來分析棋盤中每個位置連接的狀況, 獲得驚人的成果。竟然有人創造出和 hex 原版遊戲相同連接情形的自創版連接遊戲, 請看我們的說明。


### (一) 遊戲一(太陽-笑臉的連接遊戲)




太陽-笑臉的遊戲規則

棋盤中有 2 個同樣標誌的符號如  和  和

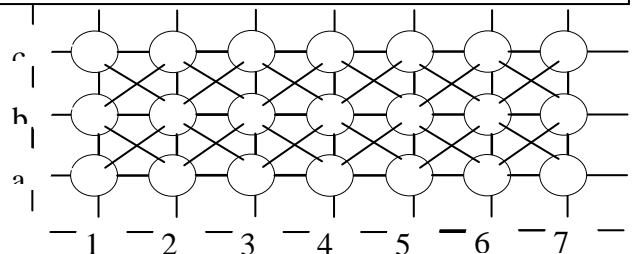
玩家任選一個符號表示自己並下在棋盤上先將同符號的連接在一起即獲勝。

 :SUN 可用 U 來表示

 :SMILE 可用 S 來表示

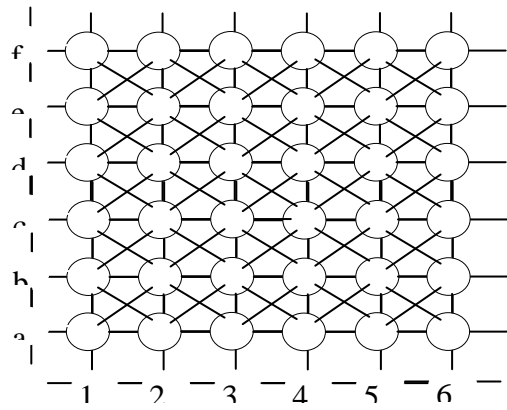
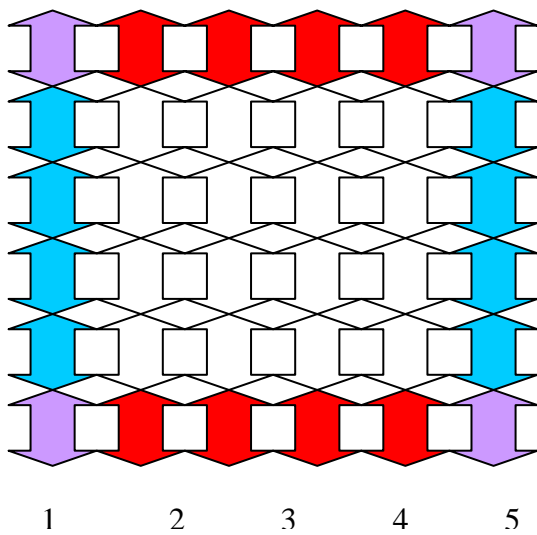
這是由同學丙所創作的連接圖形遊戲, 這個遊戲使用垂直座標棋盤重新繪製圖形如右,

由垂直座標圖形可知, a1 可連接的通道有 a2, b1 和 b2, 這個垂直連接的圖形恰好和同學甲所創作的圖形連接遊戲”飛箭渡河”遊戲的連接情形一樣, 這讓我們興奮不已, 因為不同形狀的圖形, 竟然有共通的連接通道, 那有可能這兩個遊戲的難度差不多囉! 這樣的研究, 讓我們信心大增, 我們繼續創作更多的圖形連接遊戲, 轉成垂直座標棋盤來分析, 並試玩圖形以了解垂直座標棋盤所顯示的圖形連接結構相同, 是否獲勝策略會相同。



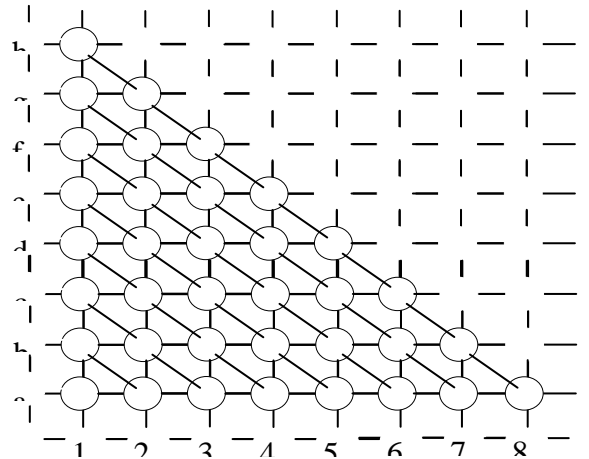
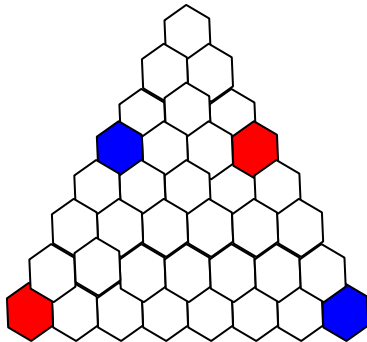
### (二) 遊戲二(飛箭渡河的圖形連接遊戲)





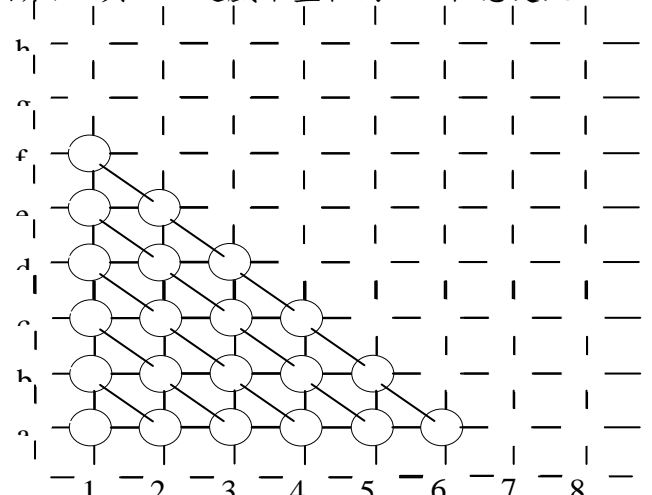
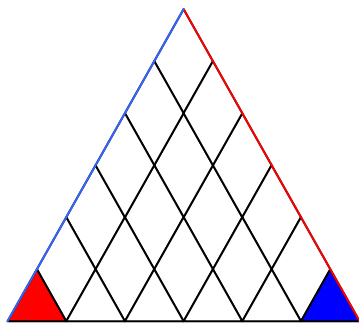
### (三) 遊戲三(六魔王的圖形連接遊戲)

有了同學甲和丙的自創遊戲的分享，激發了參與研究的我們都不禁躍躍欲試想一嘗自創遊戲的渴望，同學丙再模仿 hex 遊戲基本圖形(六角形)，再創一個圖形連接的遊戲，並將之命名為”六魔王”的圖形連接遊戲，很可惜，這個六魔王遊戲，雖然使用到與 hex 遊戲相同的六角形，但轉畫成垂直座標棋盤之後，發現與 hex 遊戲圖形連接結構並不同，整個垂直座標棋盤外觀呈現三角形，且實際對下結果容易有平手的情形出現，與這次討論的 hex 遊戲有明顯的不同，所以不能歸類為與 hex 相同連接情形的遊戲。

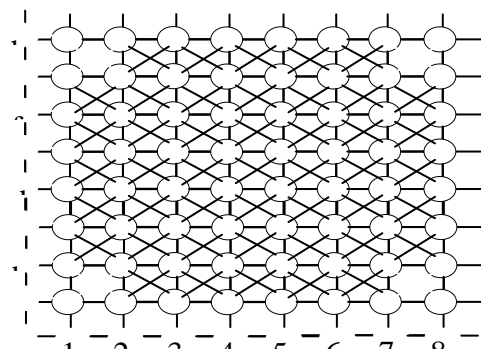
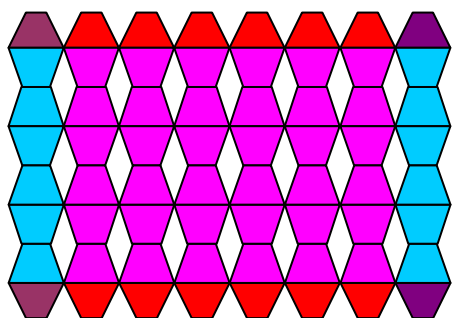


### (四) 遊戲四(三角為王的圖形連接遊戲)

接著，同學丙利用基本圖形三角形的連接，自創了一個名為”三角為王”的圖形連接遊戲，這個圖形中使用的基本圖形”三角形”雖然與”六魔王”圖形連接遊戲中的基本圖形”六角形”形狀不同，出乎意料的，”三角為王”和”六魔王”這兩個圖形轉畫成垂直座標棋盤之後，圖形連接的結構竟然相同，顯示這兩個遊戲可能是屬於同難度的遊戲，試玩的結果，顯示這兩個遊戲玩法一致，策略類似，甚至出現相同的玩成平手情形，從垂直座標棋盤的連接圖形顯示，與 hex 遊戲不盡相同，且相意處大於相同處。




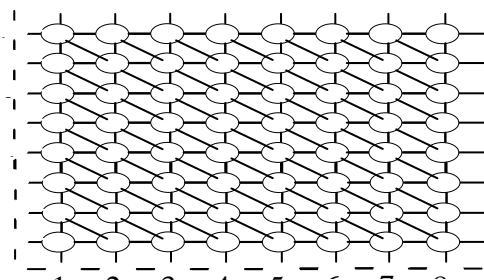
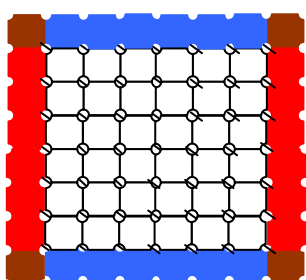
### (五) 遊戲五(薇薇彩帶的圖形連接遊戲)



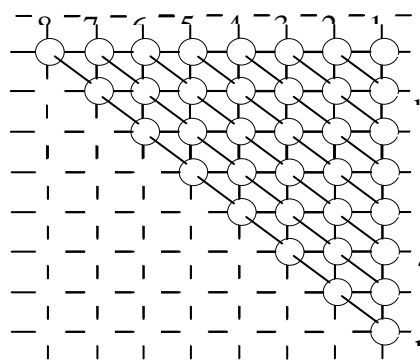
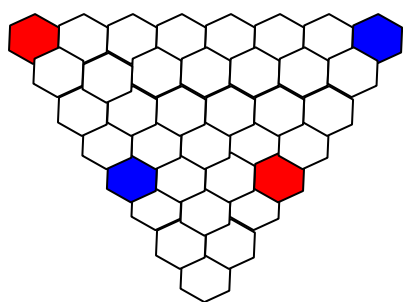
薇薇彩帶的圖形連接遊戲是由同學乙所自創的圖形連接類遊戲，上右圖為薇薇彩帶遊戲轉畫成垂直座標棋盤之後的圖形連接通道情形，由垂直座標棋盤的分析顯示，薇薇彩帶圖形連接類遊戲與”太陽-笑臉”遊戲和”飛箭渡河”遊戲類似，不同的圖形有相同的圖形連接結構，獲勝策略也可以在相同連接圖形中使用，所以我們可以自豪的說叫我是”hex 遊戲王，叫我第一名!”

### (六) 遊戲六(家家樂的圖形連接遊戲)

在自創遊戲的過程中，同學戊自創了”家家樂”圖形連接遊戲，這個遊戲中  表示連接通道的方向為”左上通右下”或是”右下通左上”，但是不能連接”左下通右上”或是”右上通左下”的通道，經過垂直座標棋盤分析之後，竟然此棋盤與 hex 連接類遊戲的圖形連結結構相同，於是我們進行一系列這個”家家樂”遊戲的探討，



### (七) 遊戲七(鑽石達令的圖形連接遊戲)



鑽石達令這個圖形連接遊戲是經過後面基本圖形分析之後，我們與老師腦力激盪所產生的遊戲，棋盤本身與六魔王很像，將六魔王的棋盤翻轉之後就是鑽石達令的棋盤，因為鑽石達令的棋盤外觀很像一顆鑽石，所以我們將之命名之。

## 柒、討論：

我們大家創作完自己的棋盤之後，接著根據分析 hex 棋盤的方式，將自創的連接遊戲棋盤重新繪製成垂直座標的棋盤，垂直座標棋盤的圓圈表示在遊戲棋盤中的位置，而垂直座標棋盤中的直線就表示位置之間是否有通道連接，發現根據垂直座標棋盤的分析顯示自創棋盤外觀也許和 hex 遊戲不同，如遊戲六”家家樂”圖形連接遊戲，但垂直座標棋盤卻與 hex 棋盤一樣，顯示兩者難度跟下法應該是相同的，實際試玩的心得也顯示如此。後來我們更分析垂直座標棋盤中基本圖形、基本圖形的連接(擴展成  $n \times n$  棋盤)、圓圈數和連接線的數目，分析圓圈數和連接線的數目讓我們能清楚了解連接圖形遊戲棋盤中蘊藏的數字奧秘—神秘的數列，因為破解了連接圖形遊戲棋盤中蘊藏的數字奧秘，所以我們自豪地稱為 hex 遊戲王~叫我第一名。

表一和基本圖形為三角形的垂直座標圖形分析，基本圖形為三角形擴展之後成為各式  $3 \times 3$ 、 $4 \times 4$ 、 $5 \times 5$ 、 $6 \times 6$ 、 $7 \times 7$  等各層的棋盤，其中飛箭渡河的遊戲，一開始遊戲規則設定為不能對角連接(即  $a_2$  連至  $b_1$  或是  $b_2$  連至  $a_1$ )，這個未改良前的遊戲規則是玩結果發現有時任何一方都被對方擋住，而形成和局的局面，經過老師建議，更改遊戲規則為可以對角連接(此為飛箭渡河更改後的版本)，飛箭渡河圖形連接遊戲更改後的版本，可形成四邊形的垂直座標圖形，根據垂直座標圖形新結果顯示，此遊戲玩法和難度跟”太陽-笑臉”圖形連接及”薇薇彩帶”圖形連接遊戲相似，都屬於垂直座標圖形為四邊形的圖形連接遊戲。

表四是基本圖形為四邊形所擴展各層棋盤的垂直座標之分析，在表四中，有兩個日常生活中常玩的遊戲，那就是傳聲筒(或傳紙條)遊戲和  $\bigcirc \times$  的遊戲，經過轉畫成垂直座標棋盤之後，發現也是屬於圖形連接的遊戲。一般傳聲筒(或傳紙條)遊戲的遊戲是全班分組競賽，由前往後傳或是由後往前傳，若是各組中又有單雙號(或是男女生)，則又可以變成一組中橫的傳(單號傳給雙號或是男生傳給女生)，所以這是屬於基本圖形為四邊形的圖形連接遊戲，而一般玩的  $\bigcirc \times$  的遊戲可以直的和橫的連成一條直線，則是屬於基本圖形為四邊形第三類的圖形連接遊戲。

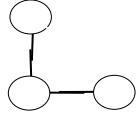
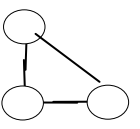
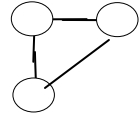
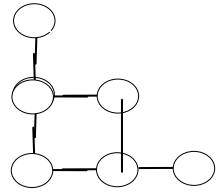
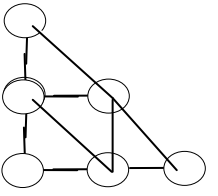
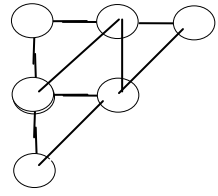
表一及四中我們又想到對基本圖形每邊每次增加一個圓圈(指遊戲棋盤中位置)的方式來計算各  $3 \times 3$ 、 $4 \times 4$ 、 $5 \times 5$ 、 $6 \times 6$ 、 $7 \times 7$  遊戲棋盤中位置數及連接通道數目，表一及四中各類別的圓圈數目及連接通道數目形成一個有趣的數字數列公式推導，老師讓我們以個人競賽及討論觀摩的方式推導，表一公式推導過程列在表二及三，表四公式推導過程列在表五至七，

在”三角為王”遊戲中的連接線數=座標邊數 $\times$ (座標邊數-1)+  $\{1+2+3+4+5\dots+(\text{座標邊數}-1)\}$  的公式是首先較難理解的關卡，我們利用一個個數字一層層的計算之後 便得出  $\{1+2+3+4+5\dots+(\text{座標邊數}-1)\}=(1+(\text{座標邊數}-1))\times(\text{座標邊數}-1)\div 2$  的公式，後來又碰到在計算 Hex 圖形遊戲中連接線數  $=2 \times \text{座標邊數} \times (\text{座標邊數}-1) + \{1+3+5+7+9\dots + [2 \times (\text{座標邊數}-1)-1]\}$  公式的關卡，以前所習以為常的一個一個累加或是奇數數字的和竟然可以變成數列並寫成算式，真令我們感到驚奇。

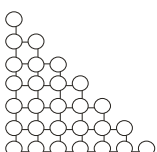
尤其最令人興奮的是自創遊戲中，找到與 hex 連接遊戲棋盤同樣基本圖形構成的垂直座標棋盤，根據垂直作邊棋盤分析顯示這兩種棋盤雖然外觀看起來不同，但基本圖形都是四邊形第二類所組成的，因此我們多印製了  $3 \times 3$ 、 $4 \times 4$ 、 $5 \times 5$ 、 $6 \times 6$ 、 $7 \times 7$  棋盤，以方便兩者遊戲異同之案計。

最後，我們根據各層垂直座標棋盤中圓圈數及連接通道數數目來導出不同基本圖形的各層垂直座標的圓圈數及連接通道數目。請見表一至表七的說明。

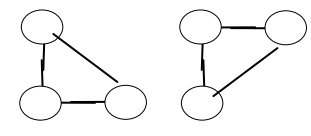
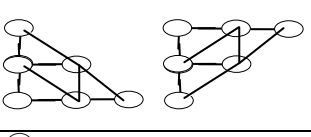
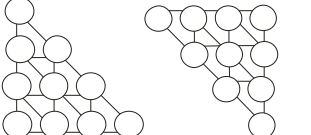
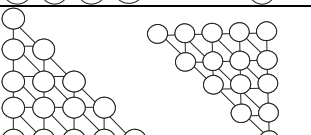
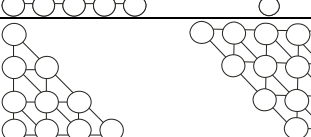
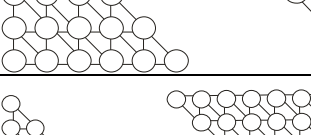
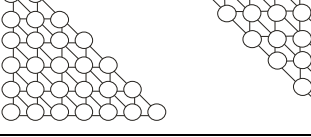
表一 垂直座標圖形的分析(圓圈表示原遊戲圖形位置的垂直座標,連線表示有座標間有通道連接)

自創遊戲名稱	飛箭渡河(未改良前版本)	三角為王圖形連接 六魔王圖形連接	鑽石達令圖形連接
類別	三角形第一類	三角形第二類	三角形第二類
基本圖形為三角形			
圓圈數	3	3	3
連接線數	3	3	3
基本圖形連接(擴展成3X3棋盤)			
3X3 棋盤圓圈數	6	6	6,
3X3 棋盤連接線數	6	9	9
和局與否	是	否	否
最後連接情形	飛箭渡河(未改良前版本) 有時無法連接	三角為王有時無法連接 六魔王有時無法連接	有時無法連接
圓圈數計算公式	圓圈數=(垂直座標"頭"個數+垂直座標"尾"個數)×座標邊數÷2	圓圈數=(垂直座標"頭"個數+垂直座標"尾"個數)×座標邊數÷2	圓圈數=(垂直座標"頭"個數+垂直座標"尾"個數)×座標邊數÷2
連接線數計算公式	同學甲的推導: 連接線數=座標邊數×(座標邊數-1) 同學丁的推導: 座標邊數×座標邊數-座標邊數	同學甲、乙的推導: 連接線數=座標邊數×(座標邊數-1)+{1+2+3+4+5...+(座標邊數-1)} 或是連接通道數目=(座標邊數+1)×座標邊數÷2+(座標邊數-2)×座標邊數 同學甲、戊的推導: 或是連接通道數目=3×(1+2+3+4+...+(座標邊數-1))	與左欄公式相同: 連接線數=座標邊數×(座標邊數-1)+{1+2+3+4+5+...+(座標邊數-1)} 同學丙的推導: 或是連接通道數目=(座標邊數+1)×座標邊數÷2+(座標邊數-2)×座標邊數

表二 三角形第一類中基本圖形(三角形)所擴展各層棋盤的垂直座標中之圓圈數及連接通道數目分析

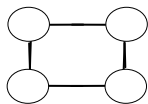
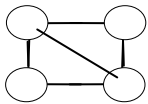
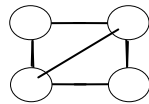
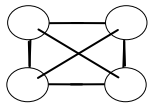
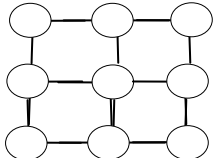
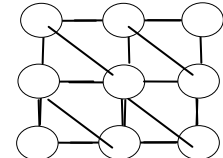
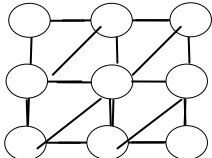
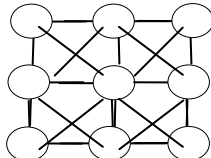
棋盤層數	基本圖形及各層棋盤的垂直座標圖	圓圈數目	連接通道數目	圓圈數目及連接通道數目公式推導
基本圖形		3	2	圓圈數目=2+1 連接通道數目= $2 \times 1$ 或是 連接通道數目=2×1
3×3		6	6	圓圈數目=3+2+1 連接通道數目= $2 \times 3$ 或是 連接通道數目=3×2
4×4		10	12	圓圈數目=4+3+2+1 連接通道數目= $2 \times 6$ 或是 連接通道數目=4×3
5×5		15	20	圓圈數目=5+4+3+2+1 連接通道數目= $2 \times 10$ 或是 連接通道數目=5×4
6×6		21	30	圓圈數目=6+5+4+3+2+1 連接通道數目= $2 \times 15$ 或是 連接通道數目=6×5
7×7		28	42	圓圈數目=7+6+5+4+3+2+1 連接通道數目= $2 \times 21$ 或是 連接通道數目=7×6
8×8		36	56	圓圈數目=8+7+6+5+4+3+2+1 連接通道數目= $2 \times 28$ 或是 連接通道數目=8×7
9×9	未畫出，請在心中想像並準備推導公式	45	72	圓圈數目=9+8+7+6+5+4+3+2+1 連接通道數目= $2 \times 36$ 或是 連接通道數目=9×8
nxn	n 表示第幾層棋盤(也是座標邊數)	$(n+1) \times n \div 2$	$2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots + (n-1))$	圓圈數目= $n + \dots + 3 + 2 + 1 = (n+1) \times n \div 2$ 連接通道數目= $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots + (n-1))$ 或是 連接通道數目= $n \times (n-1)$

表三 三角形第二類中基本圖形(三角形)所擴展各層棋盤的垂直座標中之圓圈數及連接通道數目分析

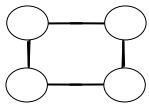
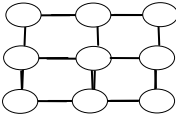
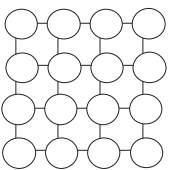
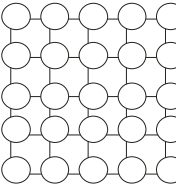
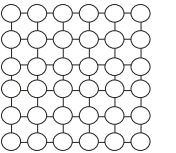
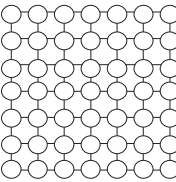
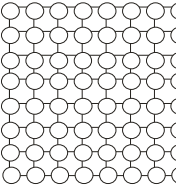
棋盤層數	基本圖形及各層棋盤的垂直座標圖	圓圈數目	連接通道數目	圓圈數目及連接通道數目公式推導
基本圖形		3	$3=2+1$ (比對三角形第一類中基本圖形的相同層數)	圓圈數目= $2+1$ 連接通道數目= $2 \times 1+1$ 或是連接通道數目= $2 \times 1+1$
3x3		6	$9=6+3$ (比對三角形第一類中基本圖形的相同層數)	圓圈數目= $3+2+1$ 連接通道數目= $2 \times 3+3$ 或是連接通道數目= $3 \times 2+3$
4x4		10	$18=12+6$ (比對三角形第一類中基本圖形的相同層數)	圓圈數目= $4+3+2+1$ 連接通道數目= $2 \times 6+6$ 或是連接通道數目= $4 \times 3+6$
5x5		15	$30=20+10$ (比對三角形第一類中基本圖形的相同層數)	圓圈數目= $5+4+3+2+1$ 連接通道數目= $2 \times 10+10$ 或是連接通道數目= $5 \times 4+10$
6x6		21	$45=30+15$ (比對三角形第一類中基本圖形的相同層數)	圓圈數目= $6+5+4+3+2+1$ 連接通道數目= $2 \times 15+15$ 或是連接通道數目= $6 \times 5+15$
7x7		28	$63=42+21$ (比對三角形第一類中基本圖形的相同層數)	圓圈數目= $3+2+1$ 連接通道數目= $2 \times 21+21$ 或是連接通道數目= $7 \times 6+21$
8x8		36	$84=56+28$ (比對三角形第一類中基本圖形的相同層數)	圓圈數目= $3+2+1$ 連接通道數目= $2 \times 28+28$ 或是連接通道數目= $8 \times 7+28$
9x9	未畫出，請在心中想像並準備推導公式	45	$108=72+36$ (比對三角形第一類中基本圖形的相同層數)	圓圈數目= $3+2+1$ 連接通道數目= $2 \times 36+36$ 或是連接通道數目= $9 \times 8+36$
$n \times n$	$n$ 表示第幾層棋盤(在此也是座標邊數)	$(n+1)$ $n \div 2$	連接通道數目= $n \times$ $(n-1)+$ $(1+2+3+4+5 \dots +(n-1))$	圓圈數目= $n+\dots+3+2+1$ $= (n+1) \times n \div 2$ 連接通道數目= $= 3 \times$ $(1+2+3+4+5 \dots +(n-1))$ 或是連接通道數目= $(n+1) \times n \div 2 + (n-2) \times n$



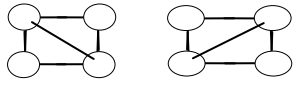
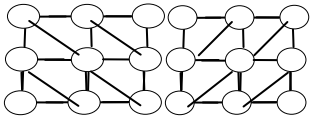
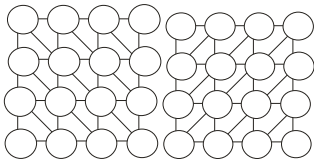
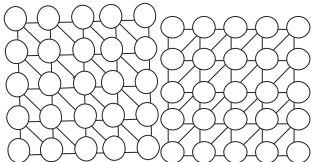
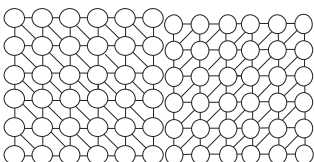
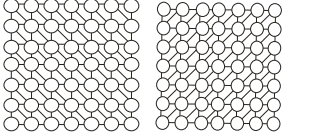
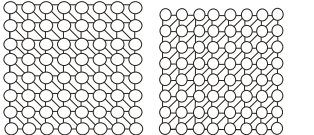
表四 基本圖形(四邊形)所擴展各層棋盤的垂直座標中之圓圈數及連接通道數目分析

自創遊戲名稱	傳聲筒或傳紙條遊戲(直的傳或橫的傳)	家家樂圖形連接 Hex 圖形連接遊戲		太陽-笑臉圖形連接 飛箭渡河圖形連接(改良版) 薇薇彩帶圖形連接 ○x的遊戲
類別	四邊形第一類	四邊形第二類	四邊形第二類	四邊形第三類
基本圖形為四邊形				
圓圈數	4	4	4	4
連接線數	4	5	5	6
基本圖形連接(擴展成 3X3 棋盤)				
3X3 棋盤圓圈數	9	9,	9	9,
3X3 棋盤連接線數	12	16	16,	20
和局與否	是	否	?	是
最後連接情形	是	是	?	是
圓圈數計算公式	圓圈數=座標邊數×座標邊數	圓圈數=座標邊數×座標邊數	圓圈數=座標邊數×座標邊數	圓圈數=座標邊數×座標邊數
連接線數計算公式	同學甲的推導: 連接線數=座標邊數×(座標邊數-1) + (1 +2 +3 +4+...+(座標邊數-1))×2 同學丙的推導: 座標邊數×(座標邊數-1)×2	同學乙推導: 連接線數=2×座標邊數×(座標邊數-1) + {1+3+5+7+9...+ [2×(座標邊數-1)-1]}	同學乙推導: 連接線數=2×座標邊數×(座標邊數-1) + {1+3+5+7+9...+ [2×(座標邊數-1)-1]}	同學甲推導: 連接線數=2×座標邊數×(座標邊數-1) + {1+3+5+7+9...+ [2×(座標邊數-1)-1]}+(座標邊數-1)×(座標邊數-1)

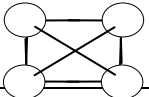
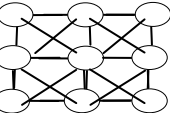
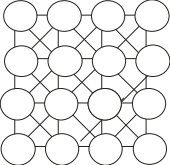
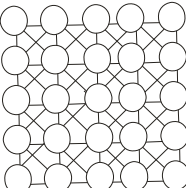
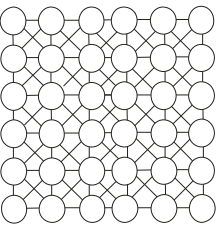
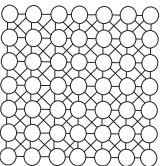
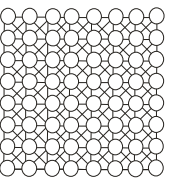
表五 四邊形第一類中基本圖形(四邊形)所擴展各層棋盤的垂直座標中之圓圈數及連接通道數目分析

棋盤層數	基本圖形及各層棋盤的垂直座標圖	圓圈數目	連接通道數目	圓圈數目及連接通道數目公式推導
基本圖形		4	4	圓圈數目= $2 \times 2$ 連接通道數目= $2 \times 1 + 2$ 或是連接通道數目= $2 \times 1 + 1 \times 2$
3x3		9	12	圓圈數目= $3 \times 3$ 連接通道數目= $3 \times 2 + 6$ 或是連接通道數目= $3 \times 2 + 3 \times 2$
4x4		16	24	圓圈數目= $4 \times 4$ 連接通道數目= $4 \times 3 + 12$ 或是連接通道數目= $4 \times 3 + 6 \times 2$
5x5		25	40	圓圈數目= $5 \times 5$ 連接通道數目= $5 \times 4 + 20$ 或是連接通道數目= $5 \times 4 + 10 \times 2$
6x6		36	60	圓圈數目= $6 \times 6$ 連接通道數目= $6 \times 5 + 30$ 或是連接通道數目= $6 \times 5 + 15 \times 2$
7x7		49	84	圓圈數目= $7 \times 7$ 連接通道數目= $7 \times 6 + 42$ 或是連接通道數目= $7 \times 6 + 21 \times 2$
8x8		64	112	圓圈數目= $8 \times 8$ 是連接通道數目= $8 \times 7 + 56$ 或是連接通道數目= $8 \times 7 + 28 \times 2$
9x9	未畫出，請在心中想像並準備推導公式	81	144	圓圈數目= $9 \times 9$ 連接通道數目= $9 \times 8 + 72$ 或是連接通道數目= $9 \times 8 + 36 \times 2$
$n \times n$	$n$ 表示第幾層棋盤(也是座標邊數)	$n \times n$	$2 \times n \times (n-1)$	圓圈數目= $n \times n$ 連接通道數目= $n \times (n-1) + n \times (n-1) = 2 \times n \times (n-1)$ 或是連接通道數目= $n \times (n-1) + (1+2+3+4+\dots+(n-1)) \times 2$

表六 四邊形第二類中基本圖形(四邊形)所擴展各層棋盤的垂直座標中之圓圈數及連接通道數目分析

棋盤層數	基本圖形及各層棋盤的垂直座標圖	圓圈數目	連接通道數目	圓圈數目及連接通道數目公式推導
基本圖形		4	$5=4+1$	圓圈數目= $2 \times 2$ 連接通道數目= $2 \times 1 + 2 + 1 + 1$
3x3		9	$16=12+4$ $=5+11$	圓圈數目= $3 \times 3$ 連接通道數目= $3 \times 2 + 6 + 4$
4x4		16	$33=24+9$ $=16+17$	圓圈數目= $4 \times 4$ 連接通道數目= $4 \times 3 + 12 + 9$
5x5		25	$56=40+16$ $=33+23$	圓圈數目= $5 \times 5$ 連接通道數目= $5 \times 4 + 20 + 16$
6x6		36	$85=60+25$ $=56+29$	圓圈數目= $6 \times 6$ 連接通道數目= $6 \times 5 + 30 + 25$
7x7		49	$120=84+36$ $=85+35$	圓圈數目= $7 \times 7$ 連接通道數目= $7 \times 6 + 42 + 36$
8x8		64	$161=112+49$ $=120+41$	圓圈數目= $8 \times 8$ 是連接通道數目= $8 \times 7 + 56 + 49$
9x9	未畫出，請在心中想像並準備推導公式		$208=144+64$ $=161+47$	圓圈數目= $9 \times 9$ 連接通道數目= $9 \times 8 + 72 + 63$
nxn	n 表示第幾層棋盤(也是座標邊數)	nxn	$2 \times n \times (n-1) + \{1+3+5+7+9 \dots + [2 \times (n-1) - 1]\}$	圓圈數目= $n \times n$ 連接通道數目= $2 \times n \times (n-1) + \{1+3+5+7+9 \dots + [2 \times (n-1) - 1]\}$ 或是連接通道數目=第(n-1)層連接通道數 + $5 + 6 \times (n-2)$

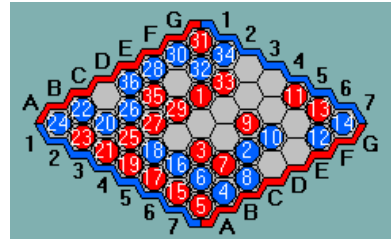
表七 四邊形第三類中基本圖形(四邊形)所擴展各層棋盤的垂直座標中之圓圈數及連接通道數目分析

棋盤層數	基本圖形及各層棋盤的垂直座標圖	圓圈數目	連接通道數目	圓圈數目及連接通道數目公式推導
基本圖形		4	$6=4+1+1$	圓圈數目= $2 \times 2$ 連接通道數目= $2 \times 1 + 2 + 1 + 1$
3x3		9	$20=12+4+4$ $=5+11+4$	圓圈數目= $3 \times 3$ 連接通道數目= $3 \times 2 + 6 + 4 + 4$
4x4		16	$42=24+9+9$ $=16+17+9$	圓圈數目= $4 \times 4$ 連接通道數目= $4 \times 3 + 12 + 9 + 9$
5x5		25	$72=40+16+16$ $=33+23+16$	圓圈數目= $5 \times 5$ 連接通道數目= $5 \times 4 + 20 + 16 + 16$
6x6		36	$110=60+25+25$ $=56+29+25$	圓圈數目= $6 \times 6$ 連接通道數目= $6 \times 5 + 30 + 25 + 25$
7x7		49	$156=84+36+36$ $=85+35+36$	圓圈數目= $7 \times 7$ 連接通道數目= $7 \times 6 + 42 + 36 + 36$
8x8		64	$210=112+49+49$ $=120+41+49$	圓圈數目= $8 \times 8$ 是連接通道數目= $8 \times 7 + 56 + 49 + 49$
9x9	未畫出，請在心中想像並準備推導公式	81	$272=144+64+64$ $=161+47+64$	圓圈數目= $9 \times 9$ 連接通道數目= $9 \times 8 + 72 + 64 + 64$
$n \times n$	$n$ 表示第幾層棋盤 (也是座標邊數)	$n \times n$	$2nx \times (n-1) + \{1 + 3 + 5 + 7 + 9 \dots + [2 \times (n-1) - 1]\} + (n-1) \times (n-1)$	圓圈數目= $n \times n$ 連接通道數目= $2nx \times (n-1) + \{1 + 3 + 5 + 7 + 9 \dots + [2 \times (n-1) - 1]\} + (n-1) \times (n-1)$

## 捌、結論：

我們看到介紹納許棋的資料上說：“這個遊戲是先玩者是有必勝策略的遊戲”，我們很好奇是否有必勝的走法，於是分析平日對下結果的紀錄，

這張比賽紀錄圖是1月7日(進行研究的同學丙)跟電腦比賽結果，最後是我輸了，差了一子(E1)，而電腦(後下者)竟然還是有辦法贏，可見得當時還有沒找到必勝策略，後來更進一步深入研究，才發現只要下對子，每步都遵守獲勝規則的話，是真的先下會獲勝喔！



經過跟電腦及跟同學對下之後，讓我們發現一些能擊敗對方的方法，但是實際上與電腦對下之後，才發現還有一些沒有考慮到的部分，因為時間限制還無法探究完畢，但是這樣的經驗也讓我知道了怎樣才能製作屬於自己的 hex 遊戲。

方法一：要先讓自己連接起來才有機會可以獲勝(使用“黏”的策略，指我方一子貼近對方一子的一子下)。

方法二：要截斷對方連接線的路徑，才有機會獲勝。

方法三：造橋能增加獲勝機會，還可以使用雙造橋。

方法四：要注意連接對外出(入)口才有機會可以獲勝。

方法五：要選擇通道數比較多的位置的地方來下，比較有機會獲勝。

而在垂直座標圖形的分析中，我們發現要判斷不同圖形連接遊戲是否相同，不能靠遊戲外觀或外形來判斷，需將遊戲棋盤轉畫成垂直座標棋盤，看看基本圖形是屬於哪一類，並計算遊戲棋盤中的位置數(圈圈數目)及連接通道數目來判斷。其中，垂直座標圖形中基本圖形為三角形的分為兩類，分別是第一類飛箭渡河遊戲(未改良版)和第二類三角為王、六魔王和鑽石達令遊戲，由基本圖形為三角形組成的垂直座標棋盤外觀是三角形，位置之間連接通道數比起垂直座標圖形中基本圖形是四邊形的圖形連接數目少了許多，導致彼此(位置間)易被阻斷，產生和局的情形；相較之下，垂直座標圖形中基本圖形是四邊形的分為三類，分別是第一類日常生活中常玩的傳聲筒或傳紙條遊戲(直的傳或橫的傳)、和第三類○x遊戲、太陽-笑臉、飛箭渡河(改良版)及薇薇彩帶圖形連接遊戲，而本研究中 hex 遊戲及自創遊戲(家家樂圖形連接遊戲)屬於第二類，兩者由相同基本圖形(四邊形及左上至右下連接通道)組成，不同外觀的棋盤及遊戲棋盤圖形內竟然存在相同的垂直座標中之基本圖形及連接方式，真是令人興奮，尤其計算各層棋盤中圈圈數及通道數目所組成的數列，令人讚嘆圖形中蘊藏數列的奧秘。

因為時間的限制，未能對 8X8、9X9、10X10 及 11X11 的棋盤作探討，希望以後還有機會作更進一步的研究。

## 玖、參考資料及其他：

<http://www.stupidfoxgames.com/hexvex/>

<http://www.game388.com/flash-game/1692.html>

<http://www.mathland.idv.tw/fun/nashgame.htm>

<http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/9.pdf>

<http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/meet/meet17.pdf>

## 【評語】 080411

本研究先探究 hex 遊戲的獲勝技巧，根據垂直座標表示法分析自創圖形連結的八種遊戲，值得鼓勵。唯數學的深度較顯不足，可再努力。