

# 中華民國第 55 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國中組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

030418

「索瑪」頻道—索瑪立方塊的研究與探討

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：  國二 石峻維  國二 陳盈安  國二 吳孟芳	指導老師：  李奕瑩
---	------------------

關鍵詞：索瑪立方塊、立體拼圖

## 摘要

本研究旨在延伸傳統的三階索瑪立方塊至四階立方塊(即其方塊數為  $4 \times 4 \times 4$ )，在不違背原先遊戲的精神之下，定義連方的組件並建立圖譜，透過探討組件可能的組成，意圖找尋能夠快速完成正方形造型的方式。研究過程中，透過不斷的探索、編碼、分類、整理與討論，我們分類出 6 種不同的成功組合類型，並找出此 6 種類型皆為有解。進一步分析後發現，這些解當中重複的組件，是能夠完成解法的重要關鍵。本研究不僅發現到關鍵性的組合要素，也為探尋索瑪立方塊在系統性的成功組合方法上，提供了可能且重要的基礎。

## 壹、研究動機

我們去找小學老師時，意外地看到了幾個方塊放在桌上，我們好奇地拿起來看了看，發現下方有簡介說明這叫做「索瑪立方塊」，於是便馬上查了資料，在看了「索瑪立方塊」的說明之後，我們非常地驚訝！沒想到一個  $3 \times 3 \times 3$  的方塊因為排列方式的不同，居然有 480 種排法，令我們非常好奇，想動手研究、觀察，其中是不是有些規律？除此之外，我們更想推廣此問題至其他條件或規則，例如把方塊數從  $3 \times 3 \times 3$  變成  $4 \times 4 \times 4$ ，找出其中的排列規律及創造出  $4 \times 4 \times 4$  立方體的排列方法。

## 貳、研究目的

目前探索索瑪立方塊的活動，大都聚焦在立體造型的仿作與變化上，或是利用索瑪立方塊 7 個組件形成一個正立方體。在四階延伸方塊上尚未有一系統性的討論，因此我們更有興趣於如何結構化能拼成一個正立方體的方法。據上，本研究主要的目的如下：

- 一、找尋  $4 \times 4 \times 4$  延伸方塊形成立方體的成功組合類型。
- 二、探索形成  $4 \times 4 \times 4$  立方體的關鍵性要素組件。








## 參、研究器材

彩色立方積木、剪刀、膠帶、紙、筆、電腦。

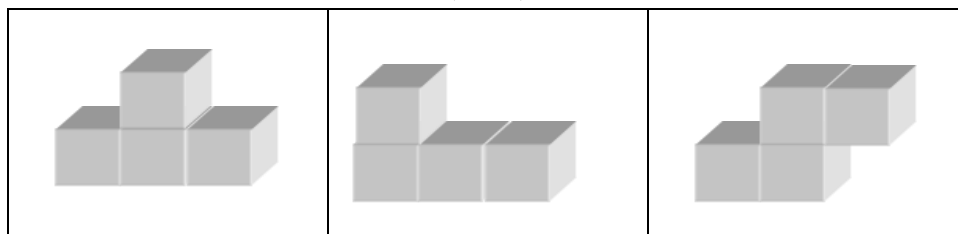
## 肆、文獻探討

索瑪立方塊是由丹麥皮亞特·海恩(Piet Hein)發明的。1936 年，皮亞特·海恩在聆聽偉納·海森伯格演講「量子物理」的場合，構思出索瑪立方塊的。當時這位德國物理學家正在

講述把空間切割成立方體。皮亞特·海恩敏銳的想像捕捉到以下的幾何原理：將四個以內，大小相同的立方體，以面相連接，構成的所有不規則形狀，可以重組成一個較大的立方體。演講結束後，他把 27 個立方體黏成這七個形狀，並很快地證實他的想法。索瑪立方塊從此誕生(如圖一)。我們也發現有人將所有 3x3x3 的索瑪立方塊一一組合，發現有 480 種組合，更有人將組合進行討論，發現以圖二的三個組件為底的組合，占了近九分之一(如圖二)。

此為索瑪利方塊及其編號		
1 號	2 號	3 號
		
4 號	5 號	6 號
		
7 號		
		

(圖一)



(圖二)

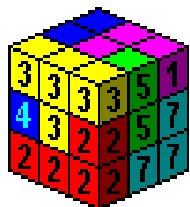
透過文獻探討我們可以發現，實際進行索瑪立方塊研究的人很少，而且大多只進行 3x3x3 的

基本探討，例如：有幾組解法？或是常見的組法等，所以我們想將大家耳熟能詳的 3x3x3 索瑪立方塊進階至 4x4x4 的立方塊研究。在進行研究前，我們必須先了解基本的索瑪立方塊，透過文獻探討，我們知道以下三點：

- 一、 採用不規則方塊。
- 二、 使用數字編號加以排列。
- 三、 使用顏色區分方塊。

我們承接索瑪立方塊原則建立 4x4x4 立方塊的基本規則：

- 一、 所謂「不規則形狀」在數學上稱作凹多面體，即——多面體上能找到相異的二點，使得此二點的連線除了兩端點外不在多面體內部。所以二個單位正方形以面相連接屬於規則長方形，不符合原意，故不採用。三個單位正方形以面相連接，有二種形狀，但左邊成 I 字型的片是長方體，不採用。四個單位正方形以面相連接，有八種形狀，其中 I 字型及田字型是規則形狀，亦不採用。
- 二、 國際上通常以圖形的正投影作為圖形的基底，由最前層至最後層，逐一在相對位置上填入索瑪組件的編號。



前層	中層	後層	
3 3 3	4 1 5	4 1 1	上面
4 3 2	4 5 5	1 5 7	中面
2 2 2	6 6 7	6 7 7	下面

- 三、 國際上並沒有特別的顏色規定，只要能簡單區分即可。

了解基本的索瑪立方塊後，利用這些方法，我們可以快速分辨和研究 4x4x4 的索瑪立方塊。

## 伍、研究方法

一、 將原先  $3 \times 3 \times 3$  的連方方塊，根據遊戲制定的原則方法進行延伸，並將規則方塊刪除。當然毫無限制時的組合方法有很多種，但是此種方式將曠日廢時，所以我們訂定以下規則並試著找出其關連性：

- (1)以  $3 \times 3 \times 3$  的方塊為基本型態進行延伸。
- (2)使用不規則連方體且在拼湊時選擇對角線最多的不規則方塊。
- (3)向外延伸時在同一面上(方法三將詳細說明)。

依據規則我們考慮先將  $4 \times 4 \times 4$  的索瑪立方塊組合後，再進行切割分解。由基本的索瑪立方塊延伸至  $4 \times 4 \times 4$  的方塊，發現有重複方塊，針對重複方塊進行討論。

二、 以建立圖譜的方式，找出五連方、六連方的所有方塊組合，並將不符規則的方塊刪除。圖譜完成後，我們必須選出其中適合用來拼組的組件，但是能使用的方塊相當多，所以我們先將最不可能的方塊刪除。以下為刪除原則：

- (1)刪除規則方塊，以符合索瑪立方塊的基本原則。
- (2)刪除底部超過四個立方體的連方，例如：底部五個，上方一個的 L 形六連方體，雖然符合不規則圖形，但是底部大於四個立方體，根本不可能做為  $4 \times 4 \times 4$  的索瑪立方塊的組件之一，故可刪除。

三、 考量若依皮亞特·海恩的方式重新將  $4 \times 4 \times 4$  的立方塊分割，將耗費許多嘗試錯誤的時間。因此，我們使用自製的單位立方體積木，做成  $3 \times 3 \times 3$  的索瑪立方塊，並直接對其加上一層方塊，在增加時，需增加在同一方塊面，使之變成  $4 \times 4 \times 4$  的索瑪立方塊，並根據符合以上兩點原則之新增方塊進行分割。

四、 因為一、二、三連方容易重複，且大多數為規則方塊，七、八、九連方則因排法太多，數量難以掌控。故本研究選擇以四、五、六連方為基本組件。

五、 利用一元二次方程式求出 4、5、6 連方的**正整數解**，例如： $4X+5Y=64$ ， $5X+6Y=64$ ， $4X+6Y=64$ ，求出正整數解後，發現有重複方塊的可能，例：四連方扣除二個規則方塊，剩下六種類型，故在此規則下  $4 \times 13$  個+ $6 \times 2$  個必會重複，所以將其刪除，請見下頁表格。

個數 連方數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4 連方	1	1	4	6	7	10	11	13	14	0	0
5 連方	0	12	0	8	0	0	4	0	0	2	8
6 連方	10	0	8	0	6	4	0	2	0	9	4

最後我們討論出了以下 6 種類型：

類型 連方數	類型一	類型二	類型三	類型四	類型五	類型六
4 連方	0	0	1	1	4	6
5 連方	8	2	12	0	0	8
6 連方	4	9	0	10	8	0

六、 進行實際操作，利用以上所制定的原則，將 4x4x4 立方塊做組件分解。

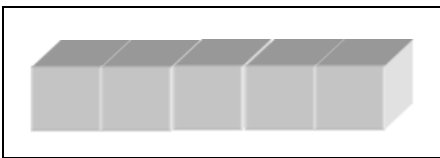
七、 分類並對各類別進行討論。

## 陸、研究過程

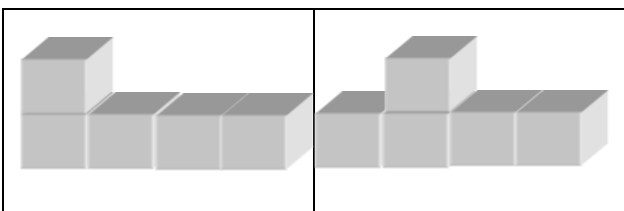
首先我們先找出了四、五、六連方的所有組件方式並建立圖譜，然後再選取其中的某些組件，將其組合成完整的 4x4x4 的立方體。

一、五連方的所有組件方式

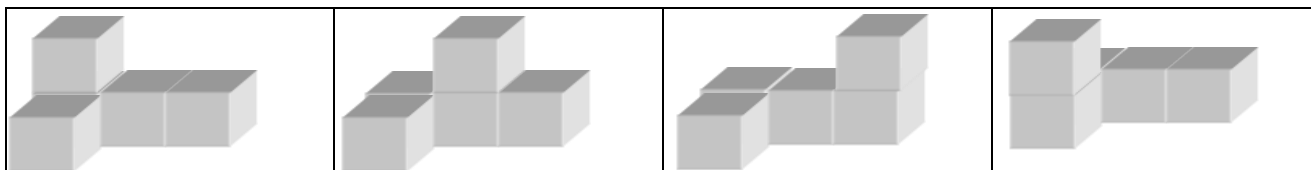
(一) 基本五個為一組



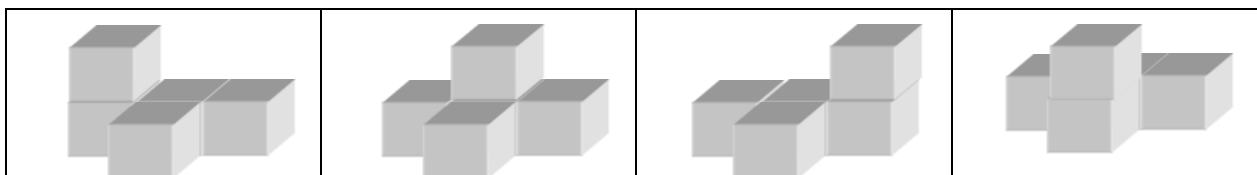
(二) 將其中一塊往上移動，使底部形成四個方塊為一組，上方方塊依序移動，有四種排法



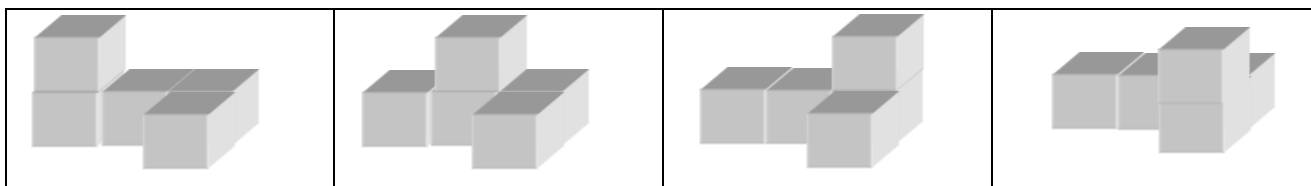
(三) 將底部其中一塊往前移動，形成一個「L」形，上方方塊依序移動，有四種排法



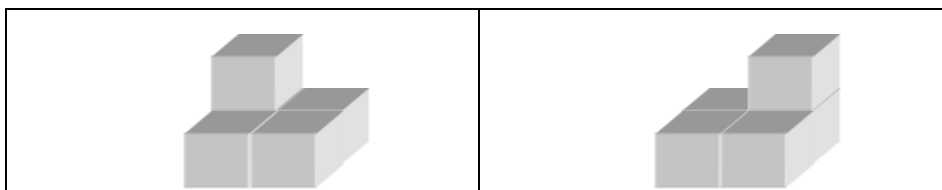
(四) 利用方法三，將底部前方方塊往右移動一個，上方方塊依序移動，有四種排法



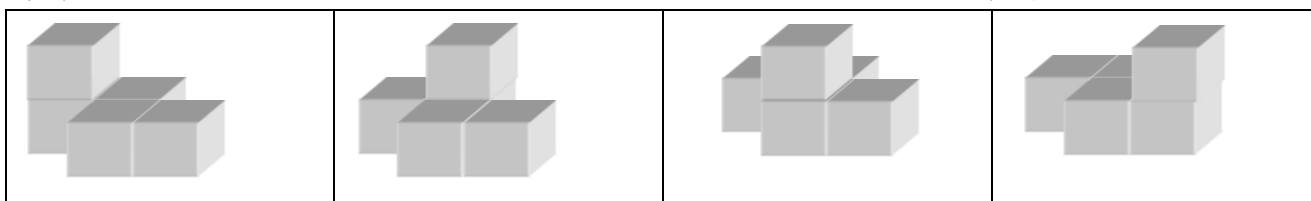
(五) 利用方法三，將底部方塊往右移動二個，上方方塊依序移動，有四種排法



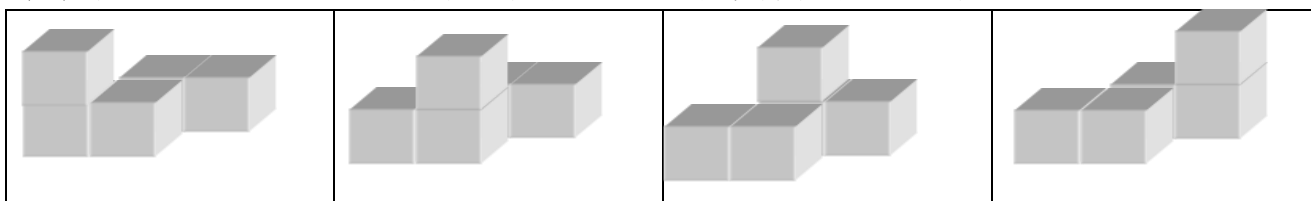
(六) 將底部方塊二個為一組，前後排列，形成「田」字形，有二種排法



(七) 利用方法六，將底部二個為一組，前方方塊往右一個，上方方塊依序移動，有四種方法

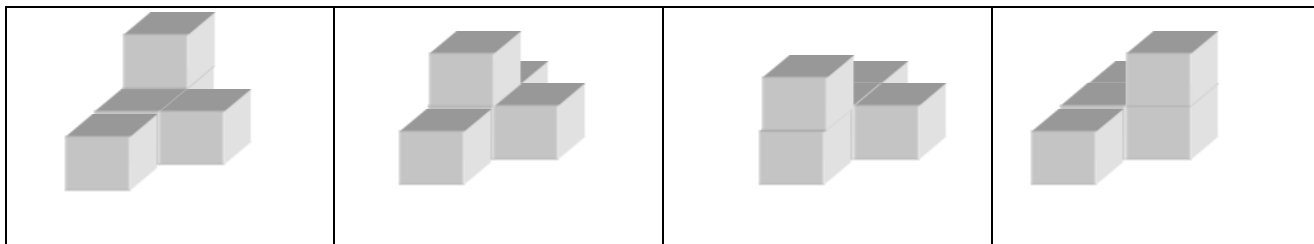


(八) 利用方法六，將前方方塊往左移動，上方方塊依序移動，有四種排法

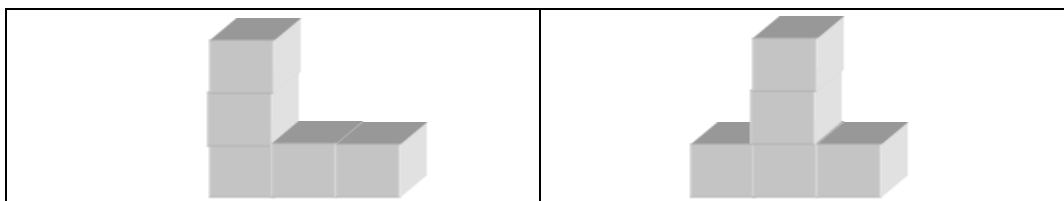


(九) 將底部一個方塊往前移動，再將其中一個方塊往後移動，形成「T」字形，上方方塊進

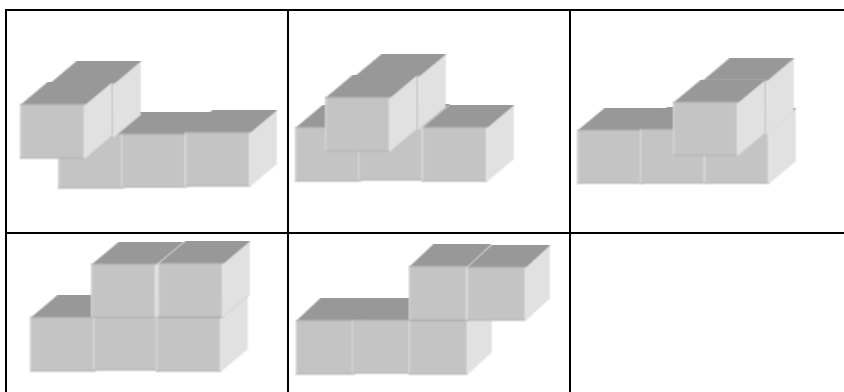
行移動，有四種排法



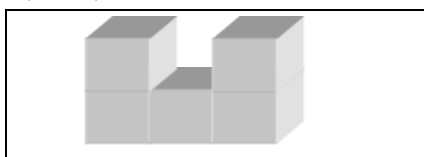
(十) 將底部其中一個方塊往上移動，上方方塊二個為一組進行直立移動，有二種排法



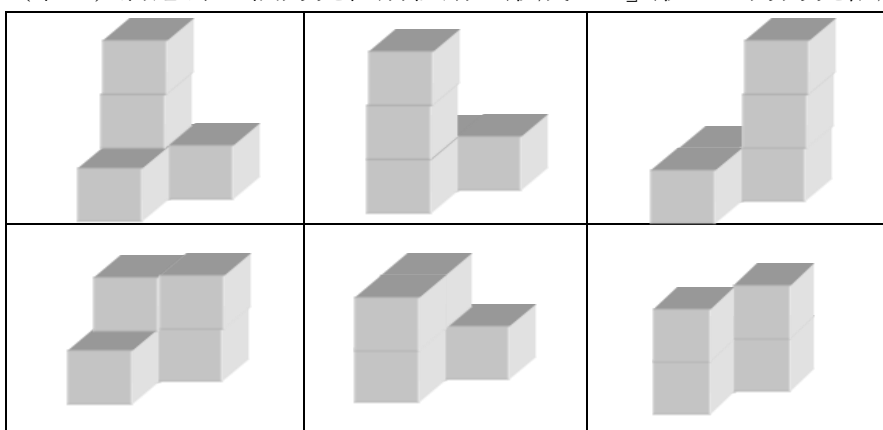
(十一) 利用方法十，底部方塊不動，上方方塊二個為一組進行橫向移動，有五種排法



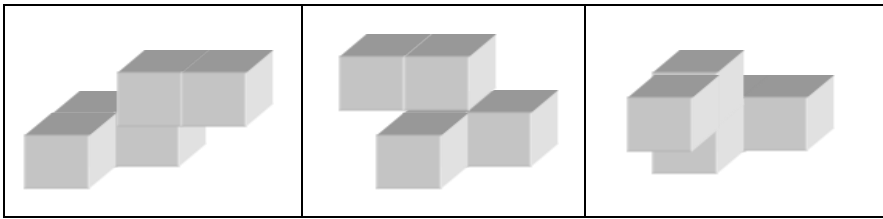
(十二) 利用方法十，底部不動，上方方塊進行分開移動，有一種排法



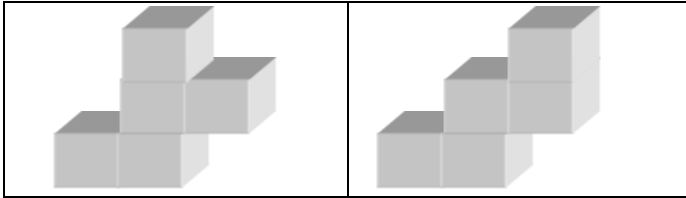
(十三) 將底部一個方塊往前移動，形成「L」形，上方方塊依序進行移動，有九種排法



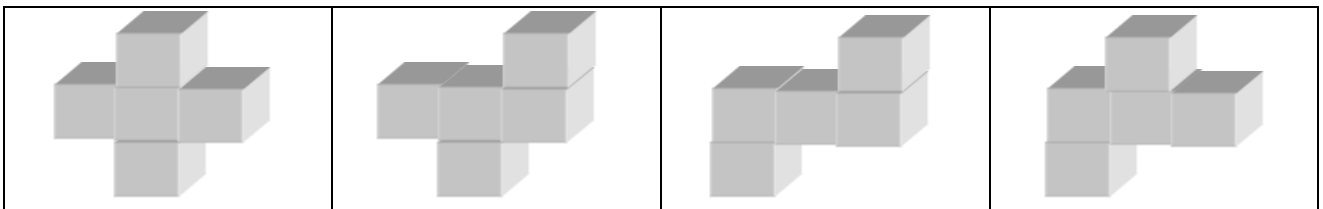




(十四)將底部一個往上移動，使底部為二個，第二層也為二個，最上層有一個，有二種排法



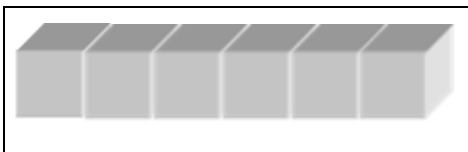
(十五) 將底部二個往上移動，使底部為一個，上方三個為一組進行移動，剩下一個方塊自行移動，有四種排法



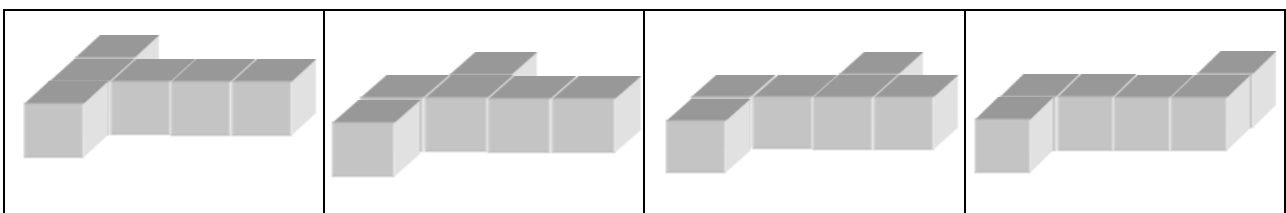
## 二、六連方的所有組件方式

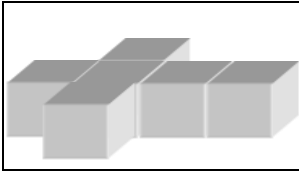
六連方的圖譜範圍較廣，所以使用「堆疊法」將立方體排成一排，這是最基本的排法。再將其中一塊方塊往上堆疊，在面與面連接的規則下進行排列，直到所有排列完成，即可再將底部其中一塊方塊往上堆疊，以此類推，即可降低錯誤率，又不容易混亂。

(一) 基本的六個為一組

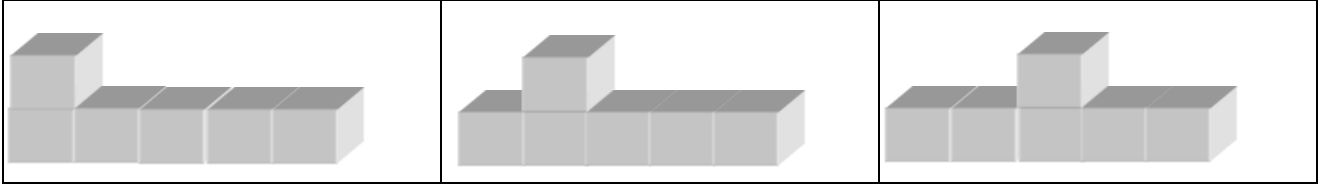


(二) 將其中一塊方塊往前方移動，在將其中一塊往後方移動，形成「T」字形，前方方塊依序移動，後方方塊也依序移動，有五種排法

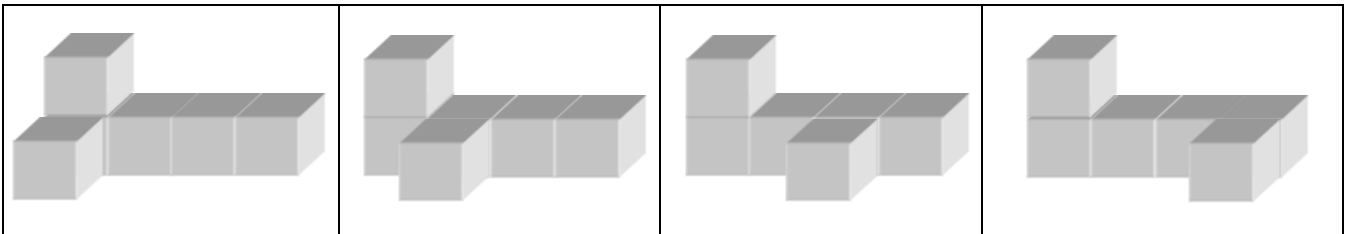




(三) 將其中一塊往上移，使方塊下方五個為一組，加上上方一塊，進行組合，有三個組合

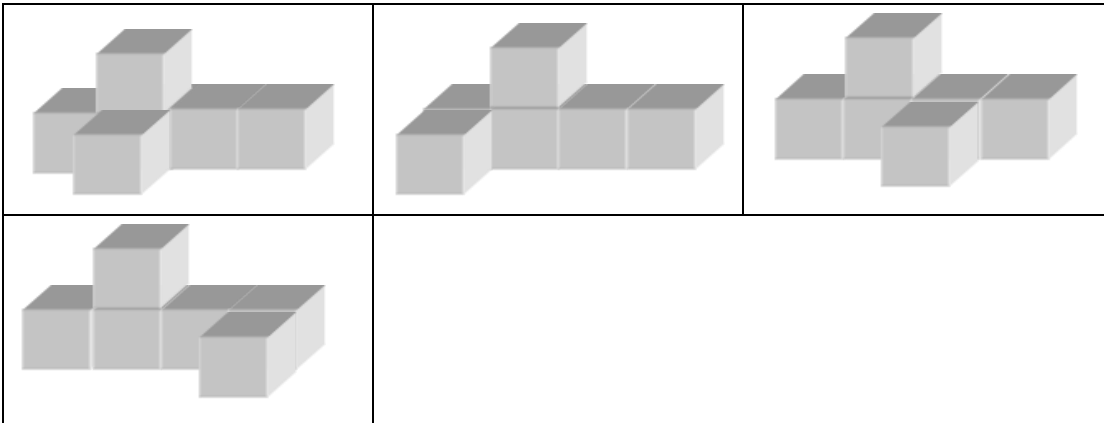


(四) 以底部五個為一組的基本概念，再次進行組合，上方方塊不動為原則，底部其中一塊往前方移動，可形成四種組合

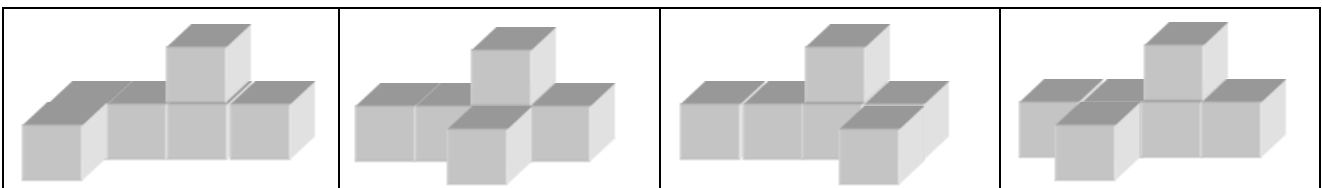


(五) 底部五個為一組的概念完成後，上方的方塊進行移動後又可以是新的組合。

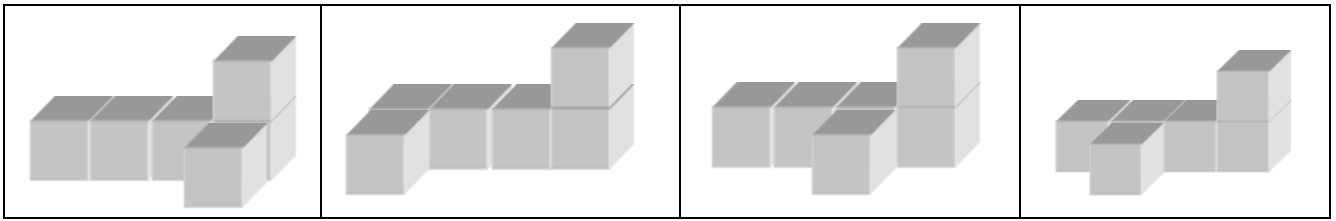
1. 將上方方塊往右一格有四種排法



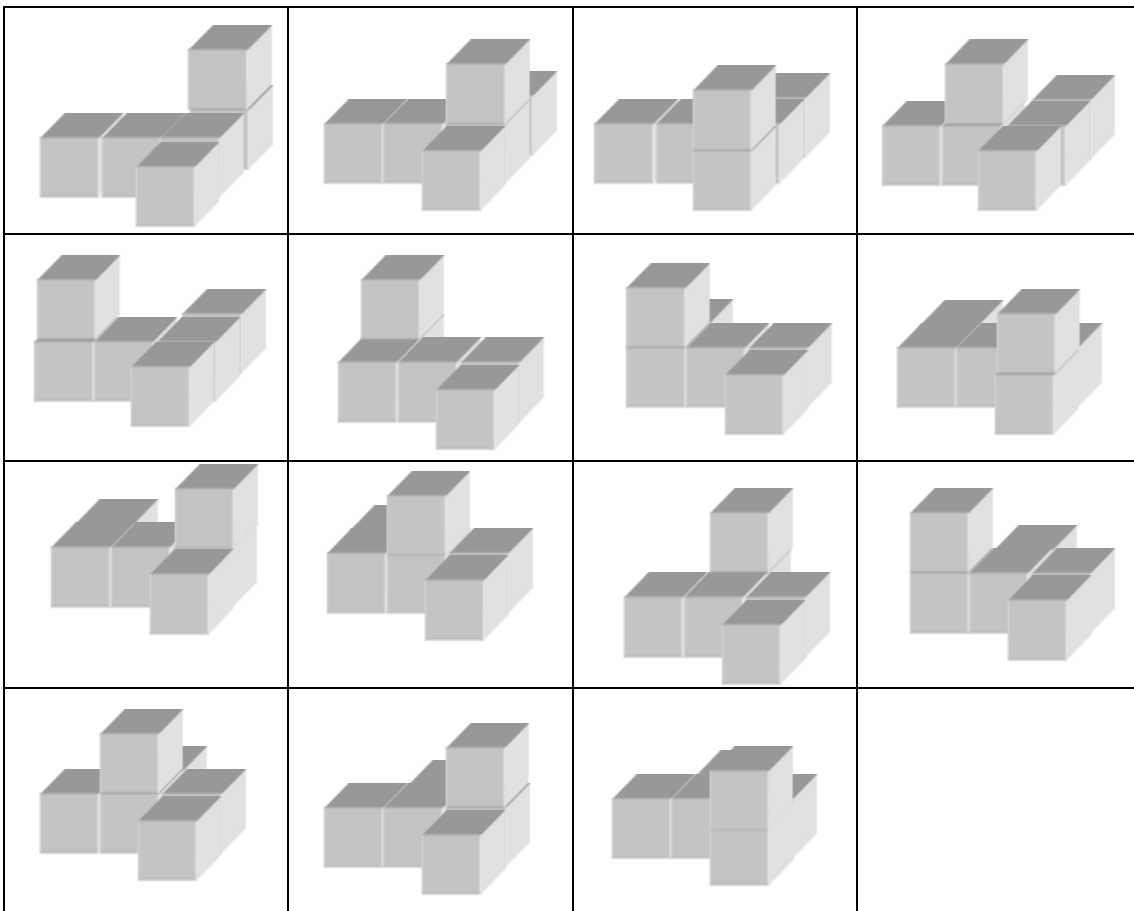
2. 上方方塊在往右一格，有四種排法



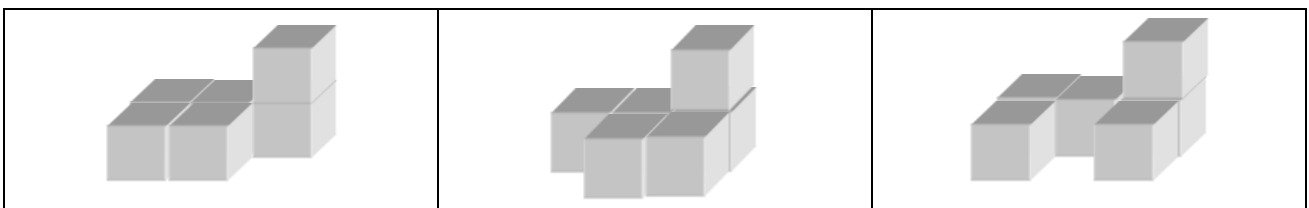
3. 上方方塊在往右移，有四種排法。雖然看似與第二種組合相似，其實只要以左右手的分別法一樣可以分別



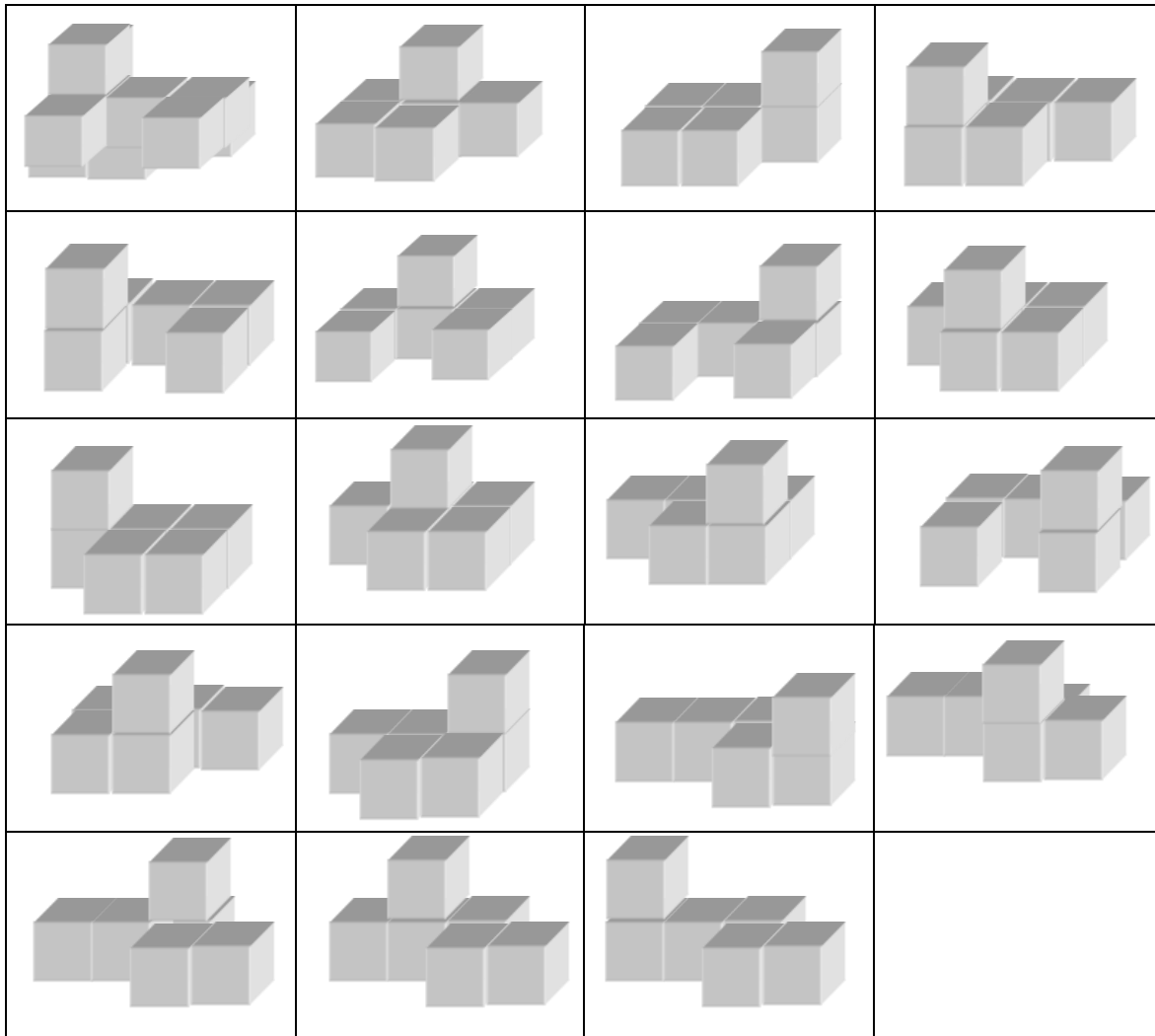
(六) 將底部其中一個方塊往後移動，加上上方方塊進行移動，有十五種排法



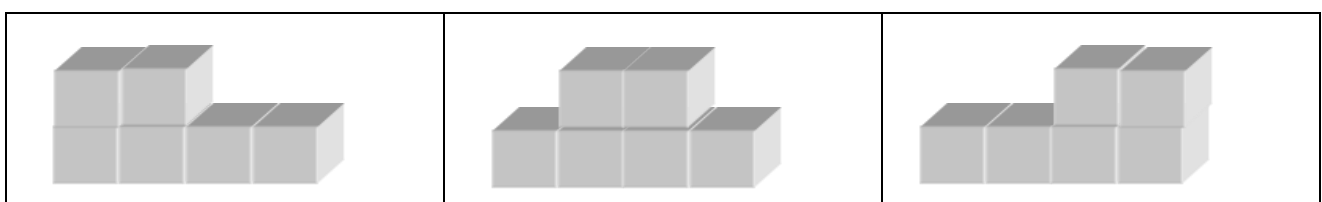
(七) 底部將其中二個往前移動，有三種排法



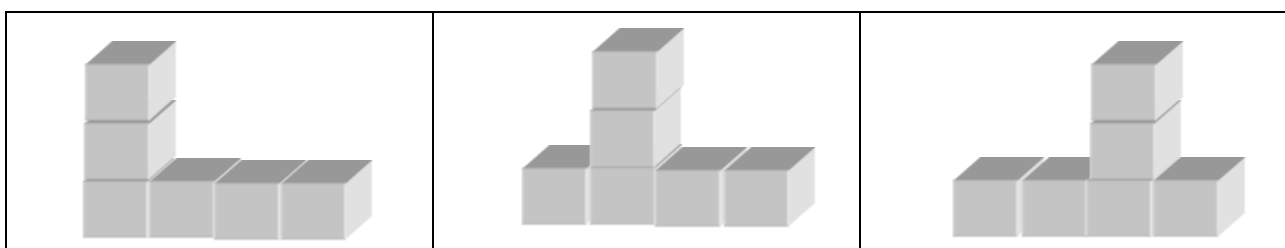
(八) 利用方法七的三種底不排法，加上上方方塊進行移動，有十九種排法



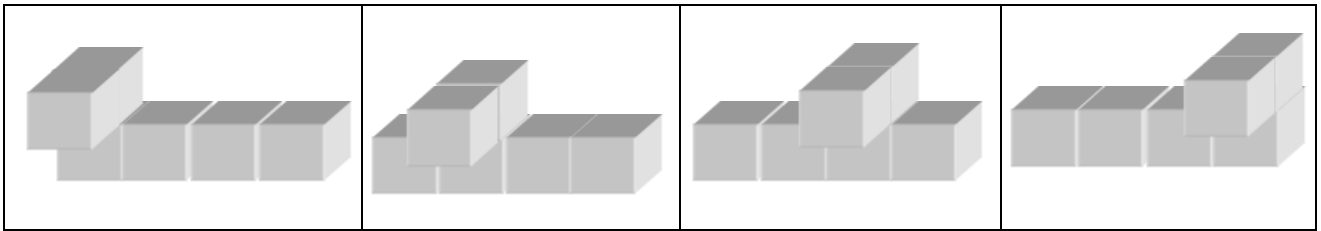
(九) 底部五個為一組的方法完成後，再將底部方塊往上移動，形成底部四個為一組，底部不動，上方方塊二個為一組進行橫向移動，有三組排法



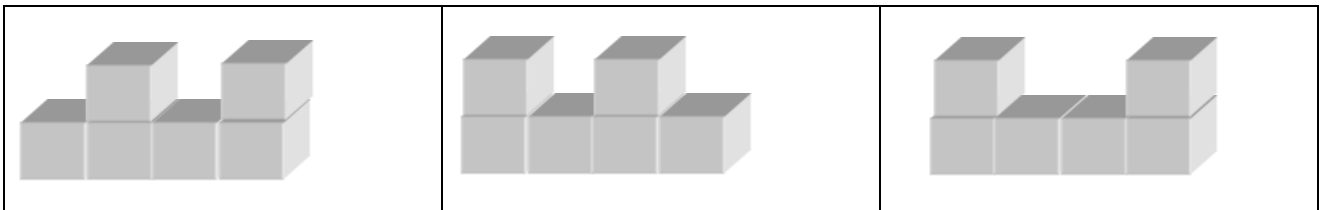
(十) 底部四個為一組，上方方塊二個為一組，直立往右移動，有三種排法



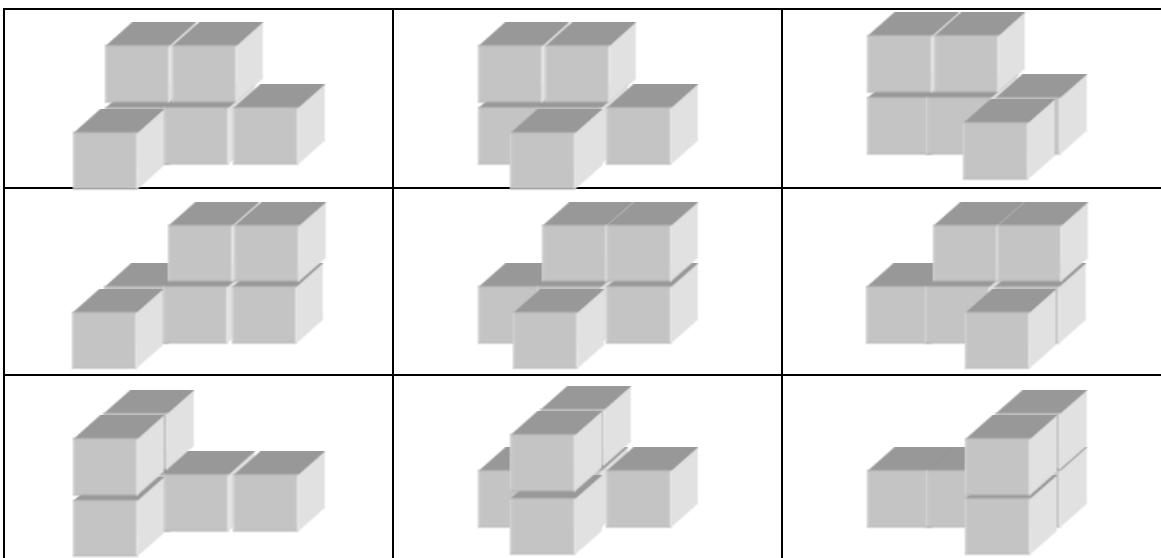
(十一) 底部四個為一組，上方其中一塊方塊往前移動，使上方方塊二個為一組進行移動，有四種排法



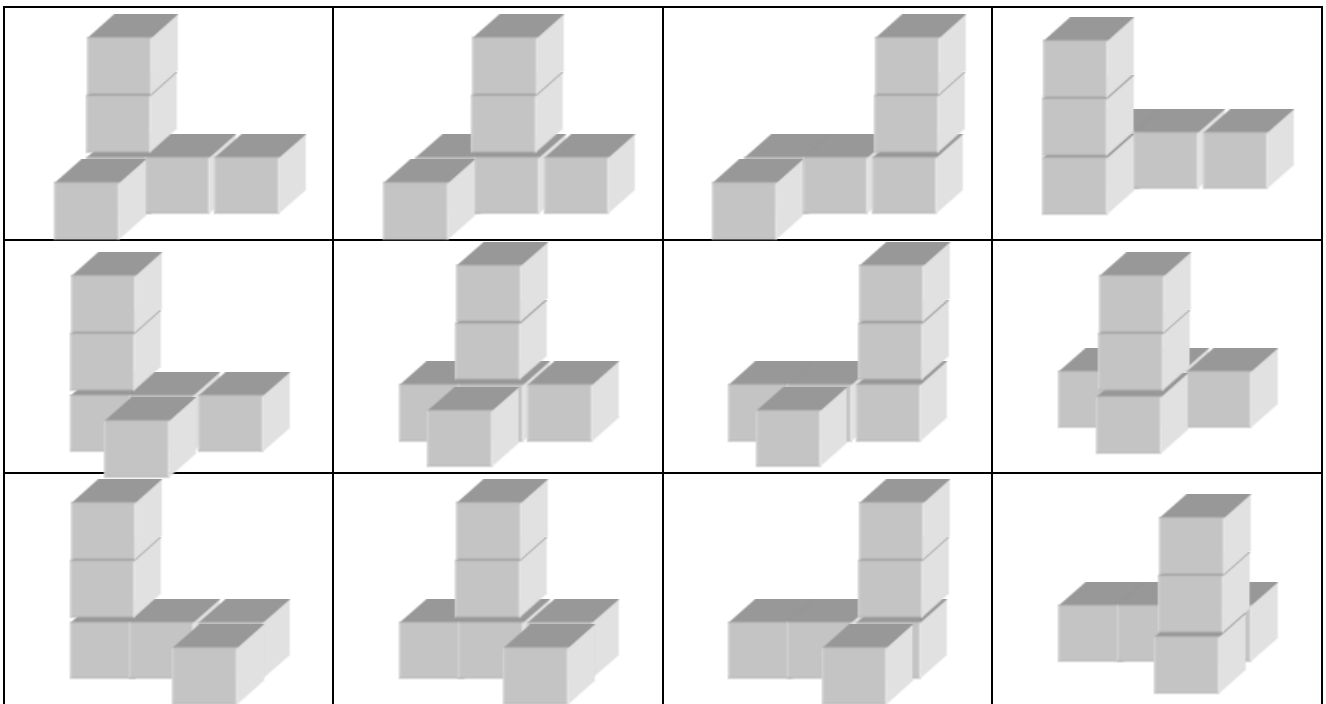
(十二) 底部四個為一組，上方方塊分開移動，可形成三種排法



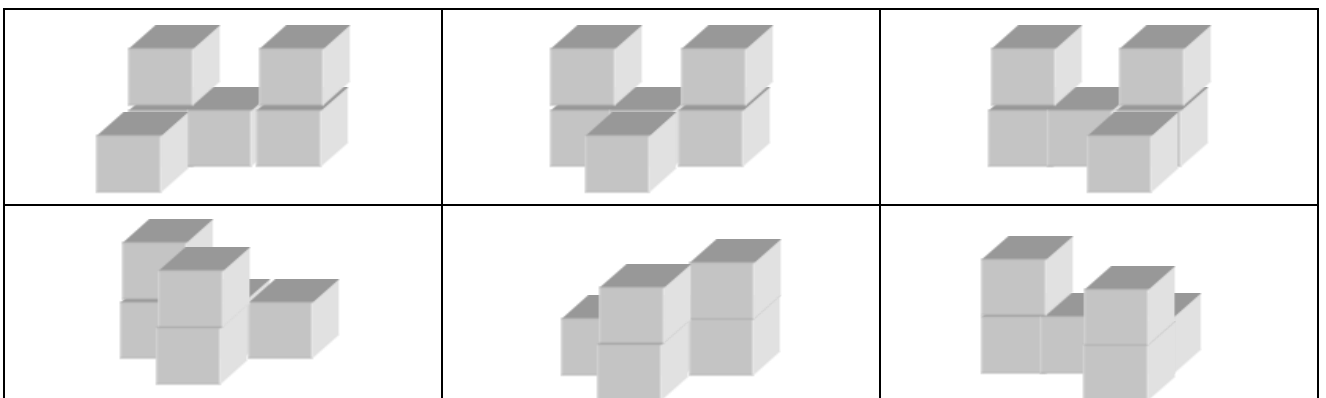
(十三) 移動底部的方塊，使底部其中一塊往前移動，上方方塊二個為一組也進行移動，有九種排法



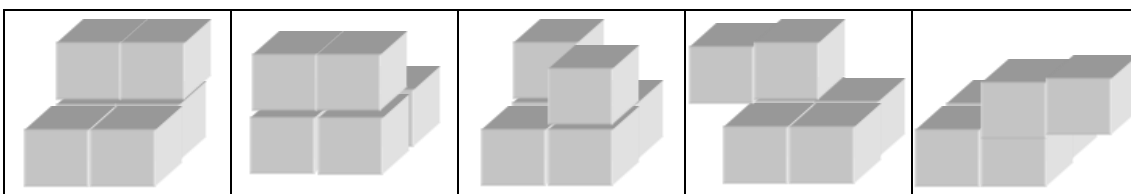
(十四) 利用方法十三，底部塊進行相同移動方法，上方方塊二個為一組進行直立移動，有十二種排法



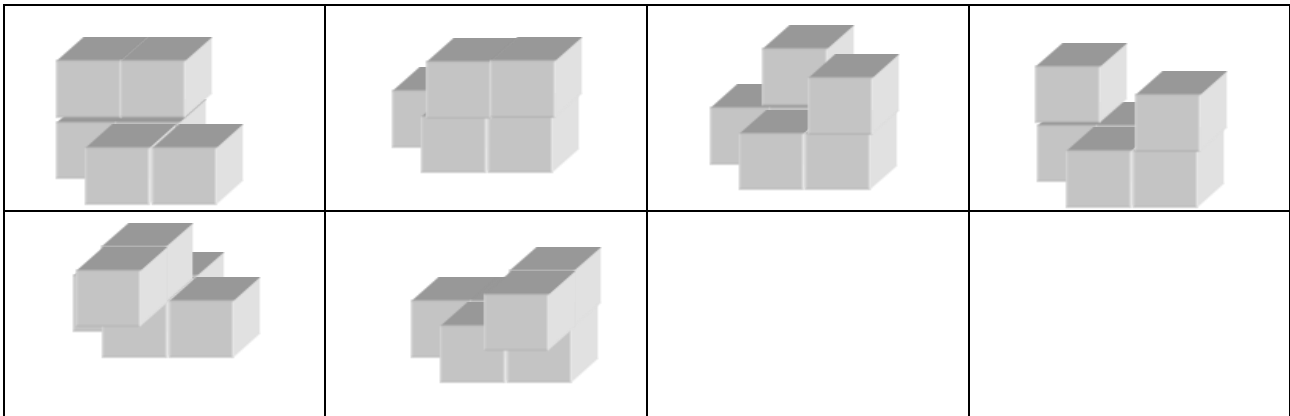
(十五) 利用方法十三，底部方塊進行相同移動方法，上方二個方塊進行分開移動，有六種方法



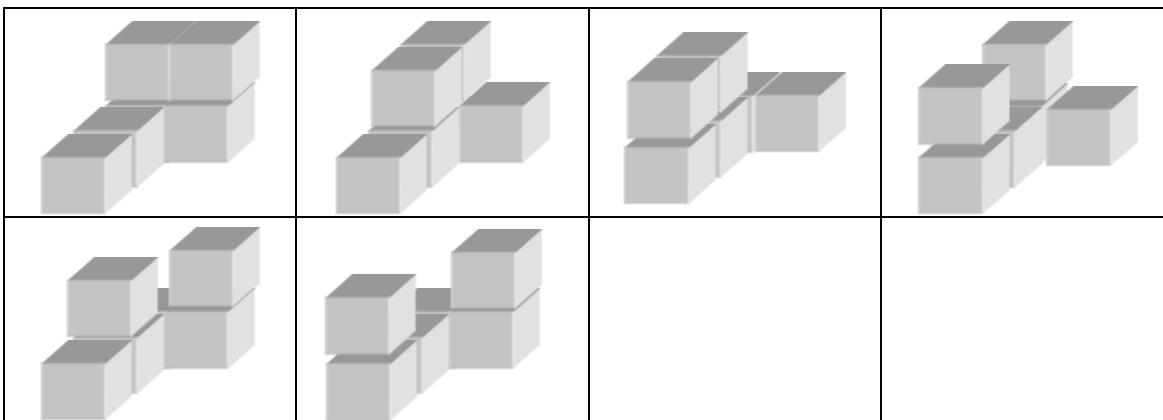
(十六) 將底部二塊往前移動，再將上方方塊進行不同的移動，有五種排法



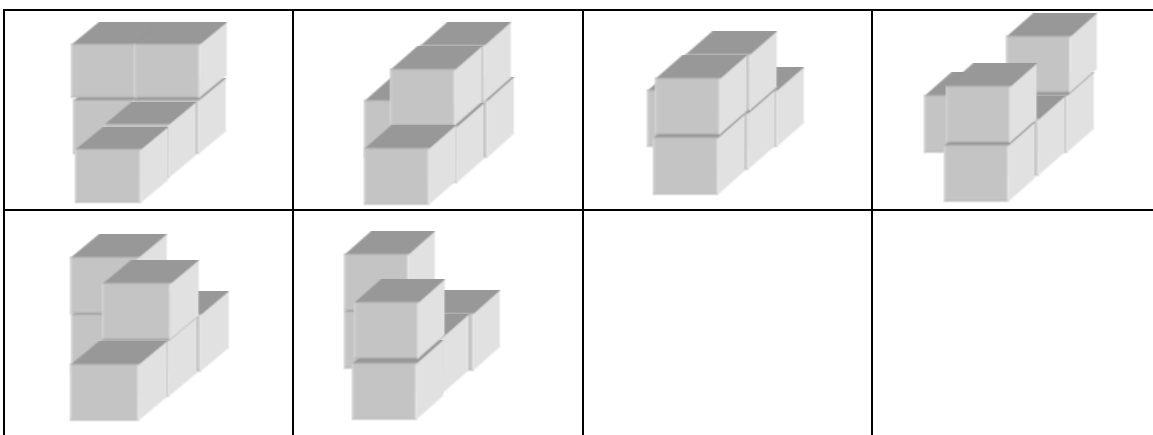
(十七) 利用方法十六，將前方底部向右方移動，上方方塊依序移動，有六種排法



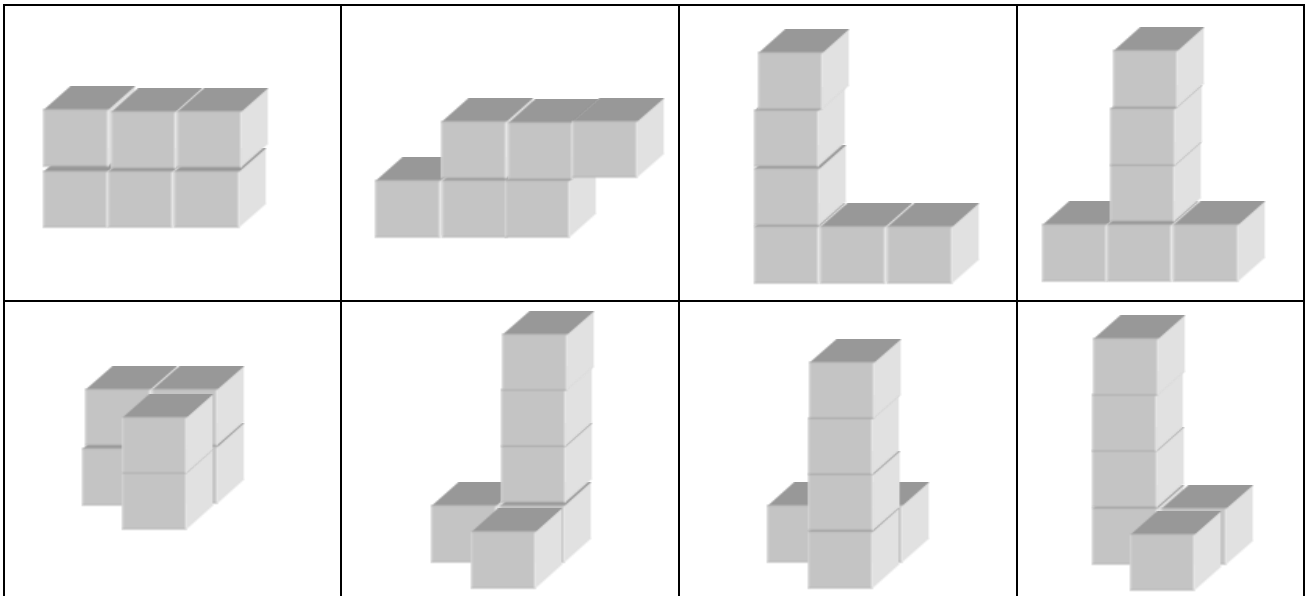
(十八) 利用方法十六的底部，將底部前方方塊的其中一塊在往前移動，上方方塊也進行移動，有六種排法



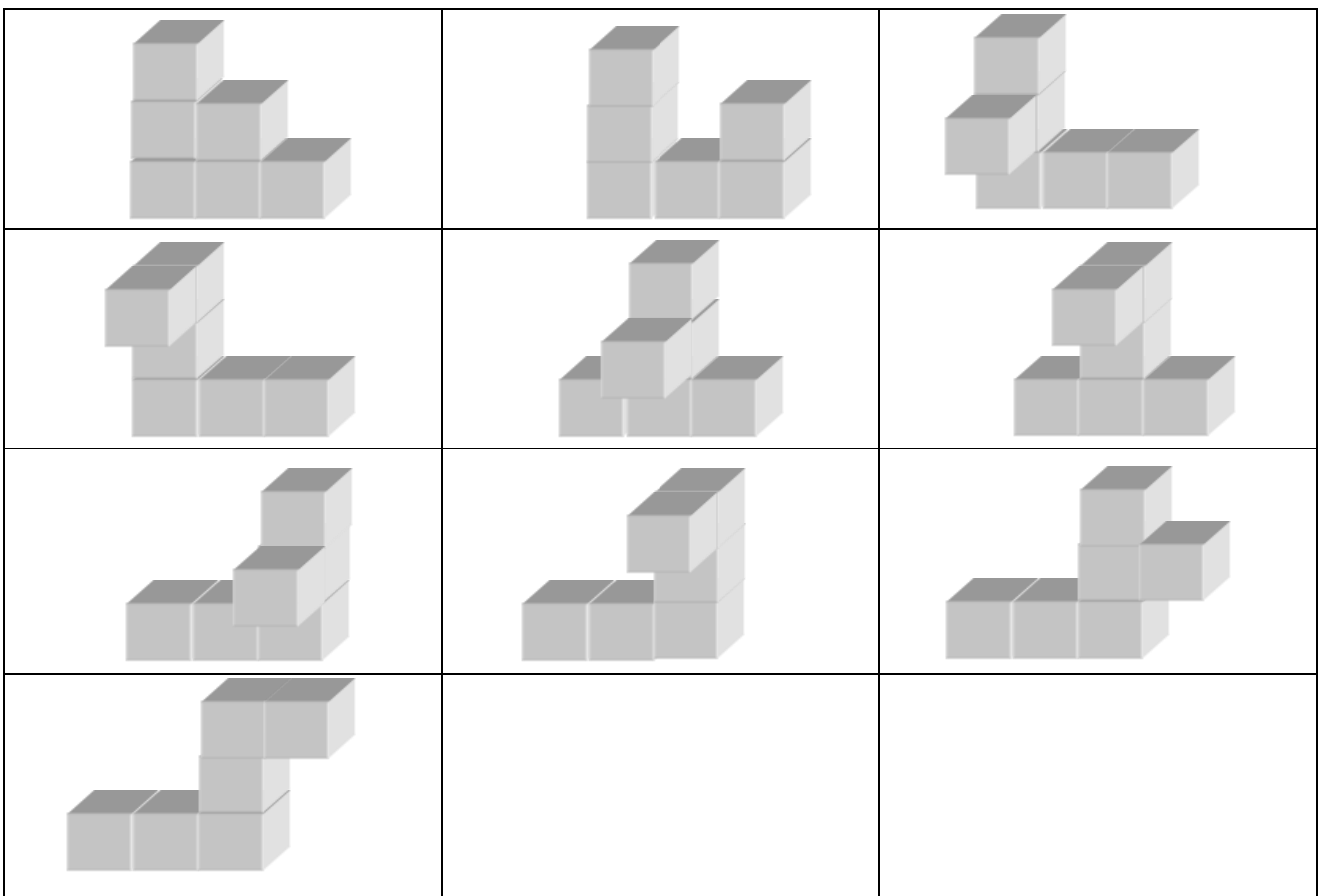
(十九) 利用方法十八的底部，前方方塊二個為一組由左往右移動，上方方塊也利用方法十七的方式進行移動，有六種排法



(二十) 底部為四的方法完成後，在將底部其中一塊往上移動，形成底部為三的方塊，底部不動，上方方塊，三個為一組進行移動，有八種排法

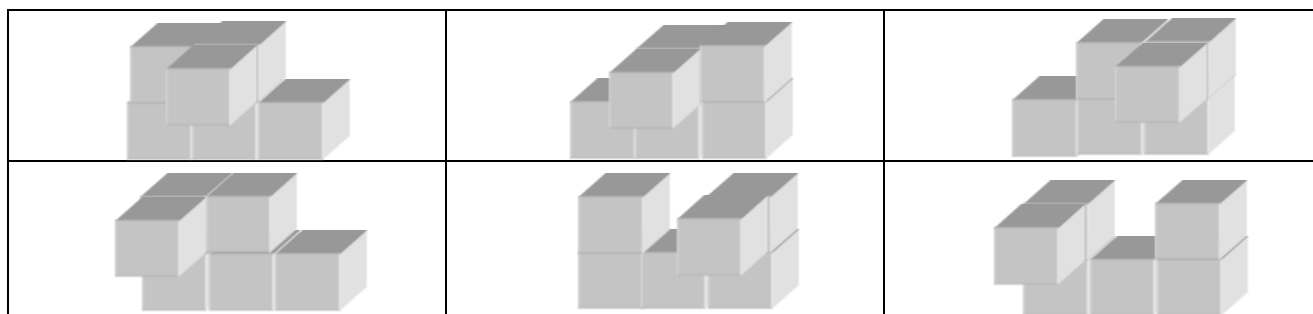


(二十一) 底部不動，上方方塊其中二塊為一組進行直立移動，剩下的一塊自行移動，有十種排法

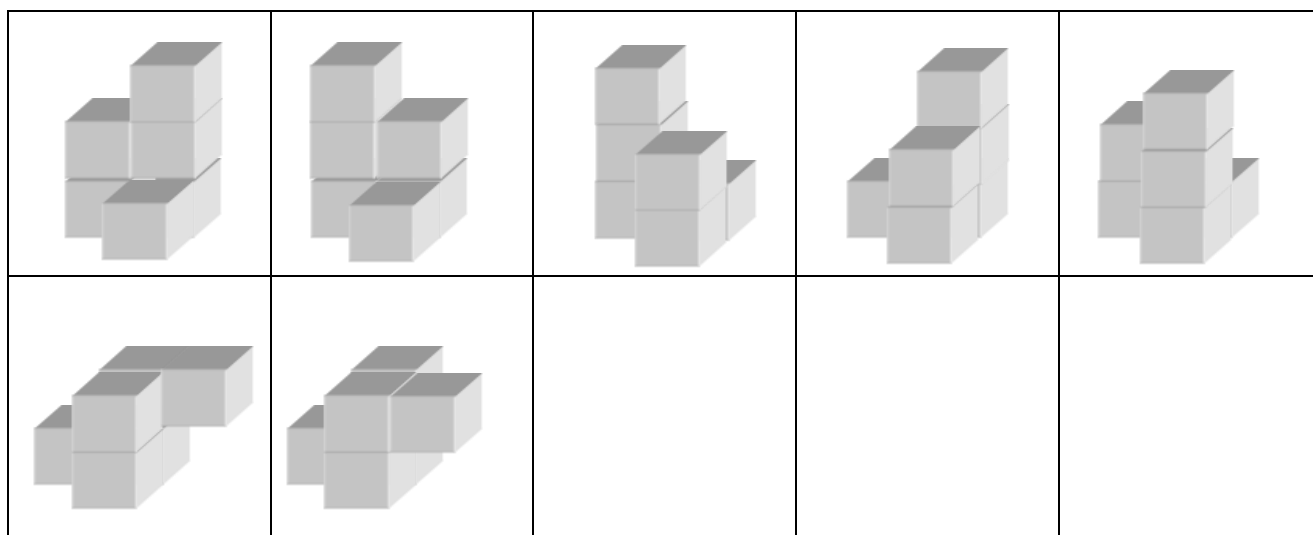




(二十二) 底部不動，上方方塊二個為一組，進行橫向移動，剩餘的一塊方塊，自行移動，有六種排法



(二十三) 將底部其中一塊往前移動，形成形「L」上方方塊二個為一組進行移動，剩下一塊方塊也依序進行移動，有七種排法



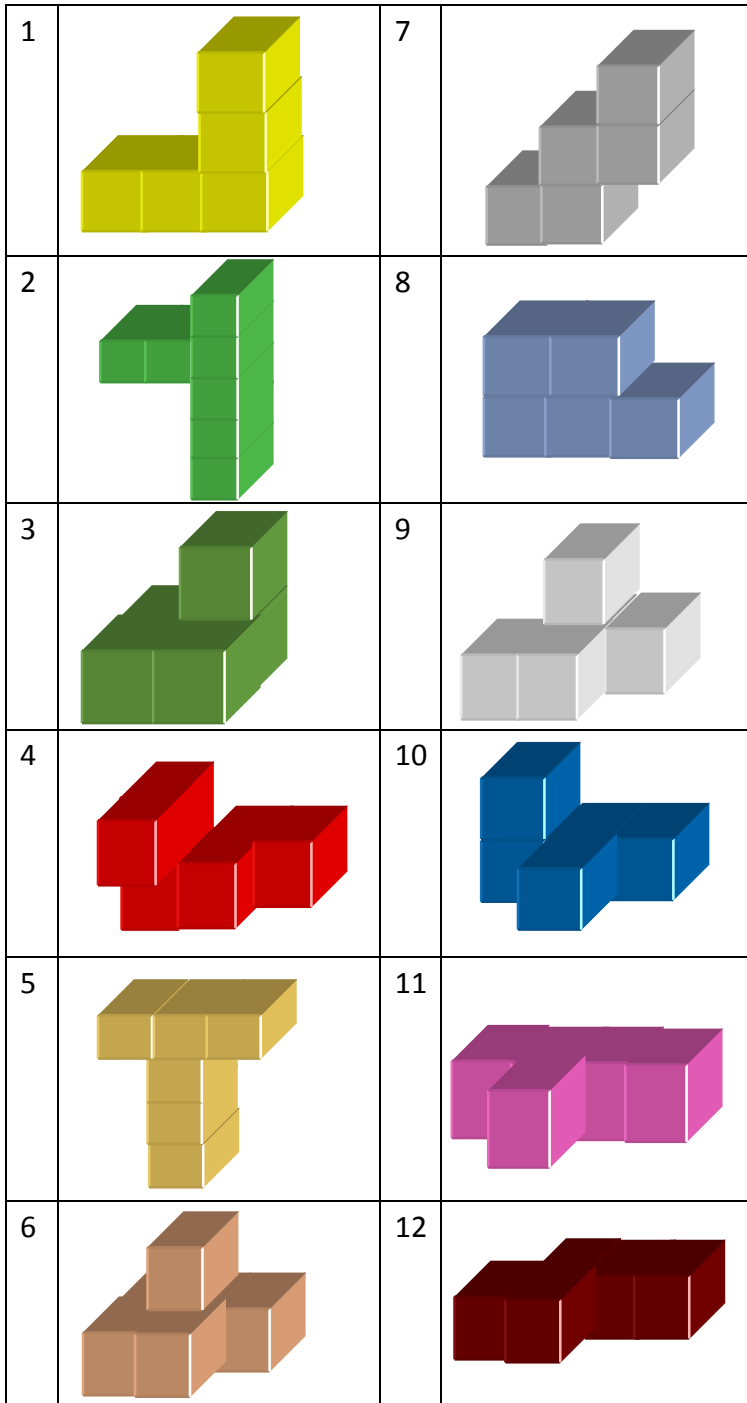
備註:方塊若有重覆，會自行省略。方塊底部二個和底部一個都有重覆，故省略。

## 柒、結果與討論

利用顏色和編號進行分類與組合，可以清楚地分辨組件與拆解的方法。

### 一、類型一

類型一解法的組件為  $5 \times 8 + 6 \times 4$  (此即表示五連方有八個，六連方有四個)。這組解法為  $3 \times 3 \times 3$  的加上一層方塊延伸至  $4 \times 4 \times 4$  的組合方式，我們可以從中發現，因為是以延伸的方法，所以方塊多為  $3 \times 3 \times 3$  的基本方塊多一塊或少一塊，分開觀察會看似與  $3 \times 3 \times 3$  的方塊相似。以下呈現兩種組合方法。

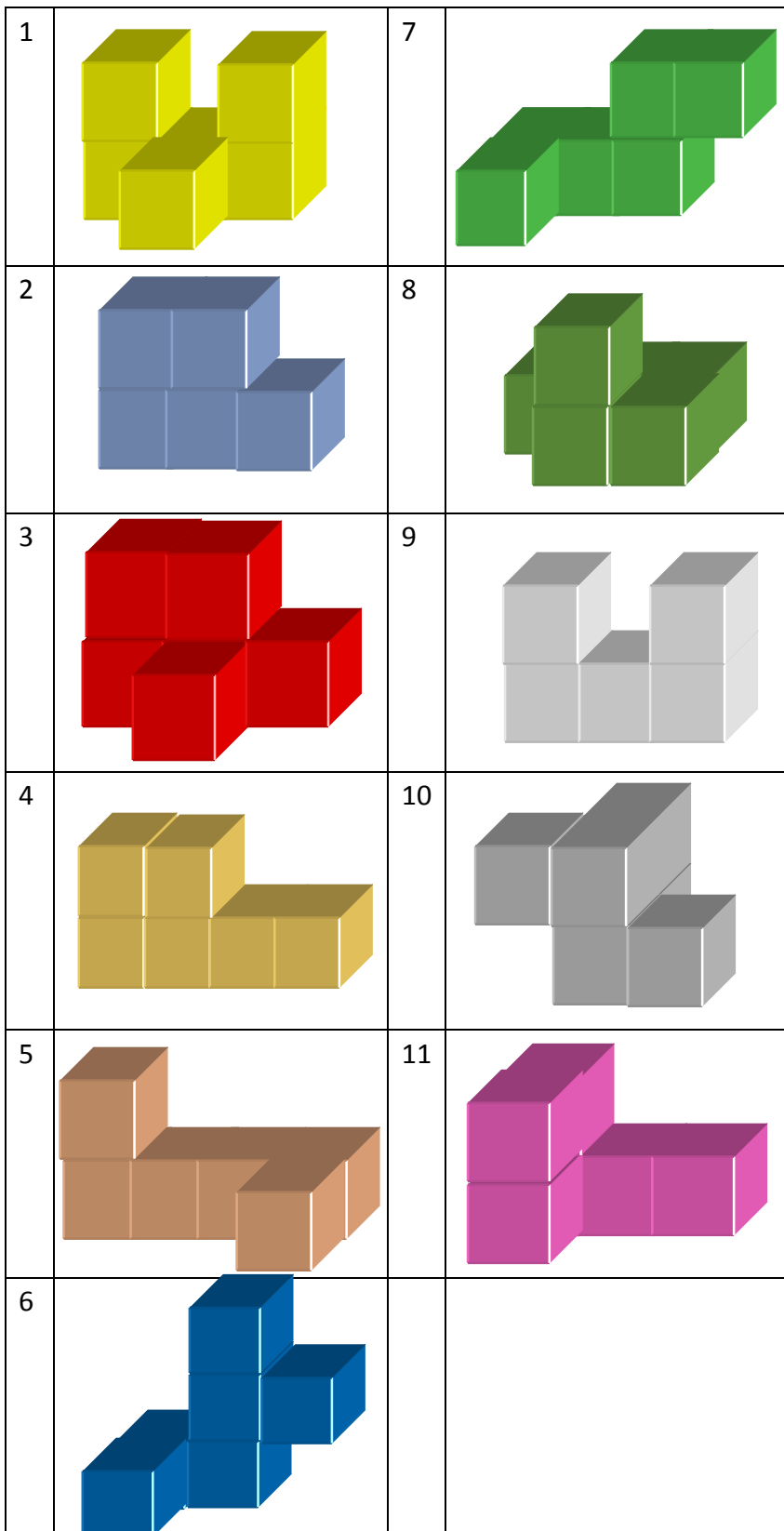


1	1	1	2	1	2	2	2
5	6	6	7	5	6	6	6
8	9	7	7	8	9	4	10
8	7	7	10	8	9	9	10

1	3	3	2	5	4	4	2
5	3	3	4	5	3	4	4
12	12	12	4	5	11	12	12
8	9	10	10	11	11	11	11

## 二、類型二

類型二解法的組件為  $5 \times 2 + 6 \times 9$ ，即按照五連方有二個，六連方有九個的規定下進行切割所完成的。以下呈現兩種不同組件的組合方式。



1	1	2	2
5	2	2	2
5	5	5	5
6	9	9	9

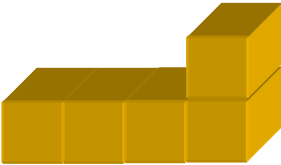
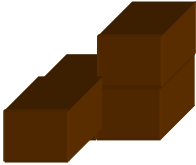
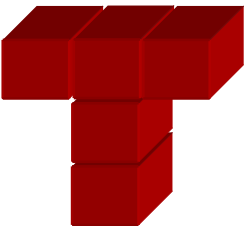


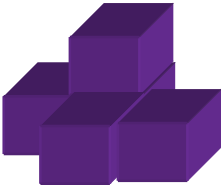
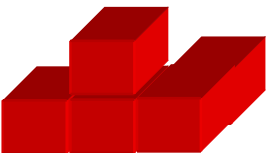


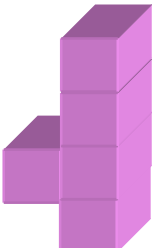
1	3	3	3
1	6	3	3
6	6	6	5
6	9	10	9

1	1	3	7
8	7	7	7
8	10	10	11
8	10	10	11

4	4	4	4
7	7	4	4
8	8	10	11
8	11	11	11

#### 四、 類型三

類型三解法的組件為  $4 \times 1 + 5 \times 12$ ，即按照四連方有一個，五連方有十二個的規定進行切割的。



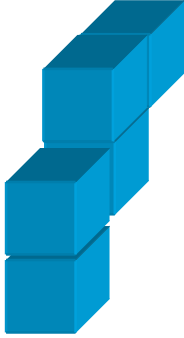
1		8	
2		9	
3		10	
4		11	
5		12	

1	1	1	1
1	2	2	2
3	4	2	5
3	3	2	6

7	4	8	8
4	4	11	5
3	4	5	5
13	13	13	6


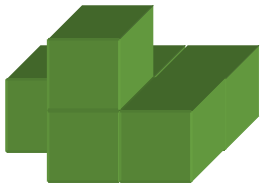
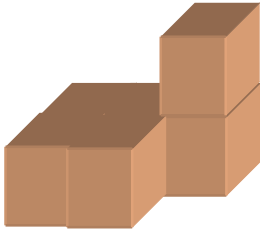

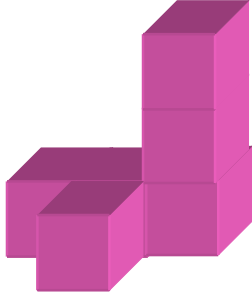
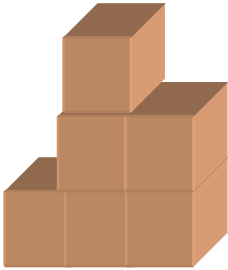
7	10	10	8
7	9	11	8
3	9	11	5
13	9	6	6

10	10	11	12
7	10	11	12
7	9	12	12
13	9	6	12

6		13	
7			

四、類型四

類型四解法的組件為  $4 \times 1 + 6 \times 10$ ，即按照四連方有一個，六連方有十個的規定下進行切割所完成的。

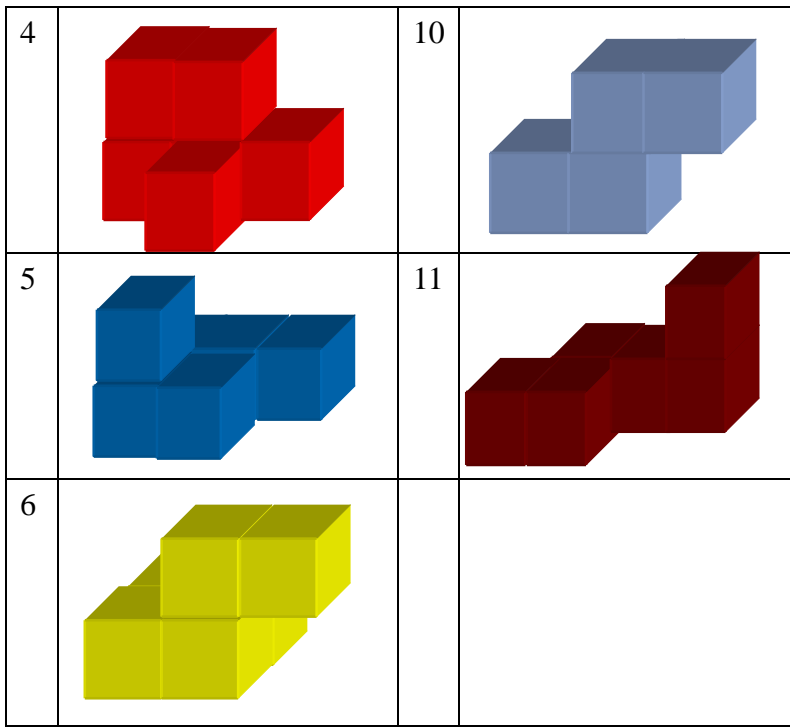
1		7	
2		8	
3		9	

1	3	2	2
3	3	3	4
5	6	6	4
5	5	6	6

1	1	2	2
3	1	1	2
9	1	4	4
5	5	6	6

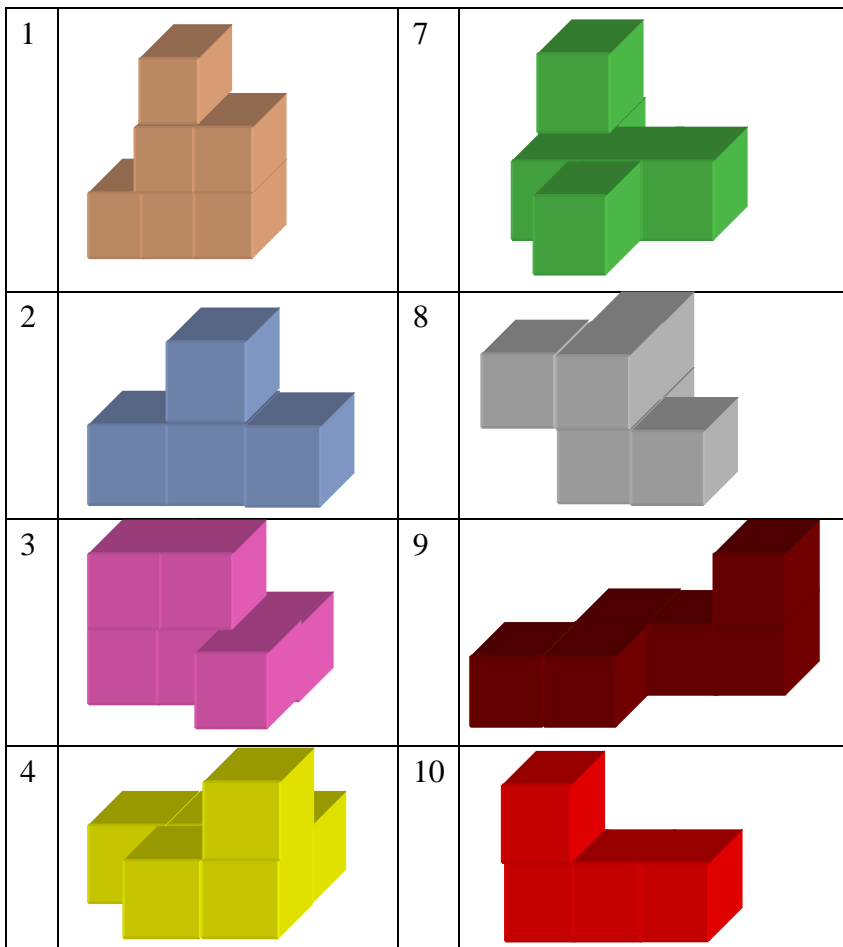
7	7	7	2
3	10	11	4
9	10	11	4
9	5	11	11

7	7	11	8
9	7	11	8
9	10	8	8
9	10	8	8



### 五、類型五

類型五解法的組件為  $4 \times 4 + 6 \times 8$ ，即按照四連方有四個，六連方有八個的規定下進行切割所完成的。

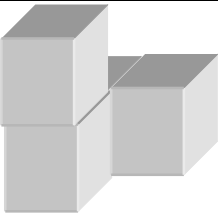





1	2	2	2
3	3	2	4
3	3	4	4
3	7	4	4

1	5	6	6
1	5	7	6
1	7	7	7
3	7	4	8





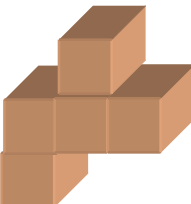

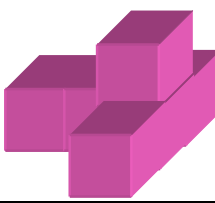


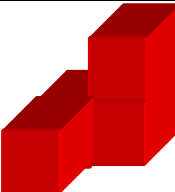
1	5	5	6
1	11	9	9
11	11	8	8
12	12	8	8

9	10	10	10
9	9	9	10
11	11	11	8
12	12	12	12

5		11	
6		12	

六、類型六

類型六解法的組件為  $4 \times 6 + 5 \times 8$ ，即按照四連方有六個，五連方有八個的規定下進行切割所完成的。

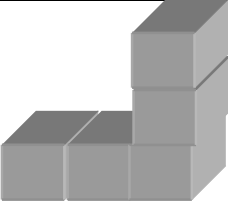



1		7	
2		8	
3		9	
4		10	
5		11	

1	1	1	1
1	2	2	2
3	2	4	2
4	4	4	5

6	7	8	8
3	7	7	10
3	7	10	10
3	4	5	5

6	11	11	8
12	13	13	8
12	12	13	10
3	9	5	5

6	11	13	14
6	11	13	14
6	12	14	14
9	9	9	9

6		12	
13		14	

## 捌、結論

- 一、經上述整理，我們可以發現四連方的組件方式有七種，而五連方的組件方式有四十七種，六連方的組件方式有一百二十九種。由此可發現，連方的塊數越多，所可以組成的組件方式就越多種選擇。在組成方式的多樣與適當之間，我們選擇四、五、六連方做為創新  $4 \times 4 \times 4$  索瑪立方塊的組件，由於一、二、三連方容易重複，且大多數為規則方塊，七、八、九連方則因排法太多，數量難以掌控，故不選擇使用。
- 二、若要將組件組成  $4 \times 4 \times 4$  的立方體，組合方式可分為單一連方組合與複合連方組合，單一連方組合即是全部皆以同樣塊數的組件組合成，而複合連方組合即是用不同塊數的組件組合而成。以下分類討論之：

### 1. 單一連方組合

#### (1) 四連方的單一組合

四連方的組合方塊只有八種方法，但是要拼成  $4 \times 4 \times 4$  的方塊需要十六種方法，組合方法過少的情況下，會造成重複組合的可能，所以無法採用四連方的單一組合。

#### (2) 五連方的單一組合

五連方有四十七個組合，但是因為無法整除所以會造成多一塊的情況。

#### (3) 六連方的單一組合

六連方也有一百二十九種組合，但亦為無法整除所以會造成多兩塊的結果。

### 2. 複合連方組合

一個索瑪立方塊的組成為四連方有六塊，三連方有一塊，我們用一個預先設定好的索瑪立



方塊做三方面延伸的  $4 \times 4 \times 4$  的新立方體，並把方塊的組成物件限制在四、五、六連方的組成中，在此一限制條件下，本研究已找出前面五種的組合方法：

連方/ 個數	類型一	類型二	類型三	類型四	類型五	類型六
4 連方	0	0	1	1	4	6
5 連方	8	2	12	0	0	8
6 連方	4	9	0	10	8	0

三、 以下分別討論不同類型之間的重複組件情形：

1. 類型(一)與類型(二)

此為五連方與六連方之組合的解，而這兩組解之間可以互相代換，找出重複組件五連方方法十一。

2. 類型(二)、類型(四)與類型(五)

此含六連方之組合的解，這三組解之間擁有重複組件，可找出六連方方法八以及六連方方法二同為重複組件。

3. 類型(四)與類型(五)

此為四連方與五連方之組合的解，將類型四的組件八與類型五的組件十二即為重複方塊。在類形四的組件一與類型五的組件七也即為一種重複組件。在類形四組件九與類型五組件一也為一種重複組件。在類形四組件十一與類型五組件九也為一種重複組件。由此可知，在此二種類型中有四種不同的重複組件。

4. 類型(五)與類型(二)

此含有六連方之組合解，將類型五組件八與類型二組件十即為一種重複組件  
由此可知，在同類型之間替換並不會影響到重覆組件的數量。

四、 由上述結果比較可知，由文獻中可知  $3 \times 3 \times 3$  的索瑪立方塊有重複的特性，我們發現  $4 \times 4 \times 4$  的索瑪立方塊也有同樣的特性，可以透過找到重複的關鍵組件而能快速組成立方體。過去利用統計方塊數的方法找出  $3 \times 3 \times 3$  的索瑪立方塊組件的共同性，而我們則是利用分解的方法，找到  $4 \times 4 \times 4$  的索瑪立方塊其組合和組合間的共同方塊數及重複組件。

## 玖、參考資料

一、林濬哲。智慧幾何聯盟。取自

<http://www2.kuas.edu.tw/prof/cjh/2003puzzle/student/index4.htm>

二、梁崇惠。索瑪立方塊 soma。取自

<http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/FIGURES/FIGURES.HTM>.

三、九章數學出版社。索瑪立方塊(soma cube)。取自

<http://www.chiuchang.com.tw/toy/somacube.html>

四、林晏如(2009)。索瑪立方體之相關研究。取自

<http://www.shs.edu.tw/works/essay/2009/11/2009111217493047.pdf>

## 【評語】 030418

索瑪立方塊是歷久不衰的有趣問題不規則的多方格來塞滿立方體的可行性問題。本作品參考索瑪立方塊原本的立方體，探討如何推廣到的立方體上，討論並嘗試設計出的索瑪立方塊，给出了一些初步的結果。這是一個困難的問題，但由於擴展後所衍生的不規則多方塊的種類非常多，問題頗為複雜，很難给出有效的分析方式，即便在限縮討論的方塊數的情況下，仍然無法给出一些較為深入的結果，只能對於多方塊的類型做討論，有點可惜。本作品在分類時可能需要再小心些，例如作品中略有分類重複的問題。本作品初步的嘗試值得肯定，建議作者們利用已經設計出來的方塊，先擬出明確的數學問題，並進行探究解決的策略。